4320196 – Física para Engenharia II - Prova Substitutiva - 2013

Observações:

• Preencha todas as folhas com o seu nome, número USP, número da turma e nome do professor.
• A prova tem duração de 2 horas.
• Não somos responsáveis por provas com identificação insuficiente.
• Não é permitido o uso de calculadora e celular (manter desligado).
• Apresente sua identidade ou cartão USP ao assinar a lista de presença.
• Resolva cada exercício a partir da frente da folha de resposta com o mesmo número.
• **Justifique** todas as respostas com fórmulas, comentários (sucintos) e cálculos intermediários, não esquecendo das unidades das grandezas físicas.
• Caso apareça alguma raiz que não seja um quadrado perfeito, deixe indicado (não é necessário calcular o valor decimal).
• Resultados serão anunciados no site da disciplina.

Formulário:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi);\;\; \omega_0 = \sqrt{\tfrac{k}{m}};\;\; \gamma = \tfrac{\rho}{m}$$

$$x(t) = Ae^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(\omega t + \varphi);\;\; \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \tfrac{\gamma^2}{4}}$$

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(ae^{\beta t} + be^{-\beta t}\right); \beta = \sqrt{\tfrac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}$$

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}(a + bt)$$

$$x(t) = \tfrac{F_0/m}{\omega_0^2 - \Omega^2}\cos(\Omega t + \varphi);\;\; F = F_0\cos(\Omega t)$$

$$x(t) = A(\Omega)\cos(\Omega t + \varphi(\Omega));$$

$$A(\Omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + \gamma^2\Omega^2}}\;;\; \tan\varphi(\Omega) = -\frac{\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

$$\frac{dA(\Omega)}{d\Omega} = \frac{(2\Omega F_0/m)\left(\omega_0^2 - \Omega^2 - \gamma^2/2\right)}{\left[\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + \gamma^2\Omega^2\right]^{3/2}}\;;\; \Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/2}$$

$$Q = \tfrac{A(\omega_0)}{A(0)}\;;\; Q = \tfrac{\omega_0}{\gamma}\;;\; \tau_d = \gamma^{-1}$$

$$\theta \approx 0 \Rightarrow \text{sen}\theta \approx \theta\;;\; \cos\theta \approx 1 - \tfrac{\theta^2}{2}$$

$$I = I_{\text{c.m.}} + M.d^2$$

Formulário (cont.):

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$

$$y(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt)$$

$$y(x,t) = A\,\cos(kx \mp \omega t + \varphi)$$

$$v = \tfrac{\omega}{k};\; \tau = \tfrac{2\pi}{\omega} = \tfrac{1}{f};\; k = \tfrac{2\pi}{\lambda}; v = \lambda.f$$

$$v = \sqrt{\tfrac{T}{\mu}};\; I = \tfrac{1}{2}\mu v\omega^2 A^2;\; k_n = n\tfrac{\pi}{L};\; k_n = (2n+1)\tfrac{\pi}{2L}$$

$$\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \text{sen}(a)\text{sen}(b)$$

$$\text{sen}(a \pm b) = \text{sen}(a)\cos(b) \pm \text{sen}(b)\cos(a)$$

$$A\text{sen}(kx - \omega t) + A\text{sen}(kx + \omega t) = 2A\text{sen}(kx)\cos(\omega t)$$

$$A\cos(kx - \omega t) + A\cos(kx + \omega t) = 2A\cos(kx)\cos(\omega t)$$

$$y(x,t) = A\cos(kx + \varphi)\cos(\omega t + \delta)$$

$$y(x,t) = 2A\cos(\tfrac{\Delta k}{2}x - \tfrac{\Delta\omega}{2}t).\cos(\bar{k}x - \bar{\omega}t)$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2^2}{R_1^2}\;;\;\; \beta(dB) = 10\log_{10}\left(\tfrac{I}{I_0}\right)$$

$$f_O = f_F\frac{(v \pm V_O)}{(v \pm V_F)}\;\; \begin{cases} V_O \to \text{observador} \\ V_F \to \text{fonte} \end{cases}$$

$$c = 3 \times 10^8 \text{ m/s} \qquad \gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\begin{cases} x' &= \gamma_v\,(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma_v\left(t - \frac{v.x}{c^2}\right) \end{cases} \qquad \begin{cases} u'_x &= \dfrac{u_x - v}{\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)} \\ u'_{y,z} &= \dfrac{u_{y,z}}{\gamma_v\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)} \end{cases}$$

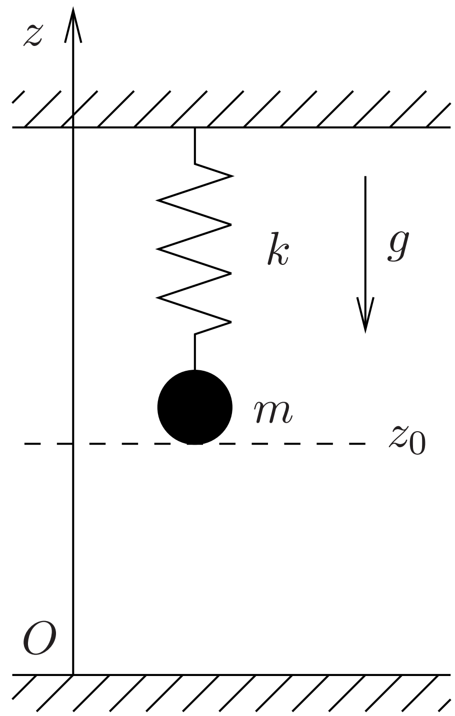
$$\vec{p} = \gamma_u m_0 \vec{u} \qquad E = \gamma_u m_0 c^2$$

