

## Les 590

Modelos Clássicos de Oligopólio  
Cournot  
Bertrand

Aulas 18, 19 e 20  
Márcia A.F. Dias de Moraes

17\_18/05/2016

## Modelos Estáticos

### Modelos Estáticos:

- Ignoram as implicações das interações repetidas entre firmas ao longo do tempo

Consideram dados (exógenos) estratégias que afetam:

- Demanda (investimentos em propaganda)
- Custos (investimentos em tecnologia)

Pequeno número de firmas

- Competição: decisões sobre
  - Preço
  - Quantidade

Márcia A.F. Dias de Moraes

## Modelos estáticos

Cournot e Bertrand

- Tensão entre *rivalidade* e *cooperação* é resolvida em favor da rivalidade
- Resultado do equilíbrio:
  - Não é resultado de cooperação
    - (Dilema Prisioneiro)
  - Preços e lucros < monopólio
- Modelos dinâmicos
  - Consideram que a interação entre as firmas ao longo do tempo pode propiciar cooperação

Márcia A. F. Dias de Moraes

## Modelo de Cournot

Modelo de Cournot – ótica da Teoria dos Jogos:

- **Jogo estático de informação completa**
  - As firmas competem entre si somente uma vez e tomam as decisões simultaneamente
- Estratégia: decidir quanto cada uma vai produzir, dada a produção (suposta) das demais
- Cada empresa considera o nível de produção do rival fixo, ao tomar sua decisão
- Produtos Homogêneos
- Não existe entrada de outros produtores
- *Equilíbrio de Cournot: Equilíbrio de Nash*

## Jogo de Cournot - Duopólio

- As firmas competem pela **quantidade**
- EN (duopólio): par de estratégias tal que nenhuma firma aumenta seu lucro se desviar unilateralmente, dada a produção de equilíbrio de Nash de sua rival
- Dadas as duas quantidades Cournot (C) de equilíbrio de Nash  $q_1^C$  e  $q_2^C$
- As duas condições devem ser atendidas:

$$\pi_1(q_1^C, q_2^C) \geq \pi_1(q_1, q_2^C) \text{ para qualquer } q_1$$
$$\pi_2(q_1^C, q_2^C) \geq \pi_2(q_1^C, q_2) \text{ para qualquer } q_2$$

Márcia A.F. Dias de Moraes

## Jogo de Cournot - Duopólio

- As quantidades de equilíbrio de Nash  $q_1^C$  e  $q_2^C$  podem ser encontradas usando-se as funções *best response* (curvas de reação) de cada empresa
- A curva de reação da firma 1 dá a escolha maximizadora de lucro da firma 1 para qualquer quantidade produzida pela 2

$$q_1 = R_1(q_2)$$

- Analogamente:  $q_2 = R_2(q_1)$

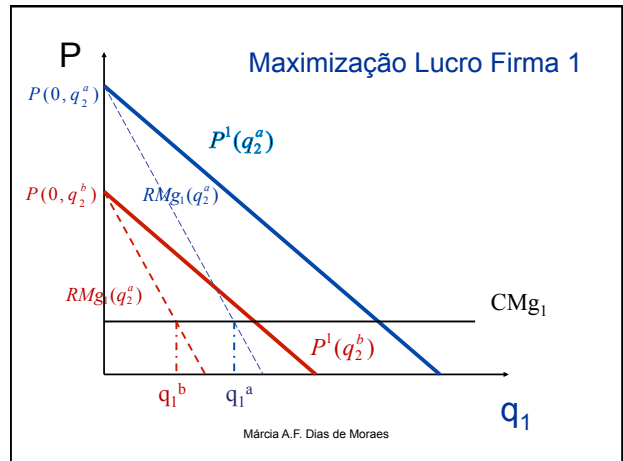
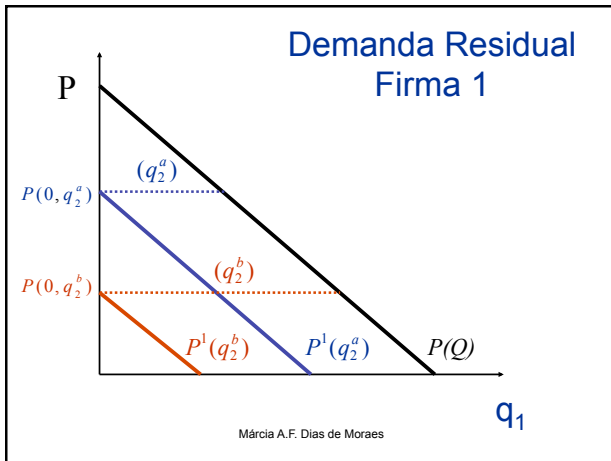
**EN:** quantidades que satisfazem simultaneamente as curvas de reação das duas firmas

