

Introdução à Magneto-hidrodinâmica

Gilson Ronchi

November 22, 2013

1 Introdução

A magneto-hidrodinâmica é o estudo das equações hidrodinâmicas em fluidos condutores, em particular, em plasmas. Entre os principais interesses em MHD está o estudo do equilíbrio do fluido, transporte de partícula e energia, e a interação de baixa frequência de campos eletromagnéticos com o fluido condutor.

As equações MHD que descrevem esses processos podem ser obtidas em termos de leis que expressão a conservação de massa, momento e energia:

- Conservação de massa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{V})$$

onde ρ é a densidade volumétrica de massa, \mathbf{V} é a velocidade do fluido em relação a um referencial em repouso. O termo $\rho \mathbf{V}$ pode ser interpretado como um fluxo de massa ao longo do fluido.

- Conservação do momento

$$\frac{d(\rho \mathbf{V})}{dt} = -\nabla \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{T}}$$

onde $\overleftrightarrow{\mathbf{T}}$ é o *tensor total de stress*. Pode ser escrita de modo equivalente, usando a lei de Newton, onde identificamos as forças “volumétricas” (aplicadas ao centro de massa de um elemento infinitesimal de fluido, como as força gravitacional e eletromagnética) e as forças de “superfície” (aplicadas as superfície desse elemento de fluido, como as forças de cisalhamento mecânico):

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\underbrace{\nabla \cdot \overleftrightarrow{\mathcal{P}}}_{=\nabla p} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}$$

onde $\overleftrightarrow{\mathcal{P}}$ é o tensor de pressões, que em geral poderá ser aproximado como o gradiente da pressão p ; \mathbf{J} é o vetor de densidade corrente e \mathbf{B} é o campo magnético. Note que desprezamos o termo de densidade de carga vezes o campo elétrico na expressão da força de Lorentz. Desprezamos ainda o tempo de força gravitacional que tipicamente é muito menor que a força

eletromagnética. Outro ponto relevante, é que a derivada temporal é uma derivada total, ou seja

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}$$

onde o segundo termo é uma aceleração convectiva pois é associada com gradientes especiais da velocidade no campo do fluido. Então nossa expressão de conservação de momento se torna:

$$\rho \left[\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \right] = \nabla p + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (1)$$

- Conservação de energia

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{3p}{2} \right) + \frac{3p}{2} \nabla \cdot \mathbf{V} + \nabla \cdot \mathbf{q} + \left(\overleftrightarrow{\mathcal{P}} \cdot \nabla \right) \cdot \mathbf{V} = \mathbf{J}' \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B})$$

onde \mathbf{q} é o tensor de transporte de calor e \mathbf{J}' é a corrente vista pelo elemento de fluido com \mathbf{V} . Em geral, essa expressão é simplificada, assumindo alguma equação de estado, como ocorre em um processo adiabático

$$p\rho^{-\gamma} = \text{constante} \quad (2)$$

onde γ é a razão do calor específico a pressão constante e o calor específico a volume constante.

Além disso, temos as equações para os campos eletromagnéticos:

$$\nabla \times \mathbf{E} = \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (5)$$

$$\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{J}}{\sigma}$$

onde a última expressão é a lei de Ohm generalizada. Para fluido sem resistividade, temos que

$$\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B} = 0 \quad (6)$$

As equações (1)-(6) constituem as equações da MHD ideal.

2 Teorema de Alfvén

Inicialmente veremos como o fluxo magnético varia em função do tempo ao longo de uma superfície aberta que evolui no tempo. Assim, em $t = 0$ teremos $S(t) = S1$ e em $t = t + \Delta T$, $S(t + \Delta t) = S2$.

$$\Phi(t) = \int_S \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S}$$

Então, a taxa de variação temporal do fluxo magnético será

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{S_2} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t + \Delta t) \cdot d\mathbf{S} - \int_{S_1} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} \right]$$

Expandindo $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t + \Delta t)$ em termos da série de Taylor:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t + \Delta t) = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \Delta t + \dots$$

de modo que quando $\Delta t \rightarrow 0$,

$$\frac{d\Phi}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \int_{S_2} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{S_2} \mathbf{B} - \int_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \right] \right\}$$

onde agora todos as grandezas vetoriais são calculadas no tempo t e posição \mathbf{r} .

