



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA POLITÉCNICA
Departamento de Engenharia de Sistemas Eletrônicos
PSI - EPUSP
PSI 3212 - LABORATÓRIO DE CIRCUITOS ELÉTRICOS

INTRODUÇÃO TEÓRICA - EXPERIÊNCIA 10

1º semestre de 2016
Profas. Cinthia Itiki, Inés Pereyra

Modelos de Elementos Passivos

Esta experiência tem por objetivo determinar modelos com parâmetros invariantes na frequência para representar elementos passivos de circuitos elétricos, com ênfase em indutores e capacitores.

1. Resistor

Em circuitos elétricos, a resistência pode ser introduzida por qualquer elemento que transforme a energia elétrica para alguma outra forma, por exemplo, um motor ou um LED. Porém há dispositivos físicos que podem ser construídos para aproximar-se do comportamento de bipolos ideais. O tipo de resistor a ser escolhido depende da aplicação. Para resistências variáveis, usam-se os potenciômetros e os reostatos. Para resistências fixas, há resistores de carvão e de fio, dentre outros.

Os resistores de carvão constituem-se de um núcleo sólido de forma cilíndrica protegido por plástico ou tinta e conectado a fios metálicos nas extremidades. Os resistores de carvão têm alta tolerância (5%) e mudam de valor ao longo do tempo quando expostos à sobretensão, ou então, à umidade e alta temperatura [1].

Os resistores de fio possuem um núcleo cerâmico ou plástico, ao qual é enrolado um fio metálico. O conjunto é protegido por uma camada de plástico ou tinta esmaltada. São resistentes a altas temperaturas. No entanto, o enrolamento do fio ao redor do núcleo gera uma indutância relativamente alta neste tipo de resistor. Isso pode alterar o comportamento do resistor nas altas frequências [1].

Normalmente, os resistores são usados numa faixa de frequências em que podem ser representados apenas por uma resistência ideal.

2 – Indutor

Os indutores são construídos por bobinas de fio condutor enrolado sobre um núcleo, que pode ser oco (núcleo de ar) ou ser preenchido por material ferromagnético [2]. Idealmente deveriam se comportar como uma indutância pura.

2.1 – Indutor ideal

Seja $i(t)$ a corrente que passa pelos fios, proporcional ao fluxo de indução magnética concatenado com a bobina. Se este fluxo variar e se a geometria da

bobina e o núcleo não se alterarem, aparecerá nos terminais da bobina uma tensão induzida [2]

$$v(t) = L \frac{d i(t)}{d t} \quad (1)$$

em que L que é a indutância própria da bobina.

No caso de regime permanente senoidal, a impedância $Z(\omega)$ do indutor ideal seria dada por [2]

$$Z(\omega) = j\omega L, \quad (2)$$

em que ω é a frequência angular em radianos por segundo e L é a indutância própria do indutor ideal.

A figura 1 ilustra o modelo do indutor ideal, composto de um único componente: a indutância L .

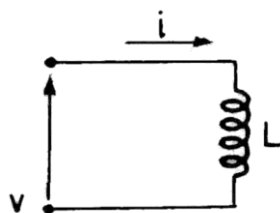


Figura 1 – Indutor ideal.

A figura 2 ilustra, para uma indutância L constante, a respectiva impedância, cujo módulo é dado por $|Z(\omega)| = \omega L$ ohms e a fase por $\phi(\omega) = \pi/2$ radianos = 90 graus. A frequência em hertz equivale a $f = \omega/2\pi$ [Hz].

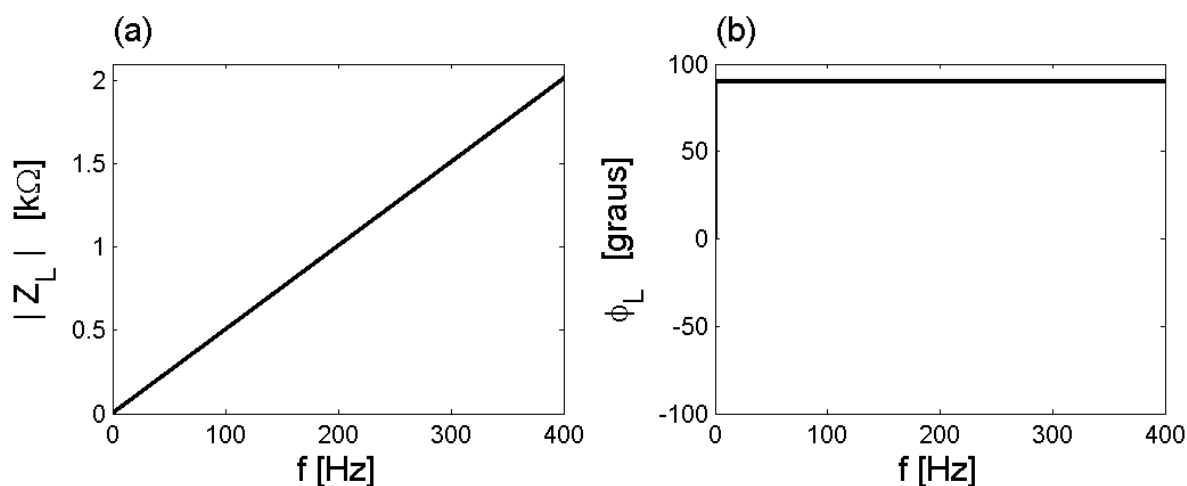


Figura 2 – O indutor ideal com indutância constante (800mH) tem impedância com (a) módulo linear e (b) fase constante e igual a $+\pi/2$ radianos.

2.2 – Indutor com perdas

Os indutores reais não são perfeitos, pois parte da energia que lhes é fornecida é dissipada em forma de calor ou armazenada sob forma eletrostática. As perdas no indutor ocorrem tanto nos fios do enrolamento quanto no material do núcleo. [1] Para representar essas perdas, costuma-se incluir no modelo do indutor uma resistência de perdas.

A resistência de perdas pode, em princípio, ser considerada em série ou em paralelo com a indutância, levando aos dois modelos indicados na figura 3.

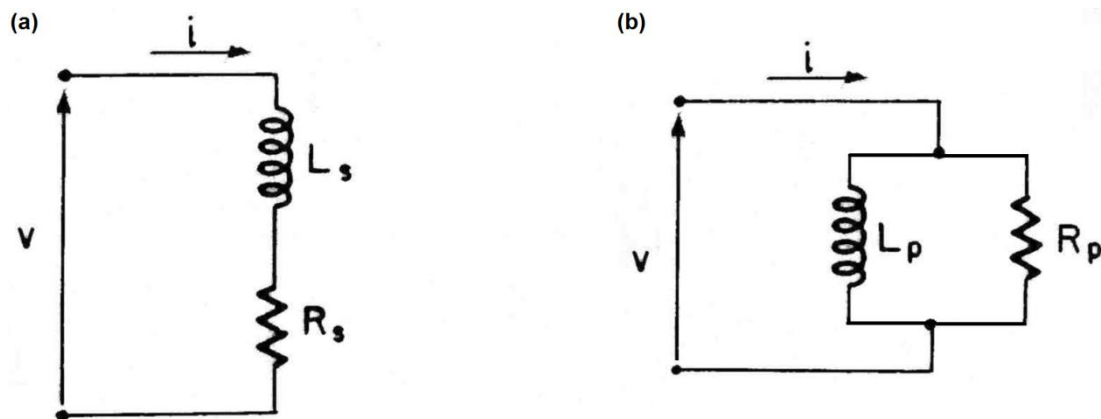


Figura 3 – Indutor com perdas representado pelas associações (a) série e (b) paralelo.

