

# Propagação de Incertezas

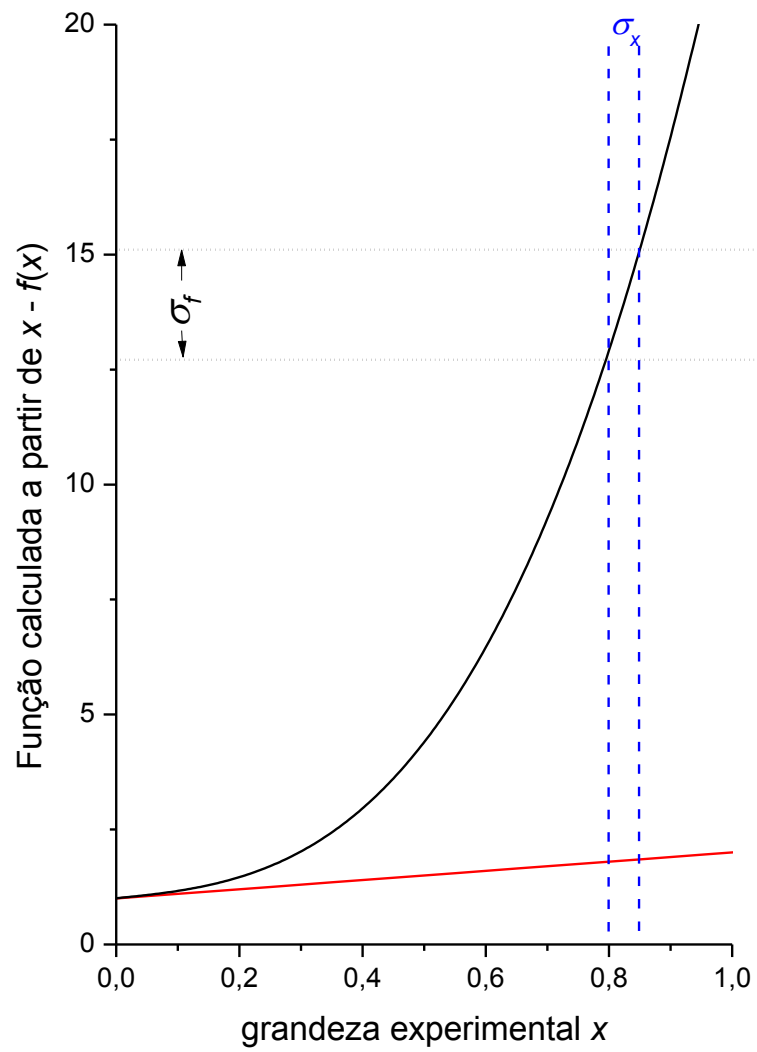
Exemplos de Laboratório de  
Eletromagnetismo - 2013