$$q_1^C = R_1(q_2^C)$$

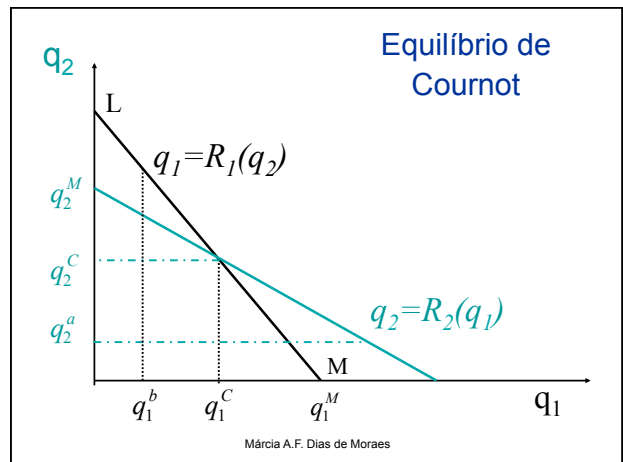
$$q_2^C = R_2(q_1^C)$$

Márcia A.F. Dias de Moraes

Para achar o EN:  
precisa das curvas  
de reação de cada  
empresa



- ### Maximização Lucro Firma 1
- Quanto mais a firma 2 produz:  $q_2^b > q_2^a$
- i. Mais a curva de Demanda Residual da firma 1 se desloca para a esquerda
  - ii. Mais a curva de Receita Marginal da firma 1 (associada à curva de demanda) se desloca para a esquerda
  - iii. A quantidade maximizadora de lucro da firma 1 se reduz
  - iv. O preço máximo possível que a firma 1 pode esperar (onde  $q_1 = 0$ ) se reduz
- Márcia A.F. Dias de Moraes



- ### Funções Best Response Cournot
- A *Curva de Reação* da firma 1 é uma relação entre a produção da firma 2 e a quantidade maximizadora de lucro da firma 1
- Márcia A.F. Dias de Moraes

### Curva de Reação da firma 1

$$\pi_1 = P(q_1 + q_2)q_1 - C(q_1)$$

CPO: achar  $q_1^*$

### Curva de Reação da firma 1

Ex: Equilíbrio de Cournot para 2 firmas

- Custos de produção iguais e dados por:

$$C = cq_i \quad CMg = c$$

- Demanda linear

### Curva de Reação da firma 1

Ex: Equilíbrio de Cournot para 2 firmas

$$CPO: RMg = CMg$$

$$A - bq_2 - 2bq_1 = c$$

$$q_1 = \frac{A - bq_2 - c}{2b}$$

Seguindo os mesmos passos para a firma 2

$$q_2 = \frac{A - bq_1 - c}{2b}$$

Márcia A.F. Dias de Moraes

### Equilíbrio de Cournot para 2 firmas

Equilíbrio: 2 firmas maximizando o lucro, dado o equilíbrio da outra

Resolvendo o sistema:

$$q_1^c = q_2^c = \frac{A - c}{3b}$$

$$Q^c = q_1^c + q_2^c = 2\left(\frac{A - c}{3b}\right)$$

$$\text{Preço: } P^c = A - bQ^c = \frac{A + 2c}{3}$$

$$\text{Lucro: } \pi_1^c = Pq_1^c - cq_1^c = \frac{(A - c)^2}{9b}$$

Márcia A.F. Dias de Moraes

### Curva de Reação da firma 1

A partir da maximização de Lucro da firma 1:  
 $RMg = CMg$

$$\frac{d\pi_1}{dq_1} = \frac{dP(q_1, q_2)}{dq_1} q_1 + P(q_1, q_2) \left( \frac{dq_1}{dq_1} \right) - \frac{dC_1(q_1)}{dq_1} = 0$$

$$\underbrace{\frac{dP(q_1, q_2)}{dq_1} q_1 + P(q_1, q_2)}_{\text{Receita Marginal}} = \underbrace{CMg_1(q_1)}_{\text{Custo Marginal}}$$