Para uma frequência fixa ω_0 , as resistências e indutâncias das associações série e paralela são constantes (R_{S0} , L_{S0}) e (R_{P0} , L_{P0}). Podem-se analisar os comportamentos de uma associação série (R_{S0} , L_{S0}) e uma paralela (R_{P0} , L_{P0}) com a frequência, visando à comparação com os indutores ideais. Também se pode compará-las com indutores reais. Para a associação série, o módulo é dada por

$$|Z_s(\omega)| = \sqrt{(R_s)^2 + (\omega L_s)^2} \quad [\Omega] \quad (3)$$

e a fase por

$$\phi_s(\omega) = \arctan(\omega L_s / R_s) \quad [\text{rad}]. \quad (4)$$

O módulo e a fase da impedância da associação série estão ilustrados na figura 4. Semelhantemente, o módulo e a fase da associação paralela estão ilustrados na figura 5 e são dados por

$$|Z_p(\omega)| = \omega R_p L_p / \sqrt{R_p^2 + \omega^2 L_p^2} \quad [\Omega] \quad (5)$$

e

$$\phi_p(\omega) = \arctan(R_p / \omega L_p) \quad [\text{rad}]. \quad (6)$$

Observa-se na figura 4 que, à medida que a frequência aumenta até 400Hz, a impedância da associação série se aproxima da impedância do indutor ideal. Por outro lado, a impedância da associação paralela se afasta da impedância do indutor ideal, de acordo com a figura 5.

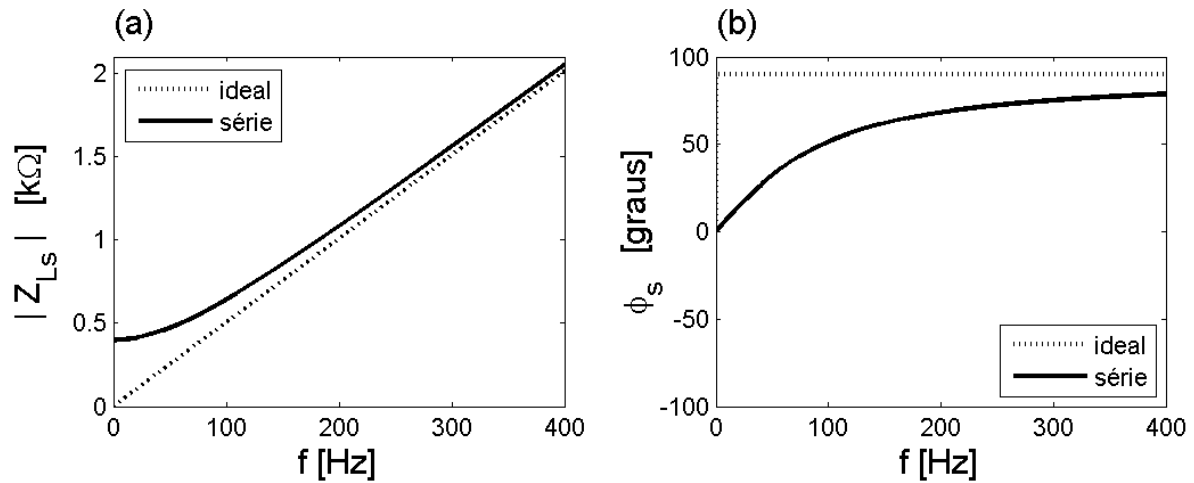


Figura 4 –A impedância (linha contínua) do modelo série é apresentada pelo (a) módulo e (b) fase. As linhas pontilhadas correspondem à impedância do indutor ideal. A associação série do indutor tem indutância 800mH e resistência 400Ω.

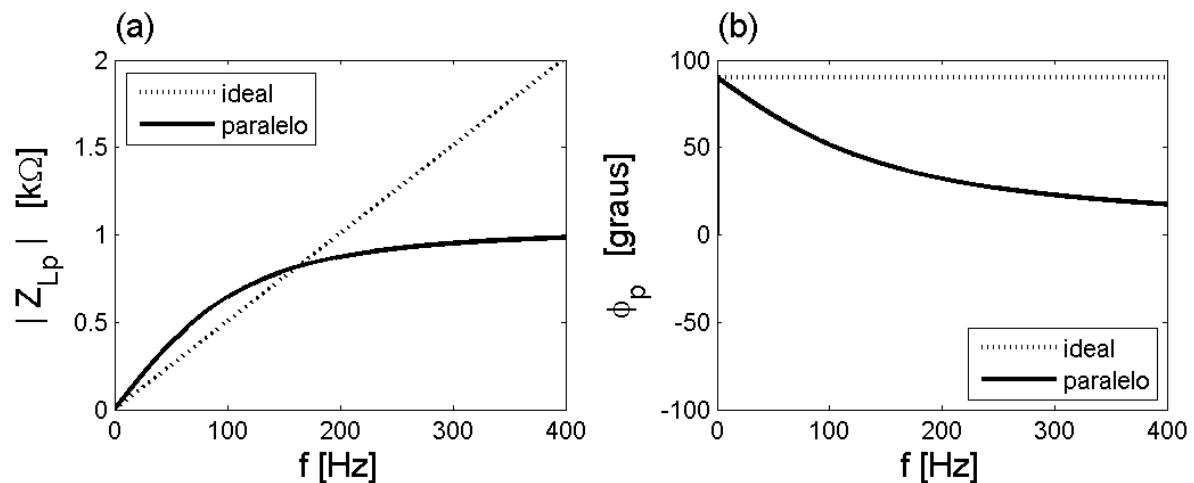


Figura 5 –A impedância (linha contínua) do modelo paralelo é apresentada pelo (a) módulo e (b) fase. As linhas pontilhadas correspondem à impedância do indutor ideal. A associação paralela do indutor tem indutância de 2,0633H e resistência de 653,3Ω.

