5^a Lista de Exercícios – Eletromagnetismo I

Data de entrega: 08/11

5.1 — Considere dois anéis condutores idênticos, de raio a, que estejam paralelos um ao outro, mas separados por uma distância d. Encontre o valor aproximado para a indutância mútua entre os dois anéis. [*Dica: você pode aproximar o campo magnético de um anel pelo campo de um dipolo magnético.*]

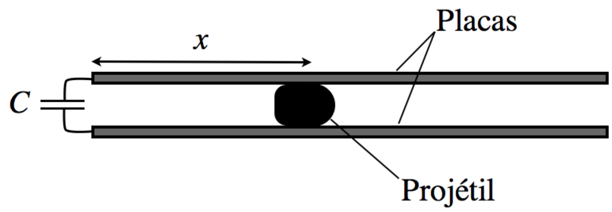
5.2 — Um cabo coaxial é feito de uma casca cilíndrica interna, de raio a, envolta por uma outra casca cilíndrica, de raio b. Calcule a auto-indutância por unidade de comprimento desse sistema, no limite em que as cascas têm uma espessura muito pequena.

5.3 — Considere dois indutores, de auto-indutância L_1 e L_2 e indutância mútua M.

a. Mostre que, se os dois indutores estão ligados em série, a indutância efetiva desse sistema é $L_1+L_2\pm 2M$ (onde o sinal $\pm$ se refere à orientação espacial relativa entre os dois indutores).

b. Mostre que, se os dois indutores estão ligados em paralelo, a indutância efetiva desse sistema é $(L_1L_2 - M^2)/(L_1 + L_2 \pm 2M)$.

5.4 — Um canhão eletromagnético consiste de duas placas paralelas estreitas, conectadas a uma fonte de alta voltagem (geralmente isso é feito por meio de um capacitor muito potente). O projétil é feito de material condutor, e pode correr por entre as placas, como indicado na figura. A alta corrente que flui pelas placas e pelo projétil gera um campo magnético poderoso que interage com a corrente que flui pelo projétil, acelerando-o.



a. Mostre que, se a fonte de voltagem fornece uma corrente constante para o circuito, a força no projétil é diretamente proporcional ao produto do quadrado da corrente e a auto-indutância por unidade de comprimento das placas. [*Dica: despreze a resistência e mostre que o balanço de energia do sistema pode ser escrito como* $dW + \frac{1}{2}I^2dL = I^2dL$*, onde* dW *é o trabalho feito pela força magnética sobre o projétil,* $\frac{1}{2}I^2dL$ *é o aumento da energia do campo magnético, e* I^2dL *é o trabalho feito pela fonte de voltagem para manter a corrente constante.*]

b. Suponha que a indutância por unidade de comprimento é 10 h (*henries*). Estime a corrente necessária para acelerar um projétil de 200 g até uma velocidade de 1000 m/s, em um canhão de 1 m de comprimento.

5.5 — Um sistema RLC tem uma resistência (R), um indutor (L) e um capacitor (C), todos ligados em *paralelo* a uma fonte de corrente alternada $I = I_0 \cos \omega t \to I_0 \, e^{i\omega t}$. Encontre a impedância complexa, Z, desse sistema, e determine para quais valores a corrente será máxima, e para quais valores ela será mínima.

5.6 — Suponha que no cabo coaxial do problema 5.2 passa uma corrente alternada $I = I_0 \cos \omega t$, de tal modo que a corrente no cilindro interno é oposta à corrente no cilindro externo. Calcule o campo elétrico induzido entre as duas cascas cilíndricas, e em seguida calcule o campo magnético induzido por esse campo elétrico.

5.7 — O Sol frequentemente ejeta nuvens de plasma (partículas carregadas), que podem chegam à superfície da Terra e levar às chamadas "tempestades geomagnéticas". Além de tornar ainda mais dramáticos os fenômenos da aurora boreal e austral, essas tempestades magnéticas podem causar graves problemas nas redes de telecomunicações e nas redes de distribuição de eletricidade. Estime a força eletromotriz máxima que pode ser induzida num circuito de 1000 km por 1000 km caso o campo magnético da Terra mude por 10^{-6} T num intervalo de tempo de 60 s. [Nota: o campo magnético da Terra é da ordem de 3×10^{-5} T – mas você não necessita dessa informação!]

5.8 — Um supercondutor é um material em cujo interior o campo magnético se anula (efeito Meissner). O fenômeno de um ímã "levitando" acima de um supercondutor pode ser descrito através do método das imagens. Considere que o ímã é um dipolo magnético ideal $\vec{m}$, a uma distância z acima do supercondutor (que ocupa o espaço $z \leq 0$), e mantido com uma orientação fixa tal que $\vec{m} = m\hat{z}$.

a. Mostre que, por causa do efeito Meissner, a componente B_z do campo magnético se anula logo acima do supercondutor.

b. A configuração na qual B_z se anula em $z = 0$ pode ser obtida por meio de uma "imagem" – um dipolo magnético idêntico, localizado em $-z$ – que toma o papel do supercondutor. Assim o campo magnético em todo o espaço é representado pelo dipolo original, e sua imagem. Mas em que direção aponta a imagem?

c. Encontre a força no magneto devida às correntes induzidas na superfície do supercondutor, e iguale-a a Mg (a força gravitacional), para determinar a altura h sobre a qual o magneto vai flutuar.

d. Imagine agora que o ímã é livre para rodar e encontrar uma outra orientação. Qual a orientação que ele vai adotar, e qual a altura em que ele vai flutuar?

