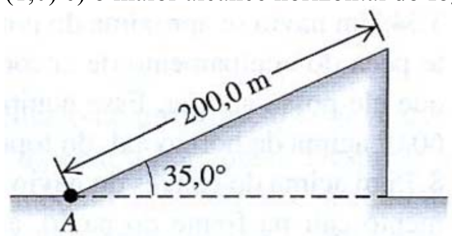
4310192 – Mecânica

Prova P1 – 19/09/2013

Nome:	**N°USP**

1) Um foguete de teste é lançado com aceleração constante ao longo de uma rampa de 200,0 m, a 125 m/s^2, partindo do repouso no ponto *A*. A inclinação da rampa é de 35,0° em relação à horizontal e, no instante em que o foguete parte dela, os motores se apagam e ele fica sujeito somente à gravidade. Determine:
(0,5) a) O módulo da velocidade com que o foguete atinge a borda da rampa.
(1,0) b) A altura máxima em relação ao solo atingida pelo foguete.
(1,0) c) o maior alcance horizontal do foguete passando-se o ponto *A*.



(a) $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2x}{a}} = \sqrt{\frac{2\times 200}{125}} = 1{,}79\,\text{s}$

$$\boxed{v = 0 + at = 125 \times 1{,}79 = 223{,}7\,\text{m/s}}$$

(b) Na altura máxima, v_y=0.

$$v_y = v_0 \sin 35^\circ - 10t = 223{,}7 \times \sin 35^\circ - 10t$$

$$0 = 128{,}3 - 10t \Rightarrow \quad t = \frac{128{,}3}{10} = 12{,}83\,\text{s}$$

$$y = y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2$$

$$\sin 35^\circ = \frac{y_0}{200} \Rightarrow \quad y_0 = 114{,}7\,\text{m}$$

$$\boxed{H = 114{,}7 + 128{,}3 \times 12{,}83 - \frac{10 \times (12{,}83)^2}{2} = 937{,}7\,\text{m}}$$

(c) O maior alcance horizontal ocorre no instante em que o foguete atinge o solo, isto é y=0.

$$\cos 35^{o} = \frac{x_0}{200} \Rightarrow \quad x_0 = 163{,}8\,\mathrm{m}$$

$$0 = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow \; 0 = 114{,}7 + 128{,}3t - 5t^2 \Rightarrow \; 5t^2 - 128{,}3t - 114{,}7 = 0$$

$$\Delta = 128{,}3^2 - 4\times 5\times\left(-114{,}7\right) = 18754{,}9$$

$$t = \frac{128{,}3 \pm \sqrt{18754{,}9}}{2\times 5}$$

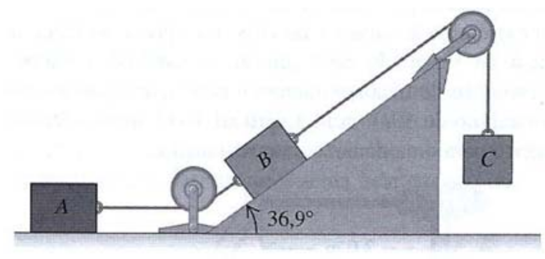
$$t_1 = 26{,}5\,\mathrm{s}$$

$t_2 = -0.86\,\mathrm{s}$ (Não serve)

Calculando o alcance máximo:

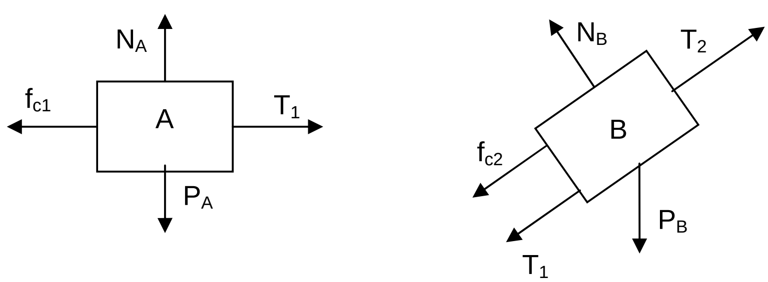
$$\boxed{x = x_0 + v_{0x}t = 163{,}8 + 223{,}7\cos 35^{o} \times 26{,}5 = 5018{,}6\,\mathrm{m}}$$

2) Os blocos *A*, *B* e *C* são dispostos como indicado na figura abaixo, e ligados por cordas de massas desprezíveis. O peso de *A* é de 25,0 N e o peso de *B* também é de 25,0 N. O coeficiente de atrito cinético entre cada bloco e a superfície é igual a 0,35. O bloco *C* desce com velocidade constante.



