CIRCUITOS ELÉTRICOS

APLICAÇÕES DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DA FORMA

$$x''(t) + 2\alpha x'(t) + \omega_0^2 x(t) = x_s(t)$$

Prof. Flávio A. M. Cipparrone

Escola Politécnica da USP

Teoria

Para resolver a equação diferencial $x''(t) + 2\alpha x'(t) + \omega_0^2 x(t) = x_s(t)$, começamos escrevendo a equação característica $s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0$, cujas raízes fornecem as frequências complexas próprias do sistema:

$$s_{1,2} \triangleq -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \qquad (1.1)$$

Podemos distinguir dois casos, no que tange à forma da solução *x(t)*:

1. $s_1 \neq s_2$ quando $x(t) = X_1 e^{s_1 t} + X_2 e^{s_2 t} + x_p(t)$

2. $s_1 = s_2$ quando $x(t) = X_1 e^{s_1 t} + X_2 t e^{s_1 t} + x_p(t)$

onde $x_p(t)$ é uma solução particular da equação completa.

Nos casos de interesse prático, normalmente $\alpha > 0$ de modo que os dois primeiros termos de *x(t)* são transitórios (decaem a 0) e $x_p(t)$ é então a resposta permanente do sistema.

Além disto determina-se $x_p(t)$ de forma independente destes dois primeiros termos. Por exemplo, se $x_s(t)$ for senoidal, $x_p(t)$ é a solução obtida por fasores, considerando o regime permanente senoidal.

Sendo assim, vejamos como deduzir a solução no caso de $s_1 \neq s_2$. Escrevendo

$$x(t) = X_1 e^{s_1 t} + X_2 e^{s_2 t} + x_p(t) \qquad (1.2)$$

torna-se necessário determinar as constantes X_1 e X_2. Para isto, escreveremos um sistema de equações em função das condições iniciais $x(0)$ e $x'(0)$, as quais deverão ser obtidas das equações do sistema em análise. Então:

$$x'(t) = s_1 X_1 e^{s_1 t} + s_2 X_2 e^{s_2 t} + x_p'(t) \qquad (1.3)$$

e o sistema fica:

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 + x_p(0) &= x(0) \\ s_1 X_1 + s_2 X_2 + x_p'(0) &= x'(0) \end{aligned} \qquad (1.4)$$

Escrevendo em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ s_1 & s_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(0) - x_p(0) \\ x'(0) - x_p'(0) \end{bmatrix} \qquad (1.5)$$

Definindo:

$$\begin{aligned} a &\triangleq x(0) - x_p(0) \\ b &\triangleq x'(0) - x_p'(0) \end{aligned} \qquad (1.6)$$

e lembrando que a inversa de uma matriz 2 x 2 pode ser escrita como

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \qquad (1.7)$$

podemos resolver o sistema (1.5) escrevendo:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{s_2 - s_1} \begin{bmatrix} s_2 & -1 \\ -s_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \frac{1}{s_2 - s_1} \begin{bmatrix} s_2 a - b \\ -s_1 a + b \end{bmatrix} \qquad (1.8)$$

Então, sendo $s_1 \neq s_2$, a solução geral pode ser escrita como:

$$x(t) = \frac{s_2 a - b}{s_2 - s_1} e^{s_1 t} + \frac{-s_1 a + b}{s_2 - s_1} e^{s_2 t} + x_p(t) \qquad (1.9)$$

Caso $s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$ sejam reais (superamortecimento) podemos dizer que o problema está resolvido, mas caso sejam complexos conjugados, deveremos ainda desenvolver (1.9) um pouco mais de forma a obter *x(t)* como uma função real, que é o que devemos esperar.

Entretanto, podemos prosseguir o desenvolvimento no caso superamortecido definindo $\beta \triangleq \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$ de forma que $s_{1,2} = -\alpha \pm \beta$.