# Regra básica para propagação quadrática

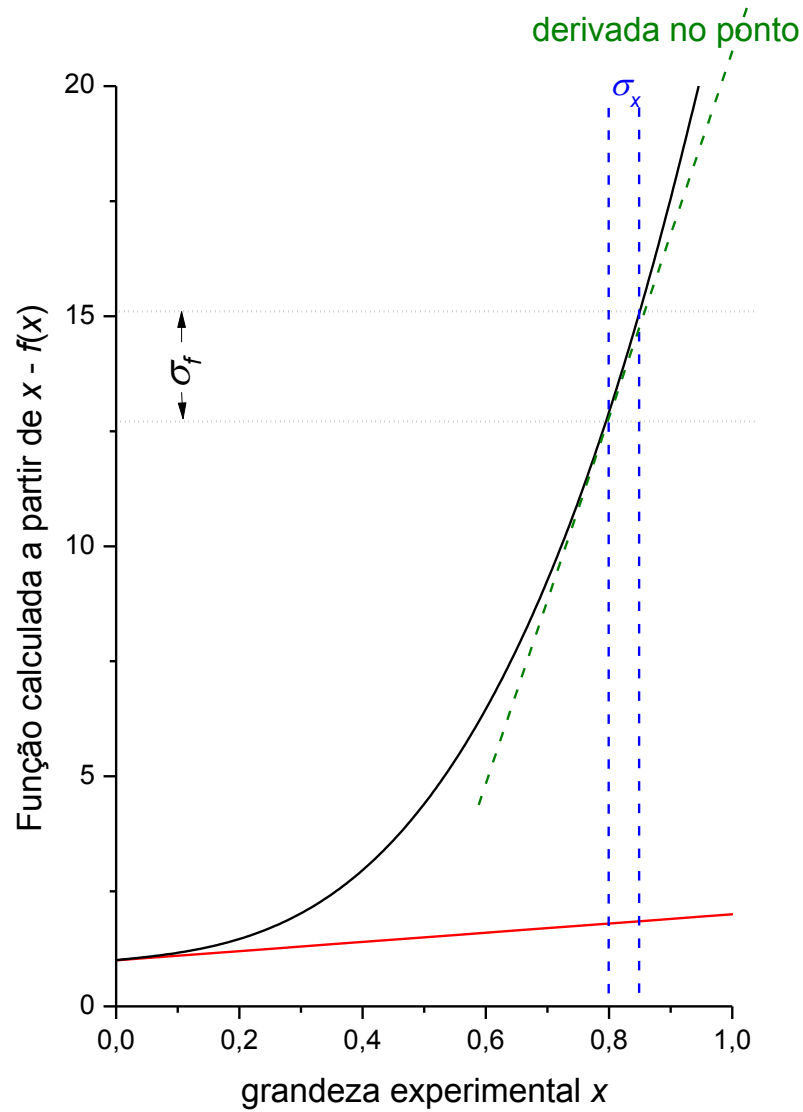
- Se uma grandeza  $f$  é obtida de grandezas experimentais  $x, y, z...$  independentes e cujas incertezas são  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z...$ , então a incerteza em  $f$  ( $\sigma_f$ ) é dada por:

$$f = f(x, y) \Rightarrow \sigma_f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 (\sigma_x)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 (\sigma_y)^2}$$

- Aproximação em primeira ordem (derivadas de ordem superior desprezadas)