2.2.1 – Índice de mérito do indutor com perdas

Apesar de as impedâncias das associações série e paralelo variarem de forma distinta com a frequência, elas sempre podem ser igualadas para uma frequência específica. Assim, a relação entre os parâmetros destes dois modelos, numa mesma frequência ω_0 pode ser obtida a partir da igualdade entre as impedâncias.

$$Z(\omega_0) = R_s(\omega_0) + j\omega_0 L_s(\omega_0) = \frac{j\omega_0 L_p(\omega_0) R_p(\omega_0)}{R_p(\omega_0) + j\omega_0 L_p(\omega_0)}, \quad (7)$$

Igualando as partes reais e imaginárias das duas impedâncias, resultam as relações de equivalência entre as resistências

$$R_s(\omega_0) = \frac{1}{1 + Q_p^2(\omega_0)} R_p(\omega_0), \quad (8)$$

e as indutâncias

$$L_s(\omega_0) = \frac{Q_p^2(\omega_0)}{1 + Q_p^2(\omega_0)} L_p(\omega_0), \quad (9)$$

em que

$$Q_p(\omega_0) = \frac{R_p(\omega_0)}{\omega_0 L_p(\omega_0)} \quad (10)$$

é, por definição, o índice de mérito do modelo paralelo. Verifica-se que o índice de mérito da associação série, definido por

$$Q_s(\omega_0) = \frac{\omega L_s(\omega_0)}{R_s(\omega_0)} \quad (11)$$

é igual ao índice de mérito da associação paralela na frequência específica ω_0 . Basta substituir as equações (8) e (9) na definição do índice de mérito do modelo série (11), para obter

$$Q_s(\omega_0) = Q_p(\omega_0) = Q(\omega_0). \quad (12)$$

O índice de mérito pode ser usado para comparar o desempenho das bobinas. Algumas vezes usa-se também o fator de dissipação

$$D(\omega_0) = \frac{1}{Q(\omega_0)} \quad (13)$$

Quanto maior o índice de mérito, mais o indutor se aproxima de uma indutância pura, ideal. Observe que, para uma bobina ideal, o índice de mérito seria infinito. Nesse caso, para a associação série, a resistência seria zero (curto-circuito). E para a associação paralela, a resistência seria infinita (circuito aberto). Portanto, para ambos as associações, o índice de mérito infinito resultaria no indutor ideal.

2.2.2 – Cálculo dos componentes RL do indutor com perdas

Para determinar os componentes de um modelo (ou seja, indutâncias, resistências, capacitâncias e condutâncias) pode-se utilizar o comportamento em regime permanente senoidal do indutor que se deseja modelar, comparando-o com o do modelo escolhido. Isto pode ser feito medindo-se a impedância

$$Z = \hat{V} / \hat{I} = |Z| e^{j\varphi} \quad (14)$$

do indutor real para diferentes frequências e comparando esses valores com os valores teóricos fornecidos pelo modelo.

Por exemplo, para as associações série e paralelo da figura 3, a impedância do modelo série é dada teoricamente por

$$Z_s(\omega) = R_s(\omega) + j\omega L_s(\omega) \quad (15)$$

e do modelo paralelo por

$$Z_p(\omega) = \left(\frac{\omega^2 L_p^2(\omega) R_p(\omega)}{R_p^2(\omega) + \omega^2 L_p^2(\omega)} \right) + j \left(\frac{\omega L_p(\omega) R_p^2(\omega)}{R_p^2(\omega) + \omega^2 L_p^2(\omega)} \right). \quad (16)$$

Suponha que, para um indutor real foram medidos o módulo $|Z(\omega_0)|$ e a fase $\phi(\omega_0)$ da impedância na frequência ω_0 , de tal forma que

$$Z(\omega_0) = |Z(\omega_0)| e^{j\phi(\omega_0)}. \quad (17)$$

Para o modelo série, a fase é dada por

$$\phi(\omega_0) = \arctan((\omega_0 L_s)/R_s) \quad (18)$$

e o módulo por

$$|Z(\omega_0)| = \sqrt{(\omega_0 L_s)^2 + R_s^2} . \quad (19)$$

Para o modelo paralelo, a fase e o módulo são dados respectivamente por

$$\phi(\omega_0) = \arctan(R_p / (\omega_0 L_p)) \quad (20)$$

e

$$|Z(\omega_0)| = \omega_0 L_p R_p / \sqrt{(\omega_0 L_p)^2 + R_p^2} \quad (21)$$

Por simplificação de notação, nas fórmulas a seguir, as medidas do módulo e da fase na frequência ω_0 serão representadas por $|Z_0|$ e ϕ_0 . A partir dos valores medidos, podem-se calcular os valores da resistência do modelo série da bobina [1]

$$R_s(\omega_0) = |Z_0| \cos \phi_0 \quad (22)$$

e da indutância do modelo série [1]

$$L_s(\omega_0) = \frac{|Z_0| \sin \phi_0}{\omega_0} . \quad (23)$$

Também se podem calcular a resistência para o modelo paralelo [1]

$$R_p(\omega_0) = \frac{|Z_0|}{\cos \phi_0} \quad (24)$$

e a respectiva indutância do modelo paralelo [1]

$$L_p(\omega_0) = \frac{|Z_0|}{\omega_0 \sin \phi_0} . \quad (25)$$

Note que de modo geral a indutância do modelo série é diferente da indutância do modelo paralelo, mesmo para uma frequência fixa, ou seja,

$$L_s(\omega_0) \neq L_p(\omega_0) . \quad (26)$$

A aproximação dos valores dessas indutâncias só ocorre quando o índice de mérito $Q(\omega_0)$ é suficientemente grande na frequência ω_0 .

Apesar de os componentes dos modelos série e paralelo se comportarem de forma diferente, ambos os modelos são equivalentes para uma dada frequência fixa ω_0 : os dois representam uma impedância complexa com partes real e imaginária positivas. Assim, na frequência ω_0 , os dois modelos podem ser usados indiferentemente, devendo ser escolhido aquele que torna mais fácil a análise do circuito em estudo.

Por outro lado, se variarmos a frequência, aparecem as diferenças entre o modelo série e paralelo: as curvas do módulo $|Z(\omega)|$ e da fase $\phi(\omega)$ são diferentes para cada modelo, conforme já visto nas figuras 4 e 5.

2.3 – Indutor com perdas e auto-ressonância

À medida que a frequência aumenta, os indutores reais começam a armazenar energia sob forma eletrostática de modo que para representá-los satisfatoriamente torna-se necessária a utilização de modelos que incluam uma capacitância parasita ou residual C_p . Essa capacitância, colocada em paralelo num dos modelos anteriores, só tem importância em frequências vizinhas do extremo superior de utilização da bobina. Basicamente essa capacitância provém da

vizinhança entre várias espiras que compõem o enrolamento. Afastando estas espiras umas das outras, a capacitância residual diminui.

Por causa desta capacitância residual, os indutores reais constituem na verdade um circuito RLC série-paralelo ilustrado na figura 6 e, portanto, terão uma frequência de auto-ressonância ω_r rad/s. No caso do circuito RLC série-paralelo, o módulo da impedância é máximo na frequência de ressonância

$$|Z(\omega_r)| = \max\{|Z(\omega_r)|\} \quad (27)$$

e a fase é aproximadamente nula

$$\phi(\omega_r) \cong 0. \quad (28)$$

Desta forma para que um indutor real se comporte como uma indutância, deve ser utilizado apenas em frequências bem menores que a sua frequência de auto-ressonância, por exemplo, trinta vezes menor, ou seja, em $\omega_r/30$ rad/s.

A frequência de auto-ressonância pode ser determinada para o modelo RLC série-paralelo ilustrado na figura 6, ou então, para o modelo RLGC ilustrado na figura 7. A determinação dos parâmetros destes modelos é feita de maneira similar à utilizada para os modelos série e paralelo, mas agora são usadas as medidas da impedância em duas frequências diferentes, conforme descrito na próxima seção.

