Suplemento sobre Forças Conservativas e Energia Potencial

Prof. J.R.B. Oliveira (4300111 – Física I para o IO, 2012)

Suponha que uma partícula material esteja submetida a uma força que depende exclusivamente da posição (*x, y, z*) da partícula (uma força dita *local*) com relação a um determinado sistema de coordenadas: $\vec{F}=\vec{F}(\vec{r})=\vec{F}(x,y,z)$, onde $\vec{r}=(x,y,z)=x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z}$ é o vetor posição da partícula neste sistema (um exemplo seria a força gravitacional do Sol sobre uma partícula de poeira cósmica).

O trabalho da força sobre a partícula ao longo de uma determinada trajetória que liga um ponto *a* a um ponto *b*, no espaço, é dado pela Integral de Linha (Fig. 1) dessa força, ao longo do caminho de *a* para *b*:

$$W_{ab}=\int_a^b \vec{F}(\vec{r}).d\vec{r} \quad (1)$$

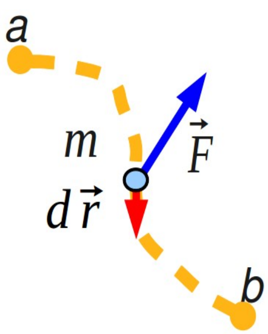

*Figura 1 - Integral de linha de uma força **F** de **a** para **b***

Expandindo-se o produto escalar entre a força e o deslocamento, $\vec{F}.\vec{r}=F_x dx+F_y dy+F_z dz$, na equação 1 acima, percebe-se que a Eq. 1 é na verdade uma fórmula sintética equivalente a três integrais de uma dimensão:

$$W_{ab}=\int_a^b F_x(x,y,z)dx+\int_a^b F_y(x,y,z)dy+\int_a^b F_z(x,y,z)dz$$

no entanto, observe que cada componente da força depende, em princípio, das 3 coordenadas, *x*, *y*, e *z*, que estão vinculadas pela trajetória.

Se a força é local (dependente somente de $\vec{r}$), o trabalho é reversível, isto é, $W_{ab}=-W_{ba}$, como se pode concluir simplesmente invertendo os limites de integração.

Em geral, o valor desse trabalho pode depender do caminho, isto é $W_{ab}[C_1]\neq W_{ab}[C_2]$ (Fig. 2).

Diz-se que uma força é **conservativa** se:

- O trabalho é independente do caminho, qualquer que seja o caminho entre dois pontos *a* e *b* arbitrários (isto é, $W_{ab}[C_1]=W_{ab}[C_2]$, figura 2), **ou** (o que é equivalente):
- O trabalho por uma curva fechada qualquer é sempre nulo ($W_{ab}[C_1]+W_{ba}[C_2]=0$). Neste caso, representa-se a integral de linha pela curva fechada com um círculo sobre o sinal de integração: $\oint \vec{F}(\vec{r}).d\vec{r}$.

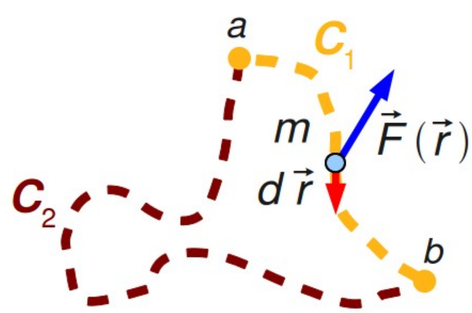

*Figura 2 - Dois possíveis caminhos diferentes (C1 e C2) de **a** para **b**.*

Caso contrário a força é dita *não-conservativa* (um exemplo é a força de atrito, cujo trabalho obviamente depende do caminho, além de não ser uma força local, pois depende da velocidade relativa entre as superfícies em contato, e não da posição).

Se a força é conservativa, é possível definir uma Função Potencial $U(\vec{r})$ (ou energia potencial, que depende *somente* da posição $\vec{r}$) como sendo *menos* o trabalho realizado pela força de um ponto de referência arbitrário (mas escolhido convenientemente) $\vec{r}_{ref}$ até o ponto $\vec{r}=(x,y,z)$:

$$U(\vec{r})=-\int_{\vec{r}_{ref}}^{\vec{r}}\vec{F}(\vec{r}\,').d\vec{r}\,' \quad (2)$$

Neste caso, o trabalho realizado entre os pontos *a* e *b* (correspondente à integral de linha da força) pode ser calculado a partir da diferença de potencial:

$$W_{ab}=-\Delta U_{ab}=-(U_b-U_a)=U(\vec{r}_a)-U(\vec{r}_b) \quad (3)$$

A equação 2 permite determinar a função potencial $U(x,y,z)$ a partir da força (se for conservativa) caso a expressão para $\vec{F}(x,y,z)$ seja conhecida. Para isto, basta escolher um caminho qualquer (conveniente, para facilitar o cálculo da integral de linha) entre o ponto de referência $\vec{r}_{ref}$ (para o qual *U* = 0) e o ponto $\vec{r}=(x,y,z)$. Inversamente, se a expressão para $U(x,y,z)$ é conhecida, pode-se obter a expressão para a força a partir do gradiente do potencial:

$$\vec{F}(x,y,z)=-\vec{\nabla}U(x,y,z)=-(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{x}+\frac{\partial U}{\partial y}\hat{y}+\frac{\partial U}{\partial z}\hat{z}) \quad (4)$$

Sempre que for possível definir uma função potencial, a força correspondente será necessariamente conservativa, já que o trabalho não dependerá do caminho, mas somente da diferença de potencial entre os pontos extremos (*a* e *b*), pela Eq. 3.