# Por que???



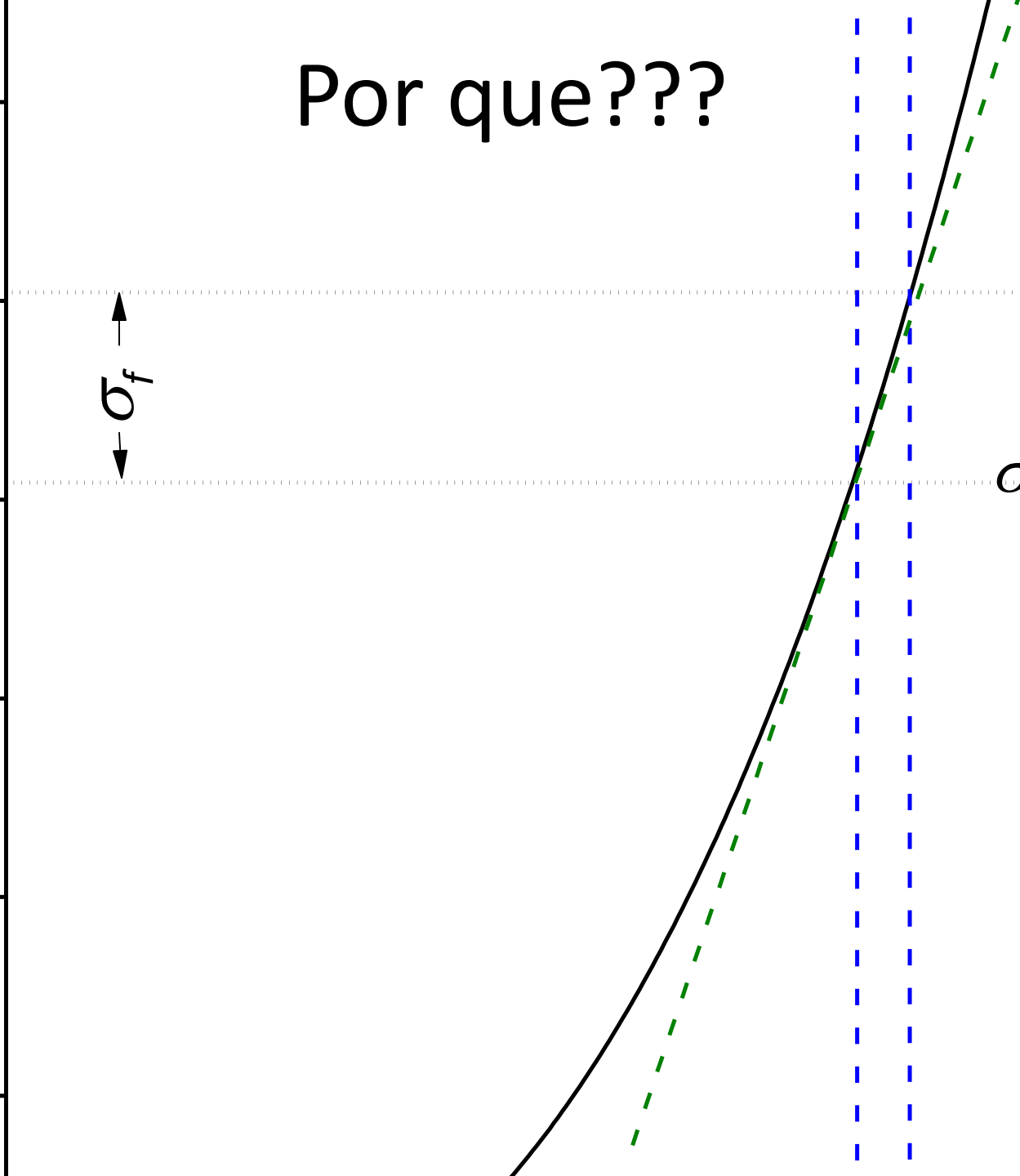
Função calculada a partir de  $x - f(x)$

