6^a Lista de Exercícios – Eletromagnetismo I
Data de entrega: 04/12

6.1 Frequentemente é útil escrever uma onda plana monocromática usando a fórmula de Euler, e tomando a parte real dessa onda:

$$\mathbf{E} = Re\left[\mathbf{E}_0\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t+\delta)}\right] = Re\left[\tilde{\mathbf{E}}\right] \qquad , \qquad \mathbf{B} = Re\left[\tilde{\mathbf{B}}\right] = Re\left[\frac{1}{c}\hat{\mathbf{k}}\times\tilde{\mathbf{E}}\right] .$$

Mostre que podemos escrever a *média temporal* da densidade de energia do campo eletromagnético em termos desses campos complexos, como:

$$\langle\rho_{EM}\rangle_t = \frac{1}{4}Re\left[\varepsilon_0\tilde{\mathbf{E}}\cdot\tilde{\mathbf{E}}^* + \frac{1}{\mu_0}\tilde{\mathbf{B}}\cdot\tilde{\mathbf{B}}^*\right] .$$

Similarmente, mostre que a média temporal do vetor de Poyting é dada por:

$$\langle\mathbf{S}_P\rangle_t = \frac{1}{2\mu_0}Re\left[\tilde{\mathbf{E}}\times\tilde{\mathbf{B}}^*\right] .$$

6.2 Uma onda eletromagnética plana de frequência angular ω incide perpendicularmente a uma superfície desde o vácuo. Considere que o vácuo ocupa o espaço $z > 0$, e a região $z < 0$ é ocupada por algum meio material.

- Considere que o meio material é um espelho que reflete totalmente a onda. Encontre a taxa média de transferência de momento por unidade de área que é trocada entre a onda e o espelho – ou seja, encontre a pressão dessa onda sobre o espelho. Lembre-se de que a densidade de momento dos campos eletromagnéticos é dada por $\langle\mathbf{\Pi}_{EM}\rangle_t = \langle\mathbf{S}_P/c^2\rangle_t$.
- Calcule a pressão considerando agora que o meio material absorve totalmente a onda.
- Se o meio material é um bom condutor, mostre que o vetor de Poynting $\mathbf{S}_P$, calculado dentro do condutor, é igual à potência (por unidade de área perpendicular a z) perdida por efeito Joule no condutor.

6.3 Analise o caso da polarização perpendicular ao plano de incidência. Imponha as condições de contorno e obtenha as equações de Fresnel para o campo elétrico refletido e transmitido. Esboce os gráficos de $\frac{E_R}{E_I}$ e $\frac{E_T}{E_I}$ em função do ângulo de incidência para o caso em que $n_2/n_1 = 1.5$. Calcule os coeficientes de transmissão e reflexão, e mostre que a soma dos dois é 1.

6.4 Calcule a pressão exercida pela incidência de ondas eletromagnéticas sobre um dielétrico em função do ângulo de incidência. Considere separadamente os dois casos de polarização (paralelo e perpendicular ao plano de incidência).

6.5 De acordo com a Lei de Snell, quando a luz passa de um meio opticamente denso para um meio menos denso ($n_1 > n_2$), o vetor de propagação $\mathbf{k}$ é desviado, de modo que o ângulo de transmissão é maior do que o ângulo de incidência. Em particular, quando o ângulo de incidência é igual a um ângulo crítico:

$$\theta_C \equiv \sin^{-1}(n_2/n_1) ,$$

então $\theta_T = 90°$, e a luz é transmitida paralelamente à interface do meio. Se $\theta_I > \theta_C$, temos o fenômeno da reflexão interna total, onde toda a luz é refletida (não há refração).

a. Considerando que a interface encontra-se no plano $x\,y$, mostre que na reflexão total para uma onda de frequência ω se propagando na direção $z < 0$ temos:

$$\tilde{\mathbf{E}}_T(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}_{0T}\, e^{\kappa z}\, e^{i(kx - \omega t)} \ ,$$

onde:

$$\kappa \equiv \frac{\omega}{c}\sqrt{(n_1 \sin\theta_I)^2 - n_2^2} \qquad \text{e} \qquad k \equiv \frac{\omega n_1}{c}\sin\theta_I \ .$$

b. Calcule o coeficiente de reflexão para a onda eletromagnética com polarização paralela ao plano de incidência.

c. Calcule o coeficiente de reflexão para a onda com a polarização perpendicular ao plano de incidência.

d. No caso da polarização perpendicular ao plano de incidência, mostre que a parte real dos campos transmitidos (que nesse caso são chamados campos evanescentes) são:

$$\mathbf{E}_T(\mathbf{r}, t) = E_0\, e^{\kappa z}\, \cos(kx - \omega t)\, \hat{\mathbf{y}}$$
$$\mathbf{B}_T(\mathbf{r}, t) = \frac{E_0}{\omega}\, e^{\kappa z}\, [\kappa \sin(kx - \omega t)\, \hat{\mathbf{x}} + k\cos(kx - \omega t)\, \hat{\mathbf{z}}]$$

e. Mostre que, para os campos do item anterior, em média, nenhuma energia é transmitida na direção z.

6.6 Um plasma pode ser pensado como um gás clássico (não relativístico) de íons positivos e elétrons. Estamos interessados inicialmente na interação de uma onda eletromagnética com os elétrons livres deste plasma, já que estes têm massa muito menor do que os íons positivos.

a. Para uma onda eletromagnética harmônica transversal, seu campo elétrico pode ser expresso na forma $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}$. Mostre que nas operações envolvendo ∇, esse operador pode ser substituído por $i\mathbf{k}$, e as derivadas temporais, por $-i\omega$. Reescreva as equações de Maxwell usando essa simplificação.

b. Para os itens *b* até *d* considere que a onda harmônica se propaga na direção z e suponha que o número médio de elétrons por unidade de volume do plasma é n. Mostre que a densidade de corrente induzida pelo campo elétrico da onda é:

$$\mathbf{J} = i\frac{ne^2}{m\omega}\mathbf{E} \ ,$$

onde e e m são, respectivamente, a carga e a massa do elétron, e ω é a frequência da onda. Note que podemos escrever $\mathbf{J} = -en\mathbf{v}$, onde v é a velocidade dos elétrons. [Sugestão: Desconsidere a contribuição de $\mathbf{B}$ na força de Lorentz.]

c. Devido à interação da onda eletromagnética com o plasma, o número de onda e a frequência angular não são mais necessariamente dados pela relação $\omega = k\,c$. Partindo das equações de Maxwell, obtenha a *relação de dispersão* $\omega(k)$ para a propagação da onda nesse plasma.

d. O plasma admite a propagação de ondas com quaisquer frequências? Justifique sua resposta.