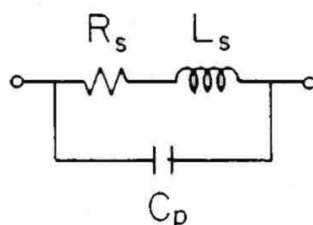


Figura 6 – Modelo RLC série-paralelo de indutor

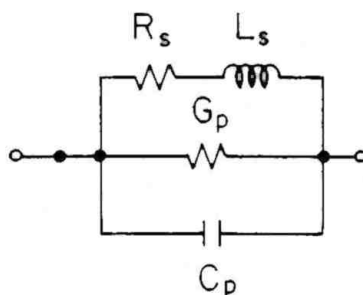


Figura 7 – Modelo RLGC de indutor

2.3.1 – Cálculo dos componentes do modelo RLGC do indutor com perdas e auto-ressonância

A indutância L_s e a resistência R_s podem ser calculadas a partir da medida da impedância em frequência baixa $\omega_0 \ll \omega_r$, por exemplo $\omega_0 = 200\pi$ rad/s, ou seja, $f_0 = 100$ Hz. Nessa frequência, consideram-se desprezíveis as influências da condutância G_p e da capacitância C_p em paralelo. Portanto, tem-se

$$R_s = |Z_0| \cos \phi_0 \quad (29)$$

e

$$L_s = \frac{|Z_0| \operatorname{sen} \phi_0}{\omega_0}, \quad (30)$$

em que $|Z_0|$ e ϕ_0 são os valores medidos do módulo e da defasagem na frequência ω_0 .

Para a realização da segunda medida, deve-se considerar que a fase ϕ_1 seja o mais próximo possível de zero, na frequência ω_1 . Isso ocorre para $\omega_1 \cong \omega_r$, em que ω_r é a frequência de auto-ressonância. Na frequência ω_1 , tem-se que a admitância do modelo vale:

$$Y_1 = \frac{1}{R_s + j\omega_1 L_s} + G_p(\omega_1) + j\omega_1 C_p(\omega_1). \quad (31)$$

Aqui se supõe que

$$R_s(\omega_1) = R_s(\omega_0) = R_s \quad (32)$$

e que

$$L_s(\omega_1) = L_s(\omega_0) = L_s. \quad (33)$$

A separação explícita das partes real e imaginária permite descrever a admitância como

$$(|Y_1| \cos \phi_1) - j(|Y_1| \operatorname{sen} \phi_1) = \left(G_p(\omega_1) + \frac{R_s}{R_s^2 + \omega_1^2 L_s^2} \right) + j \left(\omega_1 C_p(\omega_1) - \frac{\omega_1 L_s}{R_s^2 + \omega_1^2 L_s^2} \right). \quad (34)$$

Fazendo-se $|Y_1| = 1/|Z_1|$, obtêm-se os valores da condutância

$$G_p = \frac{\cos \phi_1}{|Z_1|} - \frac{R_s}{R_s^2 + \omega_1^2 L_s^2} \quad (35)$$

e da capacitância

$$C_p = -\frac{\operatorname{sen} \phi_1}{\omega_1 |Z_1|} + \frac{L_s}{R_s^2 + \omega_1^2 L_s^2}. \quad (36)$$

Quando a fase ϕ_1 for exatamente nula, a primeira parcela da capacitância também será nula.

O índice de mérito da bobina também pode ser obtido a partir de medidas da impedância em duas frequências adicionais. As frequências de corte ω_{c1} e ω_{c2} são as frequências para as quais

$$|Z| = |Z_r| / \sqrt{2}, \quad (37)$$

em que $|Z_r|$ é o módulo da impedância para a frequência de auto-ressonância ω_r e corresponde a $\max\{|Z(\omega)|\}$.

$$|Z_r| = |Z(\omega_r)| = \max\{|Z(\omega)|\}. \quad (38)$$

O índice de mérito da bobina pode ser calculado por:

$$Q(\omega_r) = \frac{\omega_r}{\omega_{c2} - \omega_{c1}} = \frac{f_r}{f_{c2} - f_{c1}} \quad (39)$$

A figura 8 ilustra o módulo e a fase da impedância de uma bobina, representada por um circuito RLGC. A frequência de auto-ressonância ω_r corresponde ao módulo máximo.

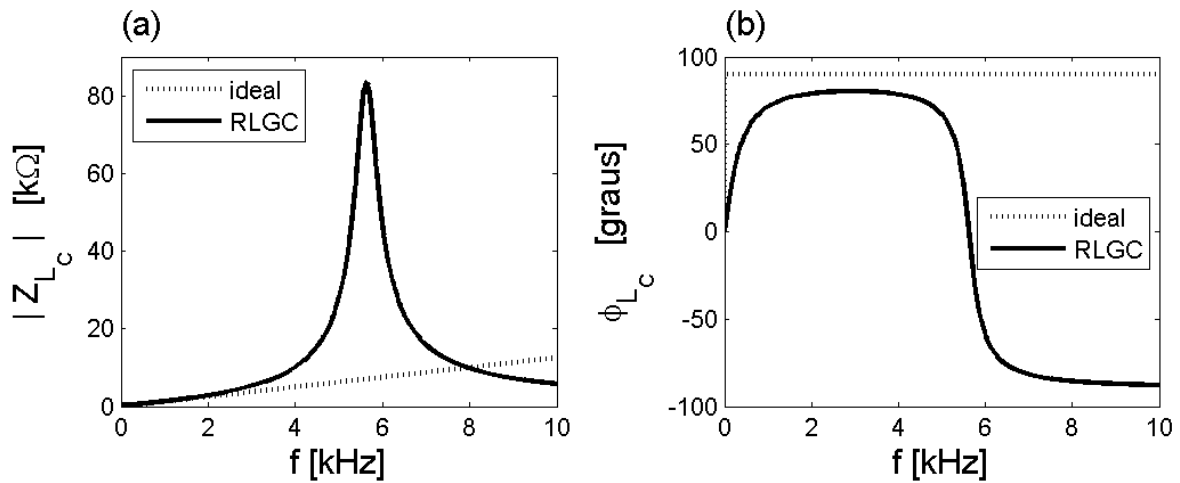


Figura 8 –A impedância (linha contínua) do modelo RLGC é apresentada pelo (a) módulo e (b) fase. As linhas pontilhadas correspondem à impedância do indutor ideal. O modelo RLGC do indutor tem indutância de 200mH, resistência de 400 Ω , capacitância de 4nF e condutância de 4 μ S.

3 – Capacitor

Os capacitores são basicamente formados por dois eletrodos metálicos separados por um material isolante ou dielétrico. Dependendo da geometria e dos materiais utilizados na sua construção podem ser identificados diversos tipos de capacitores como veremos mais adiante.

3.1 – Capacitor ideal

No caso ideal o dielétrico é um isolante perfeito de forma que, quando se ligam os eletrodos de um capacitor a uma fonte de tensão contínua, o fluxo de corrente é nulo. O eletrodo ligado ao polo positivo da fonte se carrega positivamente, enquanto que o outro se carrega negativamente, de forma que a quantidade de carga armazenada em cada eletrodo é a mesma, diferindo só na polaridade. A relação entre a quantidade de carga q que pode ser armazenada no capacitor e a tensão v aplicada pela fonte constitui a capacitância C do capacitor, ou seja,

$$C = \frac{q}{v}. \quad (40)$$

A capacitância é uma constante característica do dispositivo que depende da sua geometria e dos materiais com que ele foi construído.