(1,0) a) Desenhe dois diagramas do corpo livre separados mostrando as forças que atuam sobre *A* e sobre *B*.
(0,5) b) Ache a tensão na corda que liga o bloco *A* ao bloco *B*.
(0.5) c) Qual é o peso do bloco *C*.
(0.5) d) Se a corda que liga o bloco *A* ao bloco *B* fosse cortada, qual seria a aceleração do bloco *C*.

(a)



(b) No bloco A:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_A = P_a = 25\,\mathrm{N}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow T_1 - \mu_c N_A = 0 \Rightarrow \quad T_1 = 0,35 \times 25$$

$$\boxed{T_1 = 8,75\,\mathrm{N}}$$

(c) No Bloco B:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \quad N_B - P_B \cos 36.9^{\circ} = 0 \Rightarrow N_B = 25\ \cos 36.9^{\circ}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \quad T_2 - P_B \sin 36.9^{\circ} - \mu_c N_B - T_1 = 0 \Rightarrow \quad T_2 - 25\ \sin 36.9^{\circ} - \mu_c 25 \cos 36.9^{\circ} - T_1 = 0 \qquad \text{(I)}$$

No Bloco C: $\sum F_y = 0 \Rightarrow \quad T_2 = P_C$

Substituindo T_2 e T_1 em (I):

$$P_C - 15{,}01 - 0{,}35 \times 25 \cos 36.9^{\circ} - 8{,}75 = 0$$

$$\boxed{P_C = 30.76\,\mathrm{N}}$$

(d) Quando a corda que liga os blocos A e B se rompe, temos:

No Bloco C:

$$P_C - T_2 = m_C a \Rightarrow \quad 30{,}76 - T_2 = \frac{30{,}76}{10} a \qquad \text{(II)}$$

No bloco B:

$$T_2 - P_B \sin 36.9^{\circ} - \mu_c P_B \cos 36.9^{\circ} = m_B a \qquad \text{(III)}$$

Somando membro a membro as equações (II) e (III), temos:

$$30.76 - 25 \sin 36.9^{\circ} - 0{,}35 \times 25 \cos 36.9^{\circ} = (3{,}076 + 2{,}5)\, a$$

30,76-15,01-6,997=5,576 *a*

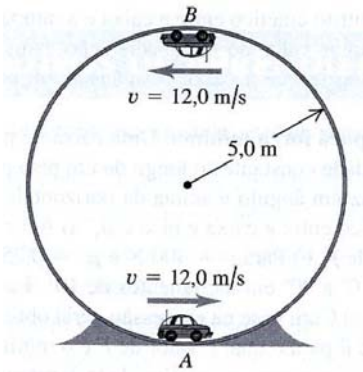
$$\boxed{a = \frac{8{,}753}{5{,}576} = 1{,}57\,\mathrm{m/s^2}}$$

3) Um pequeno carro guiado por controle remoto possui massa de 1,60 Kg e se move com velocidade constante v=12,0 m/s em um círculo vertical no interior de um círculo metálico oco de raio igual a 5,0 m.

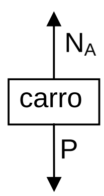
(1,0) a) Qual é a normal exercida pela parede do cilindro sobre o carro no ponto A.

(1,0) b) Qual é a normal exercida pela parede do cilindro sobre o carro no ponto B.

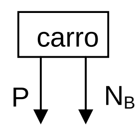
(0,5) c) Qual é a velocidade constante mínima necessária para o carrinho completar a volta sem cair.



Em A:



Em B:



(a) Em A: $N_A - P = m\dfrac{v^2}{R}$

$$\boxed{N_A = \frac{1{,}6\times 12^2}{5} + 1{,}6\times 10 = 62{,}08\,\mathrm{N}}$$

b) Em B: $P + N_B = m\dfrac{v^2}{R}$ (I)

$$\boxed{N_B = \frac{1{,}6\times 12^2}{5} - 1{,}6\times 10 = 30{,}08\,\mathrm{N}}$$

(c) A velocidade mínima é quando N_B=0

Neste caso, substituindo na equação (I):

$$mg = m\frac{v^2}{R} \Rightarrow \quad v = \sqrt{Rg}$$

$$v = \sqrt{5\times 10} = 7{,}07\,\mathrm{m/s}$$

4) Um pássaro voa em um plano *xy* com um vetor velocidade dado por $\vec{v}(t) = (\alpha - \beta t^2)\vec{i} + \gamma t\,\vec{j}$, sendo α=2,4 m/s, β=1,6 m/s^3 e γ=4,0 m/s^2. O sentido positivo do eixo vertical *Oy* é orientado de baixo para cima. Em *t*=0, o pássaro está na origem.
(1,0) Determine o vetor posição e o vetor aceleração do pássaro em função do tempo.
(0,5) Qual é o vetor velocidade média do pássaro e seu módulo entre *t*=0 e *t*=5 s.
(1,0) Qual é a altura do pássaro (coordenada *y*) quando ele voa sobre *x*=0 pela primeira vez depois de *t*=0.