Márcia A.F. Dias de Moraes

### Equilíbrio de Cournot: Poder de mercado e eficiência

Max Lucro:  $RMg = CMg$

$$P(q_i^c, q_j^c) + \frac{dP(q_i^c, q_j^c)}{dQ} q_i^c = CM_i(q_i^c)$$

- Rearranjando

- Dividindo ambos os lados por  $P(q_i^c, q_j^c)$

- Multiplicando o lado direito por  $\frac{Q^c}{Q^c}$

Márcia A.F. Dias de Moraes

### Equilíbrio de Cournot: Poder de Mercado e Eficiência

$$\frac{P(q_i^c, q_j^c) - CM_i(q_i^c)}{P(q_i^c, q_j^c)} = - \frac{\frac{dP(q_i^c, q_j^c)}{dQ} q_i^c}{P(q_i^c, q_j^c)} \frac{Q^c}{Q^c}$$

$$\frac{P(q_i^c, q_j^c) - CM_i(q_i^c)}{P(q_i^c, q_j^c)} = - \frac{\frac{dP(q_i^c, q_j^c)}{dQ} Q^c}{P(q_i^c, q_j^c) Q^c} q_i^c$$

$\frac{1}{\epsilon}$

Market Share

Márcia A.F. Dias de Moraes

### EC: Poder de Mercado e Eficiência

$$\frac{P(q_i^c, q_j^c) - CM_i(q_i^c)}{P(q_i^c, q_j^c)} = \frac{s_i}{\varepsilon}$$

- i. O duopolista de Cournot exercerá poder de mercado:  
(Equilíbrio de Cournot:  $P > CMg$  da firma)
- ii. O poder de mercado do duopolista de Cournot é limitado pela elasticidade da demanda  
(quanto  $> \varepsilon$ , menor o mark-up acima do CMg)
- iii. O mark up EC  $<$  mark up monopolista ( $S=1$ )
- iv. Existe relação endógena entre CMg e Market Share  
Firmas com menor CMg terão  $>$  poder mercado  
Firmas mais eficientes serão maiores
- v. Quanto  $>$  nº de competidores,  $<$   $s_i$  e portanto  $<$  mark up

### Jogo de Cournot – N firmas

- N firmas com mesmo custo de produção

$$C_i = cq_i \quad CMg_i = c$$

- Demanda linear  $P(Q) = A - bQ = A - b(\sum q_i)$

- RMg firma i, se espera que os rivais produzam  $\sum q_j$

$$RMg_i \left( q_i, \sum_{j \neq i} q_j \right) = \left( A - b \sum_{j \neq i} q_j \right) - 2bq_i$$

$$CPO: \quad RMg_i = CMg_i$$

$$\left( A - b \sum_{j \neq i} q_j \right) - 2bq_i = c \quad \text{Eq. 1}$$

Márcia A.F. Dias de Moraes

### Jogo de Cournot – N firmas

Para resolver o equilíbrio:

- N equações e N incógnitas
- Dado que as N firmas têm funções de custo iguais e os produtos são homogêneos, o equilíbrio será simétrico:

$$q^c = q_1 = q_2 = q_3 = \dots = q_N$$

Substituindo na equação (1):