Exemplos:

1- O exemplo mais trivial de força conservativa é o caso de uma força $\vec{F}(x,y,z)=-P\hat{y}$, onde *P* é uma constante (independente de *x*, *y*, *z*). Este é o caso da força gravitacional na superfície da Terra, sendo $\hat{y}$ a direção vertical e $F_y=-P=-mg$. Tomando a origem do sistema de coordenadas (0,0,0) como ponto de referência, podemos calcular a integral de linha da Eq. 2 do ponto (0,0,0) até o ponto (*x*,*y*,*z*) por um caminho, por exemplo, retilíneo (na verdade por qualquer caminho) que vai de um ponto ao outro, obtendo:

$$U(x,y,z)=-\int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)}\vec{F}.d\vec{r}=-\int_0^y(-P)dy'=P\int_0^y dy'=Py$$

Se $P=mg$ reproduz-se o familiar potencial gravitacional $U_g(y)=mgy$. Como *P* é uma constante e somente a componente *y* contribui, este potencial claramente independe do caminho. O gradiente do potencial, neste caso, se reduz à derivada com relação a *y*: $\vec{\nabla}U=\frac{dU}{dy}\hat{y}=P\hat{y}$, isto é, $\vec{F}=-\vec{\nabla}U=-P\hat{y}$ o que confirma o resultado conforme a Eq. 4.

2- Outro exemplo simples é o da força elástica de uma mola $\vec{F}=-kx\hat{x}$, do qual se deduz, de maneira semelhante ao exemplo anterior, que $U_e(x)=\frac{1}{2}kx^2$ (verifique).

3- Um exemplo de força local não conservativa em duas dimensões seria: $\vec{F}=\alpha y\hat{x}-\alpha x\hat{y}$, onde α é uma constante. A integral de linha pelo caminho retangular *abcd* da figura 3, por exemplo, não é nula, como pode-se verificar com facilidade:

- No trecho *ab*, como *y* = 0, $\vec{F}=-\alpha x\hat{y}$, enquanto cada passo infinitesimal $d\vec{r}=dx\hat{x}$ (porque $dy=0$) , então $\vec{F}.d\vec{r}=0$ e $W_{ab}=0$.

– No trecho *bc*, $d\vec{r}=dy\,\hat{y}$, e $W_{bc}=\int_b^c(-\alpha x_b)dy=-\alpha x_b\int_{y_b}^{y_c}dy=-\alpha x_b(y_c-y_b)=-\alpha x_b y_c$ (pois $y_b=0$).

– Analogamente, no trecho *cd* $W_{cd}=\alpha y_c(x_d-x_c)=-\alpha x_c y_c$ que é igual ao anterior pois $x_b=x_c$.

– No trecho *da* , *x* = 0 e $d\vec{r}=dy\,\hat{y}$ e novamente o trabalho é nulo $W_{da}=0$.

O trabalho total pelo caminho *abcd* é a soma dos 4 trabalhos anteriores: $W_{abcd}=W_{ab}+W_{bc}+W_{cd}+W_{da}=-2\alpha x_c y_c\neq 0$. Não se trata, portanto, de uma força conservativa.

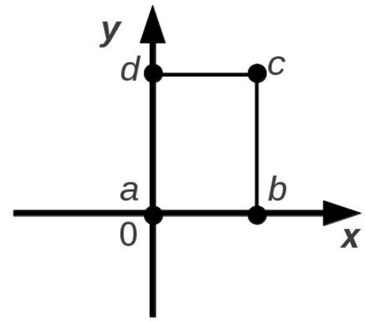

Figura 3 - Caminho retangular ***abcd*** *no plano* ***xy***

Exercícios:

1) Calcule o trabalho da força do exemplo anterior de *a* para *c* por um caminho retilíneo ligando diretamente o ponto *a* ao ponto *c* da figura 3. Dica: obtenha uma relação linear para $y(x)$ ao longo desse caminho e substitua na equação da força.
Resp.: $W_{ac}=0$.

2) Obtenha uma função potencial $U(x,y)$ para a força conservativa dada por $\vec{F}=\alpha y\,\hat{x}+\alpha x\,\hat{y}$. Dica: escolha um caminho do ponto de referência (0,0) ao ponto (*x*,*y*) semelhante ao caminho de trechos retilíneos *ab* e *bc* da figura 3. Utilize variáveis *x'* e *y'* nas integrais para não confundi-las com os limites de integração.
Resp.: $U(x,y)=\alpha x\,y$.

3) Verifique se o potencial obtido no exercício anterior confere com o esperado de acordo com a equação 4, confirmando o caráter conservativo da força.

4) Determine a força correspondente a uma função potencial dada por: $U(x,y,z)=\alpha e^{-\beta x}y\cos(\gamma z^2)$, onde α,β,γ são constantes positivas.
Resp.: $\vec{F}=\alpha\beta e^{-\beta x}y\cos(\gamma z^2)\hat{x}-\alpha e^{-\beta x}\cos(\gamma z^2)\hat{y}+2\alpha\gamma e^{-\beta x}y\,z\,sen(\gamma z^2)\hat{z}$