5.9 — Uma casca esférica condutora de raio a está sujeita a um campo magnético constante $\vec{B} = B_0 \hat{z}$, e gira com velocidade angular ω ao redor do eixo z. Calcule a força eletromotriz induzida entre o polo Norte ($z = a$) e o equador ($z = 0$) dessa esfera.

5.10 — Suponha que uma certa densidade de carga depende do tempo, $\rho = \rho(t, \vec{r})$, mas que a densidade de corrente é constante, $\vec{J} = \vec{J}(\vec{r})$. Essa situação é encontrada em situações tais como capacitores que estão sendo carregados.

a. Mostre que a densidade de carga em qualquer ponto é dada por $\rho(t,\vec{r}) = \rho(t=0,\vec{r}) + \dot{\rho}(t=0,\vec{r}) \times t$

b. Nessa configuração, estritamente falando, não podemos aplicar as leis da eletrostática ou da magnetostática, mas mesmo assim as Leis de Coulomb e de Biot-Savart continuam valendo. Em particular, mostre que o campo:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \, \frac{\vec{J}(\vec{r}\,') \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}$$

obedece a Lei de Ampère com a corrente de deslocamento de Maxwell.

5.11 — Vamos imaginar que existem cargas magnéticas ("monopolos" magnéticos), de forma que duas das equações de Maxwell teriam que ser alteradas:

$$\vec{\nabla} \cdot B = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot B = \mu_0 \rho_m \ ,$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu_0 \vec{J}_m - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \ ,$$

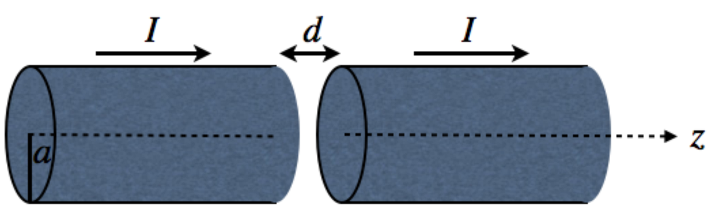
onde ρ_m é a densidade de cargas magnéticas, e $\vec{J}_m$ é a densidade de corrente magnética, que são relacionadas por uma equação de continuidade tal como aquela que vale para cargas elétricas, $\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_m + \partial \rho_m / \partial t = 0$.

a. Ainda seria possível expressar os campos elétrico e magnético por meio de potenciais? Se você acha que sim, então quantos potenciais seriam necessários, e como eles se relacionam com os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$? Como ficaria a invariância por transformações de calibre nesse caso? [*Dica: atenção às dimensões dos campos e dos potenciais!*]

b. Mostre que as equações de Maxwell na presença de cargas magnéticas são invariantes sob as transformações:

$$\begin{aligned}
\vec{E}\,' &= \vec{E} \cos\alpha + c\,\vec{B} \operatorname{sen}\alpha \\
c\vec{B}\,' &= c\,\vec{B} \cos\alpha - \vec{E} \operatorname{sen}\alpha \\
q_e' &= c\,q_e \cos\alpha + q_m \operatorname{sen}\alpha \\
q_m' &= q_m \cos\alpha - c\,q_e \operatorname{sen}\alpha
\end{aligned}$$

5.12 — Considere um fio grosso, de raio a, que leva uma corrente I, homogeneamente distribuída pelo volume do fio. O fio é reto e muito longo, mas em um certo ponto ele tem um pedaço que foi cortado, de forma que está faltando um pequeno trecho, de comprimento $d \ll a$ − veja a figura abaixo:



Esse pedacinho que falta no fio (o “intervalo” de largura d) não altera a corrente, de forma que você pode pensar nas faces opostas do fio, em cada lado do intervalo, como um capacitor de placas paralelas. Considere que a corrente é nula inicialmente, e começa a fluir na direção z no instante $t = 0$.

a. Encontre os campos elétrico e magnético no intervalo de largura d, em função do tempo t e da distância (ρ) ao eixo que passa pelo centro do fio. Indique a direção e o sentido dos campos.

b. Encontre a densidade de energia do campo eletromagnético no intervalo.

c. Calcule o vetor de Poynting no intervalo, indicando a sua direção.

d. Determine a energia *total* no intervalo como uma função do tempo. Calcule a potência que é transmitida para dentro do intervalo, integrando o vetor de Poynting numa superfície apropriada, e verifique que essa potência corresponde à taxa de variação da energia total no intervalo. [*Dica: despreze os efeitos de borda do capacitor.*]