$$A - b \sum_{j \neq i} q^c - 2bq^c = c$$

$$A - b(N-1)q^c - 2bq^c = c$$

Márcia A.F. Dias de Moraes

### EC: Poder de Mercado e Eficiência Resolvendo para $q^c$

$$q^c = \frac{A-c}{(N+1)b}$$

$$Q^c = Nq^c = \frac{(A-c)N}{(N+1)b}$$

$$P^c = \frac{A+Nc}{N+1}$$

$$\pi^c = \left( \frac{A-c}{N+1} \right)^2 \left( \frac{1}{b} \right)$$

Márcia A.F. Dias de Moraes

### EC: Poder de Mercado e Eficiência

2 firmas

$$q^c = \frac{A-c}{3b}$$

$$Q^c = Nq^c = \frac{(A-c)2}{(3)b}$$

$$P^c = \frac{A+2c}{3}$$

$$\pi^c = \frac{(A-c)^2}{9b}$$

N Firmas

$$q^c = \frac{A-c}{(N+1)b}$$

$$Q^c = Nq^c = \frac{(A-c)N}{(N+1)b}$$

$$P^c = \frac{A+Nc}{N+1}$$

$$\left( \frac{A-c}{N+1} \right)^2 \left( \frac{1}{b} \right)$$

### EC: Poder de Mercado e Eficiência

N Firmas

$$q^c = \frac{A-c}{(N+1)b}$$

$$Q^c = Nq^c = \frac{(A-c)N}{(N+1)b}$$

$$P^c = \frac{A+Nc}{N+1}$$

Aumentando o número de firmas:  $N \rightarrow \infty$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} q^c = 0 \quad \text{Duopólio: } q^c = \frac{A-c}{3b}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} Q^c = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{A-c}{b} \right) \left( \frac{N}{N+1} \right) = \left( \frac{A-c}{b} \right)$$

$$\text{Duopólio: } \frac{2(A-c)}{3b}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P^c = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a}{N+1} + \frac{Nc}{N+1} = c = p^c$$

Quando o número de firmas cresce:

Reduz produção de cada firma

Quantidade total mercado cresce

Preço de equilíbrio se aproxima do preço da competição perfeita

### EC: Poder de Mercado e Eficiência N firmas

Equilíbrio: cada firma maximiza seu lucro considerando a produção das  $N-1$  rivais

A produção da firma  $i$  no equilíbrio de Nash para o jogo de Cournot para as  $N$  firmas deve satisfazer:

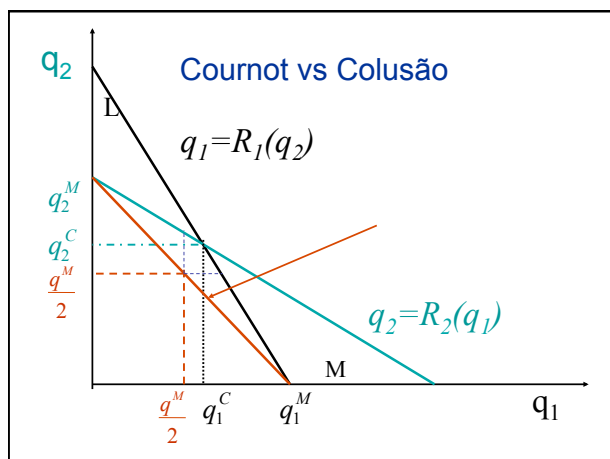
$$\frac{P(q_i^c, q_{-i}^c) - CM_i(q_i^c)}{P(q_i^c, q_{-i}^c)} = \frac{s_i}{\varepsilon}$$

Multiplicando ambos os lados por si e somando ambos os lados para as  $N$  firmas :

$$\sum_{i=1}^N s_i \left( \frac{P^c - CM_i(q_i^c)}{P^c} \right) = \sum_{i=1}^N s_i \left( \frac{s_i}{\varepsilon} \right) = \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^N s_i^2$$

ou

$$\sum_{i=1}^N s_i \left( \frac{P^c - CM_i(q_i^c)}{P^c} \right) = \frac{HHI}{\varepsilon}$$



### Cournot vs Colusão

- Ponto M:
  - não é um ponto da curva reação de nenhuma firma
  - Não é ponto de maximização de lucro de nenhuma firma:
    - qualquer uma delas pode aumentar seu lucro se unilateralmente desviar sua produção
    - Ambas sabem que cada uma tem incentivo de desviar
    - Ambas sabem que a outra sabe que cada uma tem incentivo para desviar ...
- Dilema Prisioneiro:
  - Ambas estariam melhor se combinassem
  - Mas, se combinarem, ambas sabem que cada uma tem incentivo para trair
- Acordo colusão: não é EN