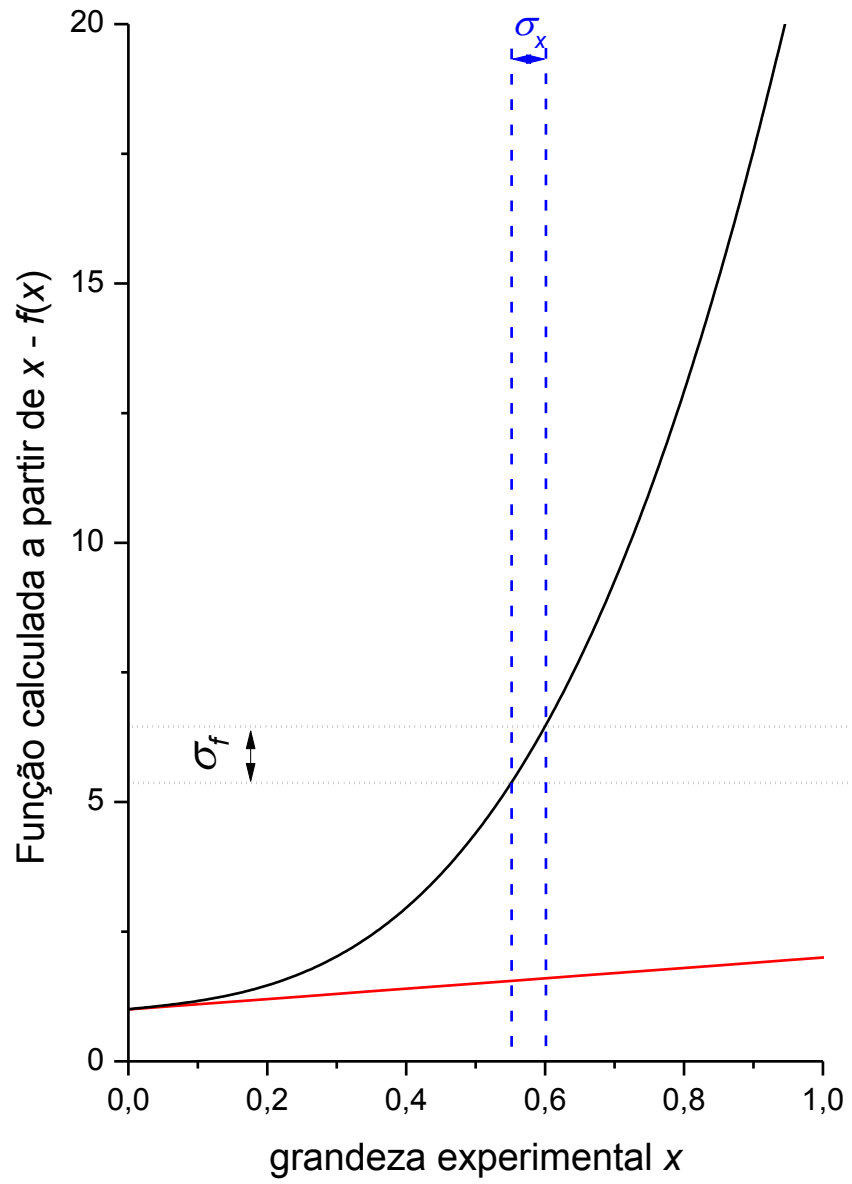
5  
10  
15

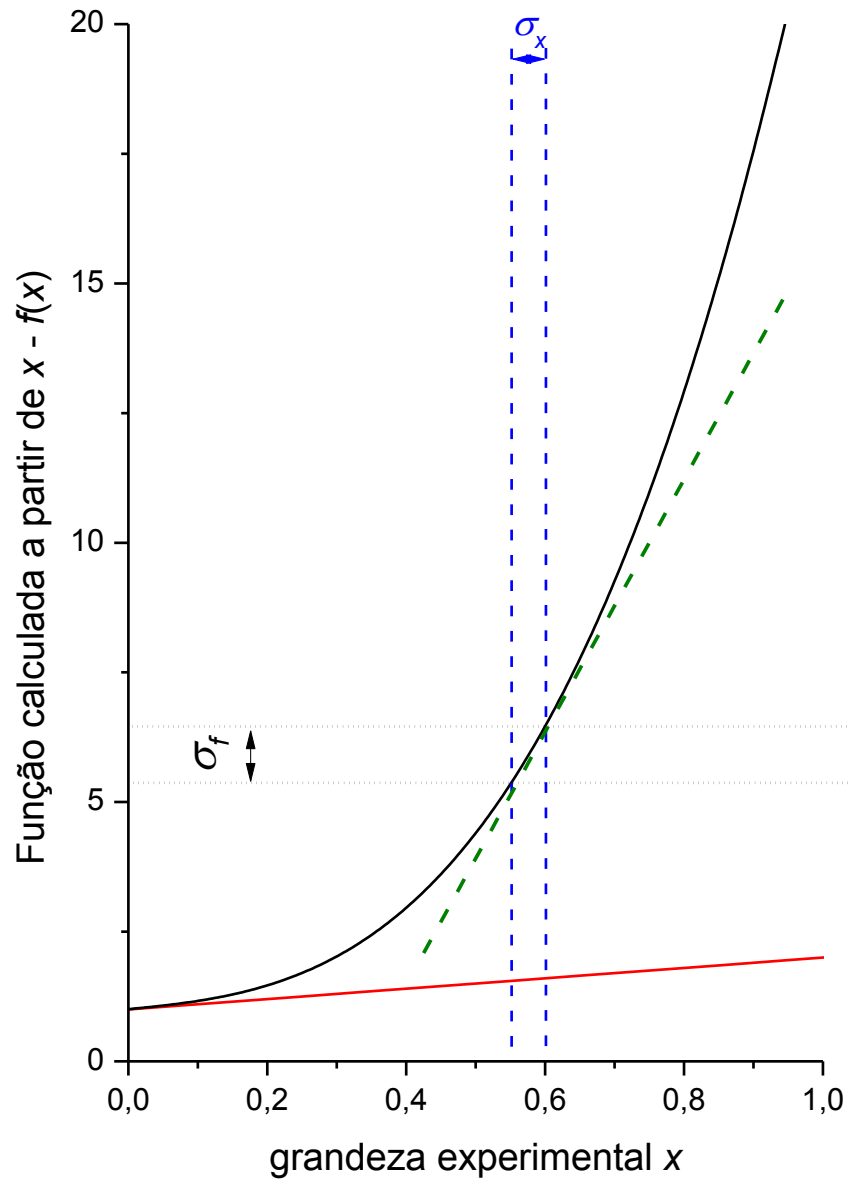