(a) O vetor posição é a integral do vetor velocidade com a condição inicial:

$\vec{r}(0) = 0\vec{i} + 0\vec{j}$

Portanto: $\vec{r}(t) = \left(\alpha t - \dfrac{\beta t^2}{3}\right)\vec{i} + \dfrac{\gamma t^2}{2}\vec{j} = \left(2{,}4t - \dfrac{1{,}6t^3}{3}\right)\vec{i} + 2t^2$

$$\boxed{\vec{r}(t) = (2{,}4t - 0{,}533t^3)\vec{i} + 2t^2}$$

A aceleração é a derivada da velocidade.

$$\boxed{\vec{a}(t) = -2\beta t\vec{i} + \gamma\vec{j} = -3{,}2t\,\vec{i} + 4\,\vec{j}}$$

(b) $\vec{v}_m = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \dfrac{\vec{r}(5) - \vec{r}(0)}{5-0} = \dfrac{(12 - 66{,}6)\vec{i} + 50\vec{j} - 0\vec{i} - 0\vec{j}}{5}$

$$\boxed{\vec{v}_m = -10{,}9\vec{i} + 10\,\vec{j}}$$

$$\boxed{|\vec{v}_m| = \sqrt{10{,}9^2 + 10^2} = 14{,}8\,\text{m/s}}$$

(c) Quando x=0, temos: $\alpha t - \dfrac{\beta t^3}{3} = 0 \Rightarrow \quad t\left(\alpha - \dfrac{\beta t^2}{3}\right) = 0$

As soluções da equação acima: *t*=0

$$t = \sqrt{\frac{3\alpha}{\beta}} = \sqrt{\frac{3\times 2{,}4}{1{,}6}} = \sqrt{4{,}5}\ \text{s}$$

Quando o passáro sobrevôa *x*=0, pela primeira vez depois de *t*=0 é em $t = \sqrt{4{,}5}$ s.

A coordenada y é dada por:

$$y = \frac{\gamma t^2}{2} = 2t^2$$

$$\boxed{y = 2\times 4{,}5 = 9{,}0\,\text{m}}$$

Formulário

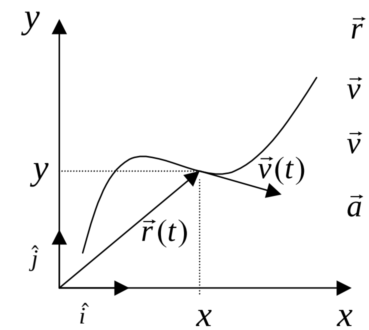
Quando necessário utilize g=10 m/s²

Cinemática Unidimensional =>

$$\begin{array}{ccccc} & \xrightarrow{d/dt} & & \xrightarrow{d/dt} & \\ x(t) & \Leftrightarrow & v(t) & \Leftrightarrow & a(t) \\ & \int + x_0 & & \int + v_0 & \end{array}$$

MRUV => $x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ (x_0 *e* v_0 - condições iniciais)

$v(t) = v_0 + at$ (a=constante) $v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$ Torricelli

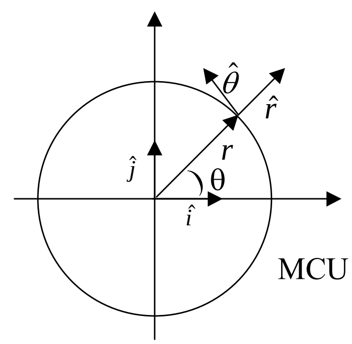


$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j}$$

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j}$$



$$\vec{r} = r\hat{r}$$

$$\vec{v} = v\hat{\theta}$$

$$\vec{a} = a_r\hat{r} + a_t\hat{\theta}$$

$$a_r = \frac{-v^2}{r} \quad a_t = \frac{dv}{dt}$$

MCU - movimento periódico

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \omega = \frac{v}{r}$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \alpha r$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

Dinâmica: $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$, *onde* $\vec{F}_{ext} = \sum_i \vec{F}_{i,ext}$

$$F_c = m\frac{v^2}{R}$$

$$F_{atrito} = \mu N$$