Márcia A.F. Dias de Moraes

### Modelo Bertrand

Crítica de Bertrand ao Modelo de Cournot:

- Resultados dependem da hipótese que firmas competem *em quantidade*

**Bertrand:**

- as firmas escolhem preços e não quantidades
- têm fortes incentivos para retaliar os preços

Jogos estáticos com competição via preços são chamados de *Jogos de Bertrand*

Márcia A.F. Dias de Moraes

### Jogo Bertrand

Regras Jogo Bertrand mais simples:

- Produtos homogêneos
- Firms têm mesmos custos unitários produção =  $c$
- Não há restrição da capacidade
- $Q = D(p)$
- Firms competem em preços, somente 1 jogada
- Tomam as decisões simultaneamente
- Produzem para atender a demanda
- Não há barreira à entrada

**Paradoxo de Bertrand**

- Independentemente do número de firmas, o EN para este jogo:  $P = CMg$

Márcia A.F. Dias de Moraes

### Modelo Bertrand -Duopólio

EN: par de preços  $p_1^B$  e  $p_2^B$  que satisfazem:

$$\pi_1(p_1^B, p_2^B) \geq \pi_1(p_1, p_2^B), \text{ para qualquer } p_1$$

$$\pi_2(p_1^B, p_2^B) \geq \pi_2(p_1^B, p_2), \text{ para qualquer } p_2$$

EN: par de preços que dado o EN de seu rival, não há incentivo para unilateralmente desviar

Márcia A.F. Dias de Moraes

## Modelo Bertrand -Duopólio

Maximização Lucro - Hipóteses

- A demanda pelo produto da firma depende de seu próprio preço e do preço do rival
- Consumidores compram da firma de menor preço
  - Para mesmo preço: demanda se divide

$$D_1(p_1, p_2) = \begin{cases} D(p_1) & \text{se } p_1 < p_2 \\ \frac{1}{2} D(p_1) & \text{se } p_1 = p_2 \\ 0 & \text{se } p_1 > p_2 \end{cases}$$

Márcia A.F. Dias de Moraes

## Modelo Bertrand -Duopólio

4 configurações possíveis:

1.  $p_1 > p_2 > c$  Não é equilíbrio
  - Vendas e lucro firma 1 = 0
  - Incentivo: firma 1 desviar para

## Modelo Bertrand -Duopólio

- 2)  $p_1 > p_2 = c$  Não é equilíbrio Nash
  - Firma 2 teria todo o mercado, mas com lucro zero
  - Firma 2 poderia desviar para:

## Modelo Bertrand -Duopólio

3.  $p_1 = p_2 > c$  Não é equilíbrio de Nash  
Qualquer uma das firmas (ex, firma 1) poderia desviar fixando:

## Modelo Bertrand -Duopólio

4.  $p_1 = p_2 = c$  É Equilíbrio Nash
  - Nenhuma firma pode lucrativamente desviar e ganhar lucros maiores que o do equilíbrio, (apesar deste lucro ser zero)

## Modelo Bertrand -Duopólio

EN para o jogo simples de Bertrand tem dois resultados importantes: Paradoxo Bertrand

Resultado do jogo não é robusto se houver:

- (i) Retornos crescentes à escala
- (ii) Custos unitários constantes, mas diferentes
- (iii) Diferenciação de produtos
- (iv) Limitação capacidade produtiva

## Modelo Bertrand -Duopólio

(i) Retornos crescentes à escala

Suponha que ao custo unitário constante  $c$  soma-se o custo fixo  $f$

Custo:  $c + f$

- Com economias de escala: (e as firmas ofertando menos do que o ponto de ótimo)

Custo Médio > CMg: as duas firmas incorreriam em perdas

-LP: uma das firmas sairia do mercado e o equilíbrio seria o monopólio

-ou somente uma firma entra na indústria e ganha lucros monopólicos (a outra não entraria antecipando que o lucro bruto não cobriria investimentos)

Márcia A.F. Dias de Moraes

## Modelo Bertrand -Duopólio

(ii) Custos unitários diferentes: suponha  $c_1 < c_2$

EN: depende se  $c_2$  é mais alto ou mais baixo que o preço de monopólio da firma 1:  $p^m(c_1)$