Se for aplicada uma tensão alternativa, a corrente $i(t)$ fluirá pela sequência de carregamento e descarregamento do capacitor. Nesse caso tem-se

$$i(t) = \frac{d q}{d t}. \quad (41)$$

Na convenção do receptor, ilustrada na figura 9, a relação entre a tensão $v(t)$ e a corrente $i(t)$ no capacitor é dada por

$$i(t) = C \frac{d v(t)}{d t}. \quad (42)$$

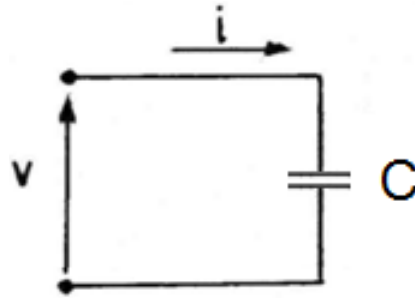


Figura 9 – Capacitor ideal.

Para uma tensão senoidal, tem-se que a impedância do capacitor ideal é dada por

$$Z_C(\omega) = -j \frac{1}{\omega C}. \quad (43)$$

Neste caso, como a impedância do capacitor ideal apresenta dependência inversa com a frequência angular ω . Os cálculos são simplificados se considerarmos a admitância $Y_C(\omega)$, que é o inverso da impedância, ou seja, $1/Z_C(\omega)$. A admitância de um capacitor ideal é dada por

$$Y_C(\omega) = +j\omega C. \quad (44)$$

O módulo e a fase da impedância e da admitância de um capacitor ideal estão ilustrados na figura 10.

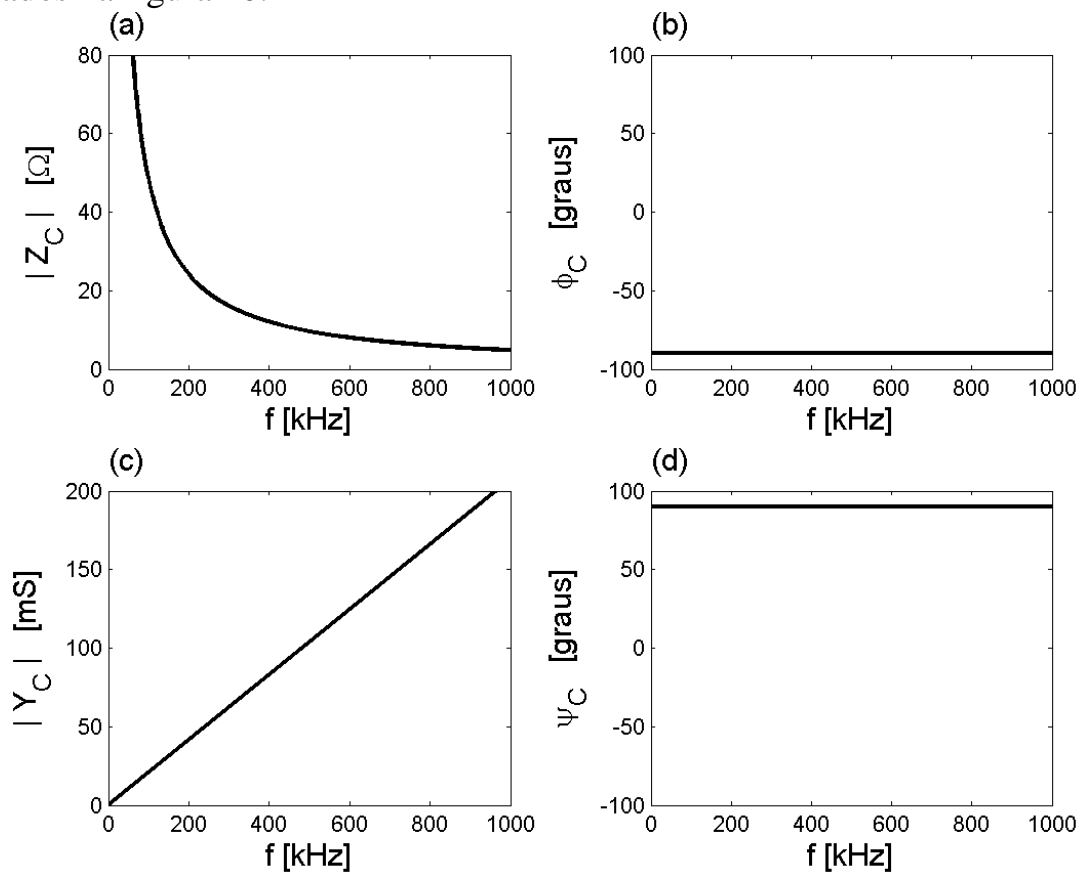


Figura 10 – O capacitor ideal com capacitância constante (33nF) tem impedância com (a) módulo hiperbólico e (b) fase ϕ_C constante e igual a $-\pi/2$ rad; admitância com (c) módulo linear e (d) fase ψ_C igual a $+\pi/2$ rad.

3.2 – Capacitor com perdas

Os capacitores reais não são perfeitos, pois parte da energia que lhes é fornecida é dissipada na forma de calor ou armazenada sob forma magnética. Para representar essas perdas, costuma-se incluir no modelo do capacitor uma resistência de perdas.

A resistência de perdas pode ser considerada em série ou em paralelo com a capacitância, levando aos dois modelos indicados na figura 11.

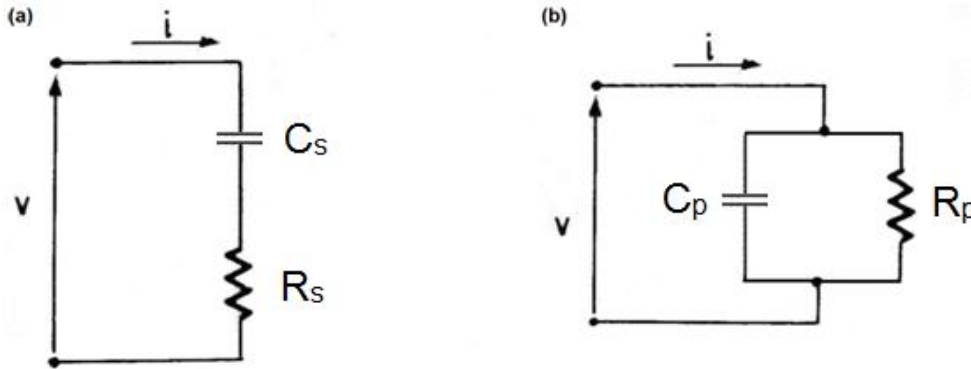


Figura 11 – Capacitor com perdas representado pelos modelos (a) série e (b) paralelo.

Assim para uma frequência fixa ω_0 as resistências e capacitâncias dos modelos série e paralelo são constantes.

