TOPICOS AVANÇADOS EM TRATAMENTO ESTATÍSTICO DE DADOS

Philippe Gouffon

QUESTÕES

1. Há duas formas de se impor vínculos lineares entre parâmetros de uma função linear: a priori e a posteriori. Descreva em que consiste cada um desses métodos e se a resposta final é a mesma. Como se calcula o número de graus de liberdade quando há vínculos?
2. Quais os critérios de escolha de um estimador? Explicite o que você entende por cada um dos critérios
3. Sempre que se ajusta uma função a dados pelo método dos mínimos quadrados, pode-se automaticamente aplicar o teste de χ^2 ou são necessárias algumas hipóteses a mais para que o teste tenha validade?
4. Suponha que um ajuste por mínimos quadrados tenha sido feito sobre dados gaussianos mas correlacionados, minimizando $Q = \Sigma\ ((y_i - f(x_i))/\sigma_i)^2$. O valor do χ^2 estará certo ($\chi^2 = Q_{min}$) ou não? Justifique sua resposta e indique o que deve ser feito caso a resposta seja negativa.

PROBLEMAS

1. Num circuito elétrico formado de uma pilha P e dois resistores R_1 e R_2 ligados em série, foram medidas as seguintes diferenças de potencial (em módulo):

$$V_P = 3{,}2(2)V \qquad V_{R1} = 1{,}0(1)V \qquad V_{R2} = 1{,}9(1)V$$

Determine as estimativas e a matriz de covariância das tensões V_P, V_{R1} e V_{R2}, lembrando que a soma das tensões num circuito fechado é nula. A resistência dos fios é completamente desprezível.

2. Uma certa grandeza foi medida com precisão σ = 3. Foram obtidos 4 pontos com valores $(t;\ y)$ = (0; –2), (30; 8), (60; –5) e (100; –7), independentes estatisticamente. A função esperada é do tipo $f(t) = A\ \mathrm{sen}(\omega t)$ onde A é a amplitude e ω a frequência em rd/s (t foi medido em segundos). O resultado final obtido após um ajuste não linear foi A = 9,679137 cm e ω = 0,0570199 Hz, usando como ponto de partida A_0 = 9 cm e ω_0 = 0,06 Hz

   (a) Monte a matriz M e o vetor D do ajuste, linearizando a função em torno do resultado acima (use A = 9,7 cm e ω = 0,057 Hz, para facilitar a conta)

   (b) Inverta M e ache as variações dos parâmetros que levariam a uma redução da soma dos quadrados do resíduo, $Q(A,\omega)$. Calcule $Q(A,\omega)$ antes e depois desta iteração, com os novos parâmetros.

   (c) Determine a incerteza dos parâmetros a partir da matriz M^{-1}

   (d) Determine aproximadamente as incertezas traçando a curva de $Q(A,\omega)$ em função de cada parâmetro individualmente, procurando os valores A e ω que fazem $Q(A,\omega) = \chi^2 + 1$.

   (e) Qual dos dois métodos de se achar incertezas é o mais correto (menos aproximado)?

Algumas fórmulas

Se uma função linear é escrita como

$$\vec{y} = \mathbf{X}\,\overrightarrow{a_o} + \vec{\epsilon}$$

onde $\vec{y}$ é o vetor das medidas, $\mathbf{X}$ a matriz projeto, $\overrightarrow{a_o}$ o vetor de parâmetros (verdadeiros) e $\vec{\epsilon}$ o vetor dos erros, as estimativas dos parâmetros são dadas por

$$\vec{\hat{a}} = (\mathbf{X}^t\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^t\mathbf{V}^{-1}\vec{y}$$

onde $\mathbf{V}$ é a matriz de covariância dos dados.