Note que, sendo $C1$ o contorno que define a área $S1$,

$$\int_{S_2} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{C1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

Além disso, como o divergente do campo magnético é nulo, o fluxo total em uma superfície fechada deve ser nulo. Isso nos permite escrever a diferença de fluxo nas superfícies aberta como o fluxo no cilindro formado por elas:

$$\int_{S_2} \mathbf{B} - \int_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{C1} \mathbf{B} \cdot [\mathbf{V} \Delta t \times d\mathbf{l}]$$

Então

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dt} &= \oint_{C1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \oint_{C1} \mathbf{B} \cdot [\mathbf{V} \times d\mathbf{l}] \\ &= \oint_{C1} (\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \end{aligned}$$

Mas, para um fluido sem resistividade, pela equação (6), temos que o integrando é zero:

$$\boxed{\frac{d\Phi}{dt} = 0}$$

Isso mostra que as linhas o fluxo magnético em uma área qualquer do fluido se mantém constante ao longo do tempo, enquanto ela evolui espacialmente. Ou seja, as linhas de campos estão “fixas” ao fluido, e o fluido é livre para se mover apenas perpendicularmente a linha de campo magnético.

3 Equilíbrio hidrostático

Quando temos o equilíbrio hidrostático (condição estática) e quando podemos desprezar a aceleração devido ao termo de convecção, a equação MHD relevantes passam a ser escritas

$$\begin{aligned}\nabla p &= \mathbf{J} \times \mathbf{B} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0\end{aligned}$$

Usando a lei de Ampère para eliminar o \mathbf{J} ,

$$\nabla p = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \equiv \nabla \cdot \overleftrightarrow{\mathcal{T}}$$

pois

$$(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) = \nabla \cdot (\mathbf{B}\mathbf{B}) - \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{I}}{2} \mathbf{B} \right)$$

E em coordenadas cartesianas

$$\overleftrightarrow{\mathcal{T}} = \frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} B_x^2 - \frac{B^2}{2} & B_x B_y & B_x B_z \\ B_y B_x & B_y^2 - \frac{B^2}{2} & B_y B_z \\ B_z B_x & B_z B_y & B_z^2 - \frac{B^2}{2} \end{pmatrix}$$

Supondo um caso em que $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$,

$$\begin{aligned}\overleftrightarrow{\mathcal{T}} &= \frac{B^2}{2\mu_0} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B^2/2\mu_0 \end{pmatrix} + \frac{B^2}{2\mu_0} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

onde o primeiro tensor representa a tensão ao longo das linhas de fluxo e o segundo representa a pressão magnética isotrópica.

Tomando o produto escalar do gradiente de pressão, podemos obter as superfícies isobárias:

$$\begin{aligned}\mathbf{J} \cdot \nabla p &= 0 \\ \mathbf{B} \cdot \nabla p &= 0\end{aligned}$$

ou seja, tanto o campo magnético quanto a corrente são normais ao gradiente de pressão. No caso particular em que o campo magnético está na direção z , temos

$$\begin{aligned}\nabla p &= \nabla \cdot \overleftarrow{\mathcal{J}} \\ \rightarrow 0 &= \nabla \cdot \begin{pmatrix} p + \frac{B^2}{2\mu_0} & & \\ & p + \frac{B^2}{2\mu_0} & \\ & & p - \frac{B^2}{2\mu_0} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = 0 \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = 0 \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(p - \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = 0$$

Além disso,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \rightarrow \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

Ou seja, $p + B^2/2\mu_0$ é constante.

4 Ondas MHD

No plasma, como fluido, podem-se propagar ondas de três tipos:

- *ondas acústicas*, ordinárias de qualquer fluido, associado a compressão e descompressão da densidade de massa ao longo do espaço. São ondas não condutoras, longitudinais. Como $p\rho^{-\gamma}$ é uma constante, a velocidade de propagação dessas ondas é a velocidade acústica dada por:

$$V_S = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma kT}{M}}$$

- *ondas de Alfvén*, são ondas transversais que se propagam com a *velocidade de Alfvén* $V_A \equiv \frac{B}{\sqrt{\mu_0 \rho}}$
- *ondas magnetoacústicas*, que se propagam com velocidade $V = \sqrt{V_s^2 + V_A^2}$