A impedância do modelo série é descrita por seu módulo

$$|Z_s(\omega)| = \frac{\sqrt{1 + \omega^2 R_s^2 C_s^2}}{\omega C_s} \quad [\Omega] \quad (45)$$

e por sua fase

$$\phi_s(\omega) = -\arctan\left(\frac{1}{\omega R_s C_s}\right) \quad [\text{rad}], \quad (46)$$

que estão ilustrados na figura 12. Semelhantemente, a associação paralela está ilustrada na figura 13, na qual o módulo é dado por

$$|Z_p(\omega)| = \frac{R_p(\omega)}{\sqrt{1 + \omega^2 R_p^2 C_p^2}} \quad [\Omega]. \quad (47)$$

e a fase por

$$\phi_p(\omega) = -\arctan(\omega R_p C_p) \quad [\text{rad}]. \quad (48)$$

O módulo da admitância série é dado por

$$|Y_s(\omega)| = 1/|Z_s(\omega)| \quad (49)$$

e o módulo da admitância paralela é

$$|Y_p(\omega)| = 1/|Z_p(\omega)|. \quad (50)$$

A fase da admitância série é

$$\psi_s(\omega) = -\phi_s(\omega) \quad [\text{rad}] \quad (51)$$

e semelhantemente a fase da admitância paralela é

$$\psi_p(\omega) = -\phi_p(\omega) \quad [\text{rad}], \quad (52)$$

Observa-se que, com o aumento da frequência, a impedância do modelo série (figura 12) se afasta daquela do capacitor ideal, enquanto que a impedância modelo paralelo (figura 13) se aproxima mais da ideal.

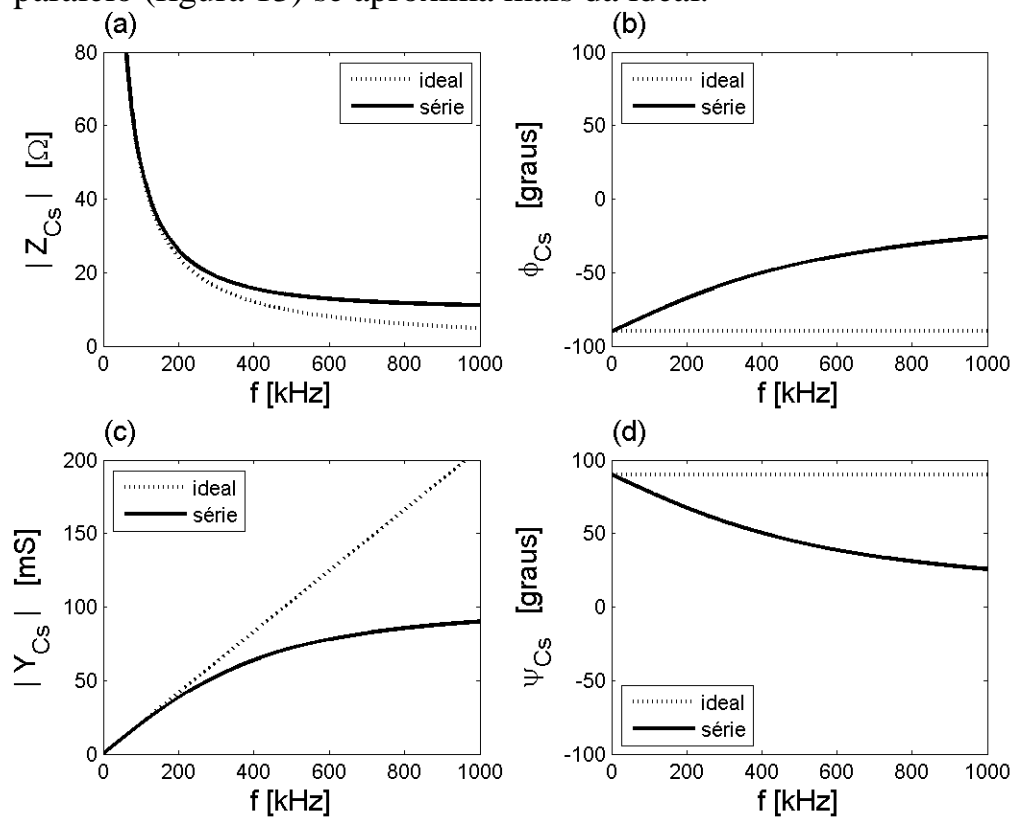


Figura 12 – A impedância do modelo série (linha contínua) é apresentada pelo (a) módulo e (b) fase ϕ e a admitância por seu (c) módulo e (d) fase ψ . O modelo série tem $C_s=33\text{nF}$ e $R_s=10\Omega$.

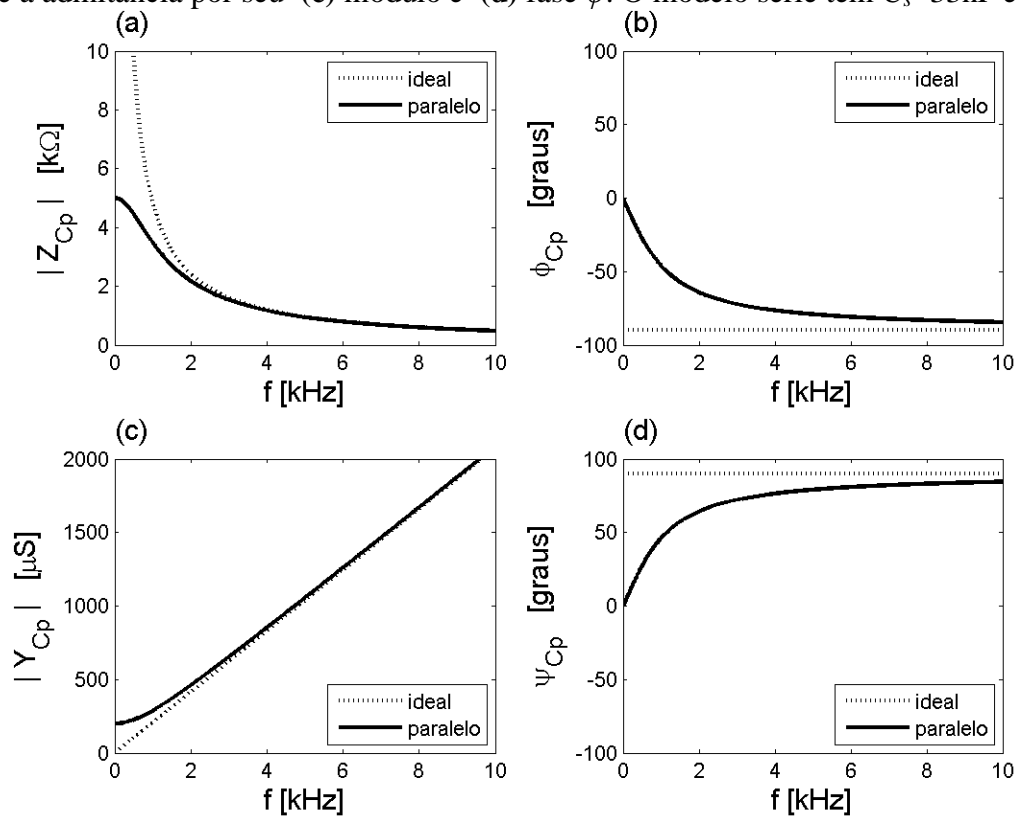


Figura 13 – A impedância do modelo paralelo (linha contínua) é apresentada pelo (a) módulo e (b) fase ϕ e a admitância por seu (c) módulo e (d) fase ψ . O modelo tem $C_p=33\text{nF}$ e $R_p=5\text{k}\Omega$.