Então temos:

$$x(t) = \frac{(-\alpha-\beta)a-b}{(-\alpha-\beta)-(-\alpha+\beta)} e^{(-\alpha+\beta)t} + \frac{-(-\alpha+\beta)a+b}{(-\alpha-\beta)-(-\alpha+\beta)} e^{(-\alpha-\beta)t} + x_p(t) \text{ ou}$$

$$x(t) = e^{-\alpha t}\left[\frac{-(\alpha a+b)-\beta a}{-2\beta} e^{\beta t} + \frac{(\alpha a+b)-\beta a}{-2\beta} e^{-\beta t}\right] + x_p(t) \text{ ou}$$

$$x(t) = e^{-\alpha t}\left[\frac{(\alpha a+b)+\beta a}{2\beta} e^{\beta t} + \frac{-(\alpha a+b)+\beta a}{2\beta} e^{-\beta t}\right] + x_p(t) \text{ ou}$$

$$x(t) = e^{-\alpha t}\left[\frac{(\alpha a+b)}{\beta}\sinh(\beta t) + a\cosh(\beta t)\right] + x_p(t)$$

Já se $s_{1,2}$ forem complexos conjugados (subamortecimento), e definindo

$$\omega_d \equiv \sqrt{\omega_0^2-\alpha^2} \text{ fica: } s_1 = -\alpha + j\omega_d \text{ e } s_2 = -\alpha - j\omega_d \qquad (1.10)$$

Calculando X_1 e X_2 por (1.8) com os $s_{1,2}$ dados por (1.10), chega-se à conclusão de que X_1 e X_2 são complexos conjugados. Denotando o conjugado de um complexo z por z' pode-se mostrar que $(e^{zt})' = e^{z't}$ [decorre de $e^{a+jb} = e^a(\cos b + j\sin b)$] e que $(z_1 z_2)' = z_1' z_2'$. Disto resulta que $X_1 e^{s_1 t}$ e $X_2 e^{s_2 t}$ são conjugados e portanto, podemos escrever (1.9) neste caso como:

$$x(t) = 2\,\mathrm{Re}\left[\frac{(-\alpha-j\omega_d)a-b}{-2j\omega_d} e^{(-\alpha+j\omega_d)t}\right] + x_p(t) = \mathrm{Re}\left\{\left[a - j\left(\frac{\alpha a}{\omega_d}+\frac{b}{\omega_d}\right)\right] e^{-\alpha t}\left(\cos\omega_d t + j\sin\omega_d t\right)\right\} + x_p(t)$$

ou seja:

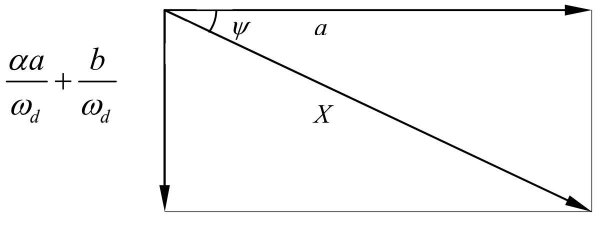
$$x(t) = e^{-\alpha t}\left[a\cos\omega_d t + \left(\frac{\alpha a}{\omega_d}+\frac{b}{\omega_d}\right)\sin\omega_d t\right] + x_p(t) \qquad (1.11)$$

Podemos escrever *x(t)* acima também na forma:

$$x(t) = Xe^{-\alpha t}\cos(\omega_d t + \psi) + x_p(t) \qquad (1.12)$$

Para isto lembre que $\sin\omega_d t = \cos(\omega_d t - 90^\circ)$ e que podemos somar duas co-senóides de mesma frequência empregando fasores.