Caso a:

- Se  $p^m(c_1) < c_2$  :

A firma 1 fixa o preço de monopólio  $p^m(c_1)$  e monopoliza o mercado

Márcia A.F. Dias de Moraes

## Modelo Bertrand -Duopólio

(ii) Custos unitários diferentes: suponha  $c_1 < c_2$

Caso b:  $p^m(c_1) > c_2$  :

A firma 1 não pode fixar preço de monopólio, pq firma 2 pode retaliar e pegar todo o mercado

EN:  $p_2 = c_2$  e  $p_1 = c_2 - \tau$  com  $\tau$  muito pequeno

- Firma 1 cobra pouco a menos que a 2 e monopoliza o mercado (a 2 não pode reduzir preço pq teria lucro < 0)

- Lucro unitário 1 =  $(c_2 - \tau) - c_1$

- Se a 1 fixa preço =  $c_2$ , reduz vendas e lucros

Márcia A.F. Dias de Moraes

## Modelo Bertrand -Duopólio

(iii) Diferenciação Produto (custos iguais)

- Produtos não são substitutos perfeitos, mas competem entre si

- Quais as implicações sobre o jogo de Bertrand?

Funções demanda para firma 1 e 2:

Firma 1:  $q_1(p_1, p_2)$

Firma 2:  $q_2(p_1, p_2)$

Márcia A.F. Dias de Moraes

## Equilíbrio Bertrand – Diferenciação Produto

### Produtos diferenciados

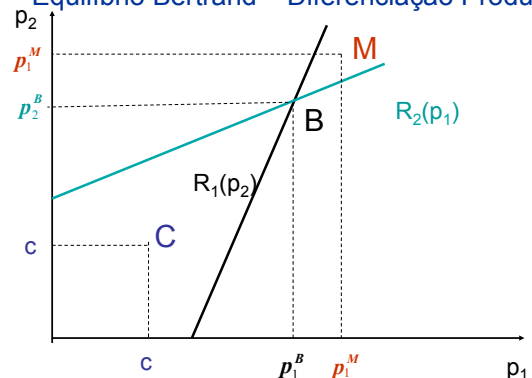
- Firmas não podem retaliar rival via redução de preço e capturar todo o mercado
- Intensidade da competição via preço é reduzida
- EN: ambas exercem poder de mercado ( $p^B > c$ )

$$L_1^B = \frac{p_1 - c}{p_1} = \frac{1}{\epsilon_{11}}$$

$$L_2^B = \frac{p_2 - c}{p_2} = \frac{1}{\epsilon_{22}}$$

Márcia A.F. Dias de Moraes

## Equilíbrio Bertrand – Diferenciação Produto



### Cournot versus Bertrand

Cournot	Bertrand
Firmas competem em quantidade	Firmas competem em preços
EC: EN em quantidades	EC: EN em preços
Firmas tem poder de mercado, que decresce: <ul style="list-style-type: none"> <li>- com nº de firmas</li> <li>- com aumento da elasticidade demanda</li> </ul>	Poder mercado <ul style="list-style-type: none"> <li>• Produtos homogêneos, custos constantes, capacidade ilimitada: NÃO</li> <li>• Produtos diferenciados</li> </ul> Poder mercado depende da elasticidade demanda (sensível ao grau de diferenciação)

Márcia A.F. Dias de Moraes

### Cournot versus Bertrand

Cournot	Bertrand
Colusão: não é EN Dilema Prisoneiro	Colusão: não é EN Dilema Prisoneiro
Se não houver barreira a entrada: EC converge para $P=CMg$	Produtos homogêneos, custos unitários ctes, capacidade ilimitada: $P=CMg$ -Paradoxo Bertrand -Não é robusto se houver diferenciação produto ou limitação capacidade

Márcia A.F. Dias de Moraes

### Cournot versus Bertrand

#### Bens homogêneos e sem restrição de capacidade

Resultado de Bertrand + eficiente que Cournot:

- Produção >
- Preços e lucros menores

Mesmo para produtos diferenciados, o resultado se sustenta se forem substitutos próximos

Márcia A.F. Dias de Moraes