$\sigma_f$

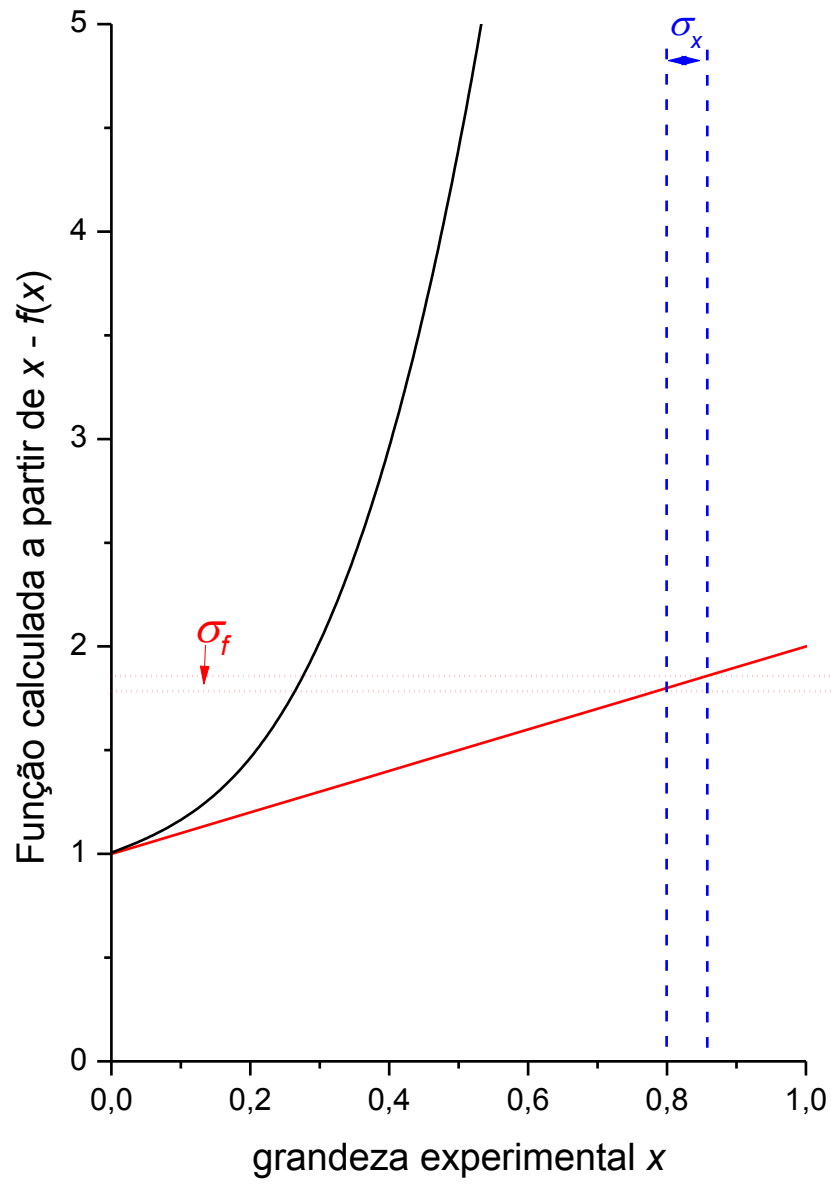
Por que???