4.1 Formulação matemática

Relembrando as principais relações MHD:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) &= 0 \\
\rho \left[\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \right] &= -\nabla p + \frac{(\nabla \times \mathbf{B})}{\mu_0} \times \mathbf{B} \\
-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) &= 0 \\
\nabla p &= V_S^2 \nabla \rho
\end{aligned}$$

Vamos considerar que as grandezas físicas do sistema possam ser descrito por uma quantidade de equilíbrio que independe da posição do espaço, mais um termo de perturbação que dependerá da posição e do tempo. Assim, se a velocidade de equilíbrio do fluido for nula, teremos

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} &= \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1(\mathbf{r}, t) \\
\rho &= \rho + \rho_1(\mathbf{r}, t) \\
\mathbf{V} &= \mathbf{V}_1(\mathbf{r}, t)
\end{aligned}$$

Segue que as nossas equações MHD passa a ser escritas, em primeira ordem das perturbações (isto é, o produto de dois termos perturbativos são desprezados), como

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{V}_1 &= 0 \\
\rho_0 \frac{\partial \mathbf{V}_1}{\partial t} + V_S^2 \nabla \rho_1 - \frac{(\nabla \times \mathbf{B}_1)}{\mu_0} \times \mathbf{B}_0 &= 0 \\
\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{V}_1 \times \mathbf{B}_0) &= 0
\end{aligned}$$

Aplicando a derivada parcial em relação ao tempo da expressão intermediária acima, obtemos,

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{V}_1}{\partial t^2} + V_S^2 \nabla \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial t} \right) + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}_0 \times \left(\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} \right) = 0$$

E substituindo as outras duas expressões, chegamos a

$$\frac{\partial^2 \mathbf{V}_1}{\partial t^2} - V_S^2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}_1) + \mathbf{V}_A \times \{ \nabla \times [\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_A] \} = 0$$

onde $\mathbf{V}_A \equiv \frac{\mathbf{B}_0}{\sqrt{\mu_0 \rho_0}}$.

Sem perda de generalidade, podemos considerar soluções de onda plana:

$$\mathbf{V}_1(\mathbf{r}, t) = \mathbf{V}_1 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

Que equivale a substituir na nossa expressão das velocidades, $\nabla \rightarrow i\mathbf{k}$ e $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega t$, o que nos leva a

$$-\omega^2 \mathbf{V}_1 + V_S^2 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_1) \mathbf{k} - \mathbf{V}_A \times \{ \mathbf{k} \times [\mathbf{k} \times (\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_A)] \} = 0$$

e, utilizando a relação vetorial $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{C}$, obtemos a seguinte relação de dispersão:

$$-\omega^2 \mathbf{V}_1 + (V_S^2 + V_A^2) (\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_1) \mathbf{k} + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_A) [(\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_A) \mathbf{V}_1 - (\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{V}_1) \mathbf{k} - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_1) \mathbf{V}_A] = 0$$

- Se $\mathbf{k} \perp \mathbf{B}_0$, então $\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_A = 0$ e

$$-\omega^2 \mathbf{V}_1 + (V_S^2 + V_A^2) (\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_1) \mathbf{k} = 0$$

$$\rightarrow \mathbf{V}_1 = \frac{1}{\omega^2} (V_S^2 + V_A^2) (\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_1) \mathbf{k}$$

Logo, $\mathbf{V}_1 \parallel \mathbf{k}$, e a solução é uma onda longitudinal com velocidade de fase $\frac{\omega}{k} = \sqrt{V_S^2 + V_A^2}$

- Se $\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}_0$, então $\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_A = kV_A$ e

$$(k^2 V_A^2 - \omega^2) \mathbf{V}_1 + \left(\frac{V_S^2}{V_A^2} - 1 \right) k^2 (\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_A) \mathbf{V}_1 = 0$$

o que nos leva a dois tipos de ondas

1. $\mathbf{V}_1 \parallel \mathbf{B}_0$ e $\mathbf{V}_1 \parallel \mathbf{k}$, o que nos leva a $\frac{\omega}{k} = V_S$, ou seja, uma onda acústica longitudinal.
2. $\mathbf{V}_1 \perp \mathbf{B}_0$ e $\mathbf{V}_1 \perp \mathbf{k}$, o que nos leva a $\frac{\omega}{k} = V_A$, que são as ondas de Alfvén (sem dispersão)