3.2.2 – Cálculo dos componentes RC do capacitor com perdas

Para determinar os componentes de cada modelo (ou seja, indutâncias, resistências, capacitâncias e condutâncias) pode-se utilizar o comportamento em regime permanente senoidal do capacitor que se deseja modelar, comparando-o com o comportamento do modelo escolhido. Isto pode ser feito calculando-se a impedância \hat{Z} a partir da divisão fasorial entre a tensão \hat{V} e a corrente \hat{I} medida no capacitor real para diferentes frequências e, em seguida, comparando-se esses valores com os fornecidos por cada modelo.

Por exemplo, para os modelos série e paralelo da figura 11, a impedância do modelo série é dada por

$$Z_s(\omega) = R_s(\omega) - j \frac{1}{\omega C_s(\omega)} \quad (53)$$

e do modelo paralelo por

$$Z_p(\omega) = \left(\frac{R_p(\omega)}{1 + \omega^2 R_p^2(\omega) C_p^2(\omega)} \right) + j \left(\frac{-\omega R_p^2(\omega) C_p(\omega)}{1 + \omega^2 R_p^2(\omega) C_p^2(\omega)} \right). \quad (54)$$

Suponha que, para um capacitor real mediu-se o módulo $|Z(\omega_0)|$ e a fase $\phi(\omega_0)$ da impedância na frequência ω_0 , de tal forma que $Z(\omega_0) = |Z(\omega_0)| e^{j\phi(\omega_0)}$. Para o modelo série, a fase é dada por

$$\phi(\omega_0) = -\arctan(1/(\omega_0 R_s C_s)). \quad (55)$$

e o módulo por

$$|Z(\omega_0)| = \omega_0 C_s / \sqrt{R_s^2 + \omega_0^2 C_s^2}. \quad (56)$$

Para o modelo paralelo, a fase é

$$\phi(\omega_0) = -\arctan(\omega_0 R_p C_p). \quad (57)$$

e o módulo é representado como

$$|Z(\omega_0)| = R_p / \sqrt{1 + \omega_0^2 R_p^2 C_p^2}. \quad (58)$$

Por simplificação de notação, nas fórmulas a seguir, as medidas do módulo e da fase na frequência ω_0 serão representadas por $|Z_0|$ e ϕ_0 . A partir dos valores medidos, podem-se calcular os valores dos componentes do modelo série do capacitor:

$$R_s(\omega_0) = |Z_0| \cos \phi_0 \quad (59)$$

e

$$C_s(\omega_0) = \frac{-1}{|Z_0| \omega_0 \sin \phi_0}; \quad (60)$$

e para o modelo paralelo :

$$R_p(\omega_0) = \frac{|Z_0|}{\cos \phi_0} \quad (61)$$

e

$$C_p(\omega_0) = \frac{-\sin \phi_0}{|Z_0| \omega_0}. \quad (62)$$

Observe que $\text{sen}\phi_0$ é negativo, portanto os valores das capacitâncias são positivos. Note também que de modo geral as capacitâncias são diferentes, ou seja,

$$C_s(\omega_0) \neq C_p(\omega_0). \quad (63)$$

A igualdade entre as capacitâncias série e paralelo ocorre somente no caso ideal, quando a defasagem ϕ_0 entre a tensão e a corrente é exatamente igual a $-\pi/2$ rad. Nesse caso ideal, tem-se a resistência série $R_s(\omega_0)$ nula e a resistência paralela $R_p(\omega_0)$ infinita.

Apesar de os componentes dos modelos série e paralelo se comportarem de forma diferente, ambos os modelos são equivalentes para uma dada frequência fixa ω_0 , os dois representam uma impedância complexa com partes real positiva e imaginária negativa. Assim, na frequência ω_0 , os dois modelos podem ser usados indiferentemente, devendo ser escolhido aquele que torna mais fácil a análise do circuito em estudo.

Por outro lado, se variarmos a frequência, aparecem as diferenças entre o modelo série e paralelo: as curvas do módulo $|Z(\omega)|$ e da fase $\phi(\omega)$ são diferentes para cada modelo, conforme ilustradas nas Figuras 12 e 13.

3.3 – Capacitor com perdas e armazenamento magnético, auto-ressonância

À medida que a frequência aumenta, torna-se necessária a utilização de modelos que incluam uma indutância parasita, especialmente nos capacitores tubulares.

Essa indutância permitirá representar o fenômeno de auto-ressonância, observado na medida de impedâncias de alguns capacitores.

O armazenamento da energia sob forma magnética é considerado pela associação ao capacitor de uma indutância parasita ou residual L_s . Essa indutância, colocada em série num dos modelos anteriores, só tem importância em frequências vizinhas do extremo superior de utilização do capacitor. Basicamente essa indutância provém da geometria cilíndrica de alguns capacitores e para diminuí-la basta escolher uma geometria planar.

A figura 14 ilustra o modelo RCRL composto pela associação paralela da capacitância C_p com a resistência R_p , além da indutância parasita L em série com a resistência R_L .

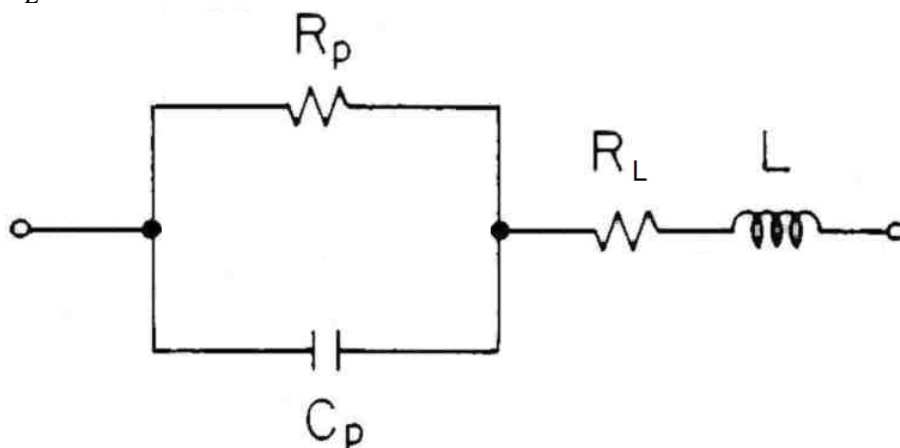


Figura 14 – Modelo RCRL de capacitor

A impedância do modelo RCRL é dada por

$$Z_{C_L}(\omega) = \left(\frac{R_p(\omega)}{1 + \omega^2 R_p^2(\omega) C_p^2(\omega)} + R_L(\omega) \right) + j \left(\frac{-\omega R_p^2(\omega) C_p(\omega)}{1 + \omega^2 R_p^2(\omega) C_p^2(\omega)} + \omega L(\omega) \right). \quad (64)$$

O módulo da impedância é dado por

$$|Z_{C_L}(\omega)| = \sqrt{\left(\frac{R_p}{1 + \omega^2 R_p^2 C_p^2} + R_L \right)^2 + \left(\frac{-\omega R_p^2 C_p}{1 + \omega^2 R_p^2 C_p^2} + \omega L \right)^2} \quad (65)$$

e a fase da impedância é

$$\phi_{C_L}(\omega) = -\arctan \left(\frac{R_p^2 C_p - L(1 + \omega^2 R_p^2 C_p^2)}{R_p + R_L(1 + \omega^2 R_p^2 C_p^2)} \omega \right). \quad (66)$$

A admitância do modelo RCRL é dada por

$$Y_{C_L}(\omega) = 1/Z_{C_L}(\omega). \quad (67)$$

A figura 15 ilustra os módulos e as fases da impedância e da admitância desse modelo.