$$\sigma_f \approx \frac{\partial f}{\partial x} \sigma_x$$











# Soma quadrática

- São grandezas cujos valores obedecem a uma distribuição de probabilidades;
- Em geral probabilidades mais altas para valores mais próximos do valor médio;
- As grandezas experimentais são independentes entre si.

# Simplificações

- Multiplicação por constante:

$$f(x) = kx \Rightarrow \sigma_f = k\sigma_x$$

- Se a função  $f(x, y, z, \dots)$  é do tipo:

$$f(x, y, z) = x^a y^b z^c \text{ com } a, b \text{ e } c \text{ racionais}$$

– então vale: 
$$\frac{\sigma_f}{f} = \sqrt{\left(a \frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(b \frac{\sigma_y}{y}\right)^2 + \left(c \frac{\sigma_z}{z}\right)^2}$$

- Somas e subtrações:

$$f(x, y, z) = k_1x \pm k_2y \pm k_3z \Rightarrow \sigma_f = \sqrt{(k_1\sigma_x)^2 + (k_2\sigma_y)^2 + (k_3\sigma_z)^2}$$

# Exemplos em Laboratório de Eletromagnetismo

- Experimento 1:  $V_{total} = V_1 + V_2 + V_3$ 
  - se  $\sigma_{V_1} = \sigma_{V_2} = \sigma_{V_3} = \sigma_V \Rightarrow \sigma_{V_{total}} = \sqrt{3}\sigma_V$

*Medindo com o mesmo instrumento, as tensões não são de fato independentes.*

# Exemplos em Laboratório de Eletromagnetismo

- 

- Experimento 2:

$$R = \frac{V}{I} \quad \text{com} \quad V = 2,87 \pm 0,08\text{V} \quad \text{e} \quad I = 28,7 \pm 0,3\text{mA}$$

- $R = 100 \pm ?? \Omega$

# Exemplos em Laboratório de Eletromagnetismo

- 

- Experimento 2:

$$R = \frac{V}{I} \quad \text{com} \quad V = 2,87 \pm 0,08\text{V} \quad \text{e} \quad I = 28,7 \pm 0,3\text{mA}$$

- Resultado da conta:  $2,98\Omega$
- $R = 100 \pm 2,98\Omega$

# Exemplos em Laboratório de Eletromagnetismo

- 

- Experimento 2:

$$R = \frac{V}{I} \quad \text{com} \quad V = 2,87 \pm 0,08\text{V} \quad \text{e} \quad I = 28,7 \pm 0,3\text{mA}$$

- Resultado da conta:  $2,98\Omega$

- ~~$R = 100 \pm 2,98\Omega$~~   $R = 100,0 \pm 3,0\Omega$   $R = 100 \pm 3\Omega$  ✓

# Exemplos em Laboratório de Eletromagnetismo

- Experimento 3:  $\tau_{teorico} = RC$

– se  $\sigma_R = 0,05R$  (5%)

$\sigma_C = 0,01C$  (1%)

- Usando expressão para incertezas relativas:

$$\frac{\sigma_f}{f} = \sqrt{\left(a \frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(b \frac{\sigma_y}{y}\right)^2}$$