Então, conforme o diagrama abaixo:



A maneira mais cômoda de concluir este cálculo consiste em inserir na calculadora o fasor que corresponde à cossenóide (sem o amortecimento)

$$\hat{X} = a - j\left(\frac{\alpha a}{\omega_d} + \frac{b}{\omega_d}\right) \qquad (1.13)$$

e realizar a conversão para a forma polar, obtendo X e ψ. No entanto, se desejarmos uma expressão explícita para o cálculo, obtém-se:

$$\begin{aligned} X &= \sqrt{a^2 + \left(\frac{\alpha a}{\omega_d} + \frac{b}{\omega_d}\right)^2} \\ \psi &= \operatorname{atan2}\left(-\left(\frac{\alpha a}{\omega_d} + \frac{b}{\omega_d}\right), a\right) \end{aligned} \qquad (1.14)$$

Lembre que atan2 é a função arco-tangente modificada, onde temos dois argumentos (a projeção y e a projeção x nesta ordem), de modo que esta função retorna o ângulo no quadrante correto. O mesmo não se pode dizer da função atan (arco-tangente comumente utilizado).

Para encerrar, devemos deduzir o caso onde $s_1 = s_2 = -\alpha$ (amortecimento crítico)

$$x(t) = X_1 e^{-\alpha t} + X_2 t e^{-\alpha t} + x_p(t) \qquad (1.15)$$

$$x'(t) = -\alpha X_1 e^{-\alpha t} + X_2 e^{-\alpha t} - \alpha X_2 t e^{-\alpha t} + x_p'(t) \qquad (1.16)$$

Impondo *t=0*, vem:

$$\begin{aligned} X_1 + x_p(0) &= x(0) \\ -\alpha X_1 + X_2 + x_p'(0) &= x'(0) \end{aligned} \qquad (1.17)$$

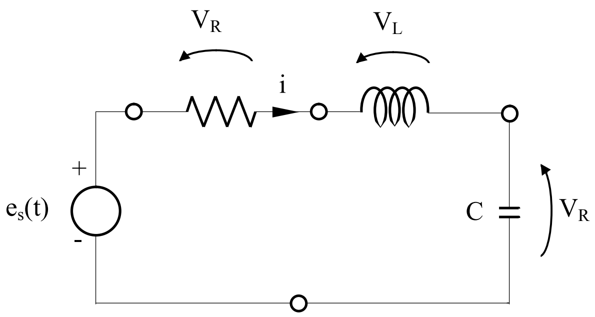
Portanto:

$$\begin{aligned} X_1 &= x(0) - x_p(0) = a \\ X_2 &= x'(0) - x_p'(0) + \alpha X_1 = b + \alpha a \end{aligned} \qquad (1.18)$$

$$x(t) = a e^{-\alpha t} + (b + \alpha a) t e^{-\alpha t} + x_p(t) \qquad (1.19)$$

Exemplos

RLC série



Se aplicarmos a 2ª lei de Kirchoff ao circuito acima obteremos a equação:

$$L\frac{di}{dt}(t) + Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\lambda)d\lambda + v_0 = e_s(t) \qquad t \geq 0 \quad (1.20)$$

Derivando novamente em relação ao tempo e dividindo tudo por L, vem:

$$\frac{d^2i}{dt^2}(t) + \frac{R}{L}\frac{di}{dt}(t) + \frac{1}{LC}i(t) = \frac{1}{L}\frac{de_s}{dt}(t) \qquad (1.21)$$

Definindo $\alpha \equiv \frac{R}{2L}$ e $\omega_0^2 \equiv \frac{1}{LC}$ conseguimos obter a forma de equação diferencial para a qual deduzimos a solução.

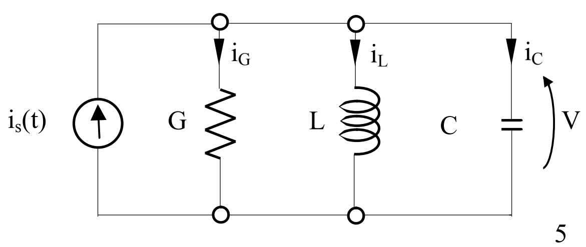
Falta determinar *i(0)* e *di/dt(0),* que são usados em nossa solução. Ora, *i(0)* é o próprio i_0 do indutor. Já *di/dt(0)* pode ser obtido da equação (1.20) , visto que:

$L\frac{di}{dt}(0) + Ri(0) + v_0 = e_s(0)$ e portanto:

$$\frac{di}{dt}(0) = \frac{e_s(0) - v_0 - Ri_0}{L}$$

Daí, é so aplicar as fórmulas que deduzimos. Analogamente, temos para o RLC paralelo:

RLC paralelo



Se aplicarmos a 1ª lei de Kirchoff ao circuito acima obteremos a equação:

$$C\frac{dv}{dt}(t)+Gv(t)+\frac{1}{L}\int_0^t v(\lambda)d\lambda+i_0=i_s(t) \qquad t\geq 0 \quad (1.22)$$

Derivando novamente em relação ao tempo e dividindo tudo por L, vem:

$$\frac{d^2v}{dt^2}(t)+\frac{G}{C}\frac{dv}{dt}(t)+\frac{1}{LC}v(t)=\frac{1}{C}\frac{di_s}{dt}(t) \qquad (1.23)$$

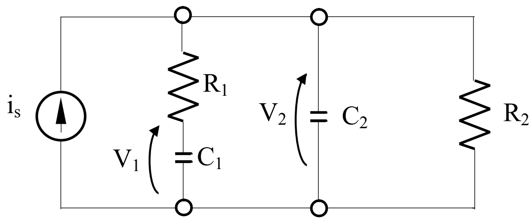
Definindo $\alpha\equiv\frac{G}{2C}$ e $\omega_0^2\equiv\frac{1}{LC}$ conseguimos obter a forma de equação diferencial para a qual deduzimos a solução.

Falta determinar *v(0)* e *dv/dt(0),* que são usados em nossa solução. Ora, *v(0)* é o próprio v_0 do capacitor. Já *dv/dt(0)* pode ser obtido da equação (1.20) , visto que:

$C\frac{dv}{dt}(0)+Gv(0)+i_0=i_s(0)$ e portanto:

$$\frac{dv}{dt}(0)=\frac{i_s(0)-i_0-Gv_0}{C}$$

RCC de segunda ordem



Podemos escrever:

$$C_1\dot{v}_1=\frac{v_2-v_1}{R_1} \qquad (1.24)$$

$$C_2\dot{v}_2=\frac{v_1-v_2}{R_1}-\frac{v_2}{R_2}+i_s \qquad (1.25)$$

Isolando v_2 da (1.24) e substituindo em (1.25), obtém-se:

$$\ddot{v}_1 + \left(\frac{1}{R_1C_1} + \frac{1}{R_2C_2} + \frac{1}{R_1C_2}\right)\dot{v}_1 + \frac{1}{R_1C_1R_2C_2}v_1 = \frac{i_s}{R_1C_1C_2} \qquad (1.26)$$

Portanto:

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1C_1} + \frac{1}{R_2C_2} + \frac{1}{R_1C_2}\right)$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{R_1C_1R_2C_2}$$

Já $v_1(0) = v_{10}$ (que é a tensão inicial no capacitor C_1) enquanto que $\dot{v}_1(0)$ pode ser determinada a partir de (1.24) como:

$$\dot{v}_1(0) = \frac{v_{20} - v_{10}}{R_1C_1}$$

A partir daí, é só aplicar as fórmulas que deduzimos na seção teórica.

Dicas:

1) Para achar por exemplo $dv/dt(0)$, pergunte: Onde existe tal termo?

A resposta será: **na corrente do capacitor** $i(t) = Cdv/dt$.

Então "fotografe" o circuito em t=0 e resolva esta corrente.

2) Para determinar α e ω_0 pode-se trabalhar com o circuito com os geradores independentes inativados, já que estes geradores só contribuem para o lado direito da equação diferencial. Muitas vezes, nem é necessário escrever a equação diferencial visto que o circuito se reduz a um RLC série ou a um RLC paralelo.