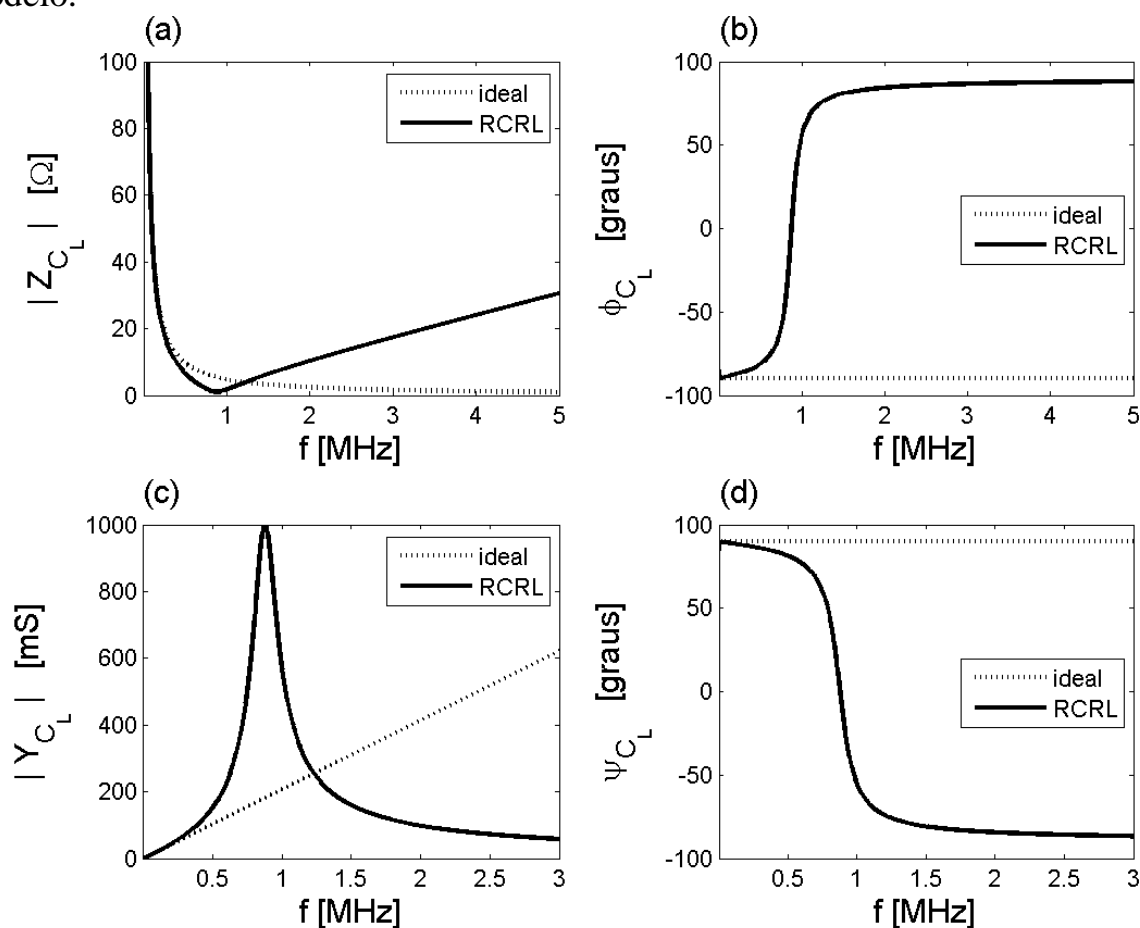


Figura 15 – A impedância do modelo RCRL (linha contínua) é apresentada pelo (a) módulo e (b) fase ϕ ; assim como a admitância por seu (c) módulo e (d) fase ψ . As linhas pontilhadas correspondem ao capacitor ideal. O modelo do capacitor tem capacitância C_p de 33nF, resistência paralela R_p de 100k Ω , indutância parasita L de 1 μ H e resistência série R_L de 1 Ω .

Na figura 15, fica evidente que a frequência de ressonância ω_r corresponde ao mínimo módulo da impedância, ou então, ao máximo módulo da admitância.

3.3.1 – Cálculo dos componentes do modelo RCRL do capacitor com perdas e auto-ressonância

A capacitância C_p e a resistência R_p podem ser calculadas a partir da medida da impedância em frequência baixa, por exemplo $\omega_0=2000\pi$ rad/s, ou seja, $f_0=1$ kHz. É importante que se tome $\omega_0 \ll \omega_r$, em que ω_r corresponde à frequência de ressonância. Nessa condição, considera-se desprezível a influência da indutância parasita L e da resistência série R_L . Portanto, tem-se

$$R_p = \frac{|Z_0|}{\cos \phi_0} \quad (68)$$

e

$$C_p = \frac{-\text{sen} \phi_0}{|Z_0| \omega_0}, \quad (69)$$

em que $|Z_0|$ e ϕ_0 são os valores medidos do módulo e da defasagem na frequência ω_0 .

Em seguida, faz-se uma medida em outra frequência $\omega_1 \cong \omega_r$. Para a realização das medidas $|Z_1|$ e ϕ_1 , pode ser útil considerar que a fase ϕ_1 seja nula em ω_1 . Na frequência ω_1 , tem-se que a impedância do modelo vale

$$Z_1 = \left(\frac{R_p}{1 + \omega_1^2 R_p^2 C_p^2} + R_L \right) + j \left(\frac{-\omega_1 R_p^2 C_p}{1 + \omega_1^2 R_p^2 C_p^2} + \omega_1 L \right). \quad (70)$$

Aqui se supõe que $R_p(\omega_1) = R_p(\omega_0) = R_p$ e que $C_p(\omega_1) = C_p(\omega_0) = C_p$, conforme calculado anteriormente.

Igualando-se a parte real da impedância a $|Z_1| \cos \phi_1$ e a parte imaginária a $|Z_1| \text{sen} \phi_1$, obtêm-se os valores de resistência

$$R_L = |Z_1| \cos \phi_1 - \frac{R_p}{1 + \omega_1^2 R_p^2 C_p^2} \quad (71)$$

e indutância

$$L = \frac{|Z_1| \text{sen} \phi_1}{\omega_1} + \frac{R_p^2 C_p}{1 + \omega_1^2 R_p^2 C_p^2}, \quad (72)$$

em que $|Z_1|$ e ϕ_1 são as medidas do módulo e da fase da impedância na frequência ω_1 . Se a medida de ϕ_1 for exatamente nula, então o valor calculado da indutância parasita L só dependerá da medida de ω_1 e dos valores anteriormente calculados de R_p e C_p , pois a primeira parcela da equação 72 será nula.

Bibliografia

- [1] Luiz de Queiroz Orsini, Denise Consonni, Vitor Heloiz Nascimento, Cinthia Itiki, Inés Pereyra. *Apostila Indutores e Indutâncias*, PSI2315- Laboratório de Eletricidade I, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, edição 2015.
- [2] Luiz de Queiroz Orsini, Denise Consonni. *Curso de Circuitos Elétricos*, 2ª ed., vol.1, São Paulo: Edgard Blücher, 2006.