# Exemplos em Laboratório de Eletromagnetismo

- Experimento 3:  $\tau_{teorico} = RC$

– se  $\sigma_R = 0,05R$  (5%)

$\sigma_C = 0,01C$  (1%)

- Usando expressão para incertezas relativas:

$$\frac{\sigma_f}{f} = \sqrt{\left(a \frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(b \frac{\sigma_y}{y}\right)^2}$$

$$\frac{\sigma_\tau}{\tau} = \sqrt{\left(1 \frac{\sigma_R}{R}\right)^2 + \left(1 \frac{\sigma_C}{C}\right)^2} = \sqrt{(0,05)^2 + (0,01)^2} \cong 0,05$$

Assim,  $\sigma_\tau = 0,05\tau$   $\tau=10s$  = 0,5s



# Exemplos em Laboratório de Eletromagnetismo

- Experimentos 4 e 5:  $\omega_{teorico} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ 
  - se  $\sigma_L = 0,05L$  (5%)  
 $\sigma_C = 0,005C$  (0,5%)

- Usando expressão para incertezas relativas:

$$\frac{\sigma_f}{f} = \sqrt{\left(a \frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(b \frac{\sigma_y}{y}\right)^2}$$

# Exemplos em Laboratório de Eletromagnetismo

- Experimentos 4 e 5:  $\omega_{teorico} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ 
  - se  $\sigma_L = 0,05L$  (5%)  
 $\sigma_C = 0,005C$  (0,5%)

- Usando expressão para incertezas relativas:

$$\frac{\sigma_f}{f} = \sqrt{\left(a \frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(b \frac{\sigma_y}{y}\right)^2}$$

$$\frac{\sigma_\omega}{\omega} = \sqrt{\left(0,5 \frac{\sigma_L}{L}\right)^2 + \left(0,5 \frac{\sigma_C}{C}\right)^2} = 0,5 \sqrt{(0,05)^2 + (0,005)^2} \cong 0,025$$

Assim,  $\sigma_\omega = 0,025\omega$   $\stackrel{\omega=26500\text{rad/s}}{=} 662\text{rad/s}$

# Exemplos em Laboratório de Eletromagnetismo

- Experimentos 4 e 5:  $\omega_{teorico} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ 
  - se  $\sigma_L = 0,05L$  (5%)
  - $\sigma_C = 0,005C$  (0,5%)

- Usando expressão para incertezas relativas:

$$\frac{\sigma_f}{f} = \sqrt{\left(a \frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(b \frac{\sigma_y}{y}\right)^2}$$

$$\frac{\sigma_\omega}{\omega} = \sqrt{\left(0,5 \frac{\sigma_L}{L}\right)^2 + \left(0,5 \frac{\sigma_C}{C}\right)^2} = 0,5 \sqrt{(0,05)^2 + (0,005)^2} = 0,025$$

Assim,  $\sigma_\omega = 0,025\omega = 662 \text{ rad / s}$

$$\omega_{teorico} = 26500 \pm 662 \text{ rad / s}$$

# Exemplos em Laboratório de Eletromagnetismo

- Experimentos 4 e 5:  $\omega_{teorico} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  ✓

$$\omega_{teorico} = 26500 \pm 662 \text{ rad} / \text{s} = 26,50 \pm 0,66 \text{ krad} / \text{s}$$

- Usando expressão para incertezas relativas:

$$\frac{\sigma_f}{f} = \sqrt{\left(a \frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(b \frac{\sigma_y}{y}\right)^2}$$

$$\frac{\sigma_\omega}{\omega} = \sqrt{\left(0,5 \frac{\sigma_L}{L}\right)^2 + \left(0,5 \frac{\sigma_C}{C}\right)^2} = 0,5 \sqrt{(0,05)^2 + (0,005)^2} \cong 0,025$$

$$\text{Assim, } \sigma_\omega = 0,025 \omega \stackrel{\omega=26500 \text{ rad/s}}{=} 662 \text{ rad} / \text{s}$$