$$E = K + m_0c^2 \qquad E^2 = (pc)^2 + \left(m_0c^2\right)^2$$

$$\gamma_u^2 u^2 = \left(\gamma_u^2 - 1\right)c^2 \quad m(u) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}m_0 = \gamma_u m_0$$

$$f = f_0\frac{\sqrt{c \pm |u|}}{\sqrt{c \mp |u|}}$$

Q1 - Uma esfera de aço de massa m está presa a uma mola de constante elástica k. O conjunto está colocado ao longo da vertical em uma região na qual a aceleração da gravidade é g, com a ponta superior da mola presa a uma superfície fixa. O conjunto está colocado acima de uma placa metálica horizontal, localizada na coordenada $z=0$ ao longo de um eixo vertical (vide figura). Na situação de equilíbrio, a esfera apenas toca a placa, sem que haja forças entre as duas. No instante $t=0$ a esfera é solta sem velocidade de uma altura tal que o seu extremo inferior está na posição z_0. A esfera move-se apenas na vertical, e eventuais choques entre a esfera e a placa metálica são perfeitamente elásticos. (Expresse suas respostas em termos de k, m, z_0 e constantes como π).



(a) [0,5] Calcule o instante t_c em que ocorre a primeira colisão com a placa.

(b) [0,5] Determine a velocidade da esfera nos intantes logo antes e logo após da primeira colisão com a placa.

(c) [1,0] Determine a posição vertical $z(t)$ da esfera para todo instante $t \geq 0$.

(d) [0,5] Determine o período T do movimento oscilatório.

Solução Q1:

a) Começamos resolvendo o problema antes da colisão com a placa. A solução geral é

$$\begin{aligned} z(t) &= A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t), \\ \dot{z}(t) &= -\omega A\sin(\omega t) + \omega B\cos(\omega t), \end{aligned}$$

onde $\omega = \sqrt{k/m}$. A condição inicial $\dot{z}(0) = 0$ nos dá $B = 0$, e a condição inicial $z(0) = z_0$ nos dá $A = z_0$, de forma the temos $z(t) = z_0\cos(\omega t)$, onde $\omega = \sqrt{k/m}$.

O instante t_c da primeira colisão será tal que $z(t_c) = 0$. Logo $\omega t_c = \pi/2$ e $\boxed{t_c = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}}$.

b) Para $t < t_c$, temos $z(t) = z_0\cos(\omega t)$ Logo $\dot{z}(t) = -z_0\omega\,\mathrm{sen}(\omega t)$

Logo antes da colisão ($t_- = t_c - \epsilon$), a velocidade será $\boxed{\dot{z}(t_-) = -z_0\sqrt{\frac{k}{m}}}$.

Como os choques ocorrem em $z = 0$ e são elásticos, eles trocam o sinal da velocidade e temos que, logo após a colisão, a velocidade será $\boxed{\dot{z}(t_+) = +z_0\sqrt{\frac{k}{m}}}$.

Solução por conservação de energia: Se a posição da mola relaxada é z_R então $kz_R = mg$ e a energia elástica armazenada na mola é $E_{\text{el}} = (1/2)k(z - z_R)^2$.

A energia total inicial é $E_i = mgz_0 + (1/2)k(z_0 - z_R)^2$ e a energia final é $E_F = (1/2)mv^2 + (1/2)k(z_R)^2$. Logo, por conservação de energia $E_i = E_F$, o que leva a $(1/2)mv^2 = (1/2)kz_0^2$ ou $\boxed{v = \pm z_0\sqrt{\frac{k}{m}}}$.

c) Como os choques ocorrem em $z = 0$ e são elásticos, eles trocam o sinal da velocidade e fazem com que z seja sempre positivo, de forma que temos $\boxed{z(t) = z_0\,|\cos(\omega t)|}$, onde $\omega = \sqrt{k/m}$.

Alternativamente, podemos resolver o problema para $t_c < t \leq 3t_c$ (entre a primeira e a segunda colisões) e inferir o comportamento de $z(t)$ para qualquer t.

Para isso, usamos a solução geral $z(t) = A\cos(\omega(t - t_c) + \varphi$ com condições iniciais $z(t_c) = 0$ e $\dot{z}(t_c) = +Az_0$. Isso resulta em $\varphi = 3\pi/2$ e $A = z_0$ de modo que $z(t) = z_0\cos(\omega(t - t_c) + 3\pi/2 = -z_0\cos\omega t$.

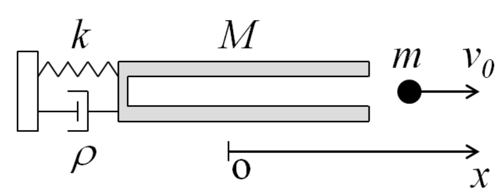
Como, nesse intervalo, temos $\cos\omega t < 0$ $(\pi/2 \leq \omega t \leq 3\pi/2)$, a solução será $z(t) = z_0\,|\cos(\omega t)|$, que vale para qualquer $t > 0$.

d) O período do movimento T é definido como $z(t + T) = z(t)$. Logo:

$$z(t + T) = z_0\,|\cos(\omega t + \omega T)| = z_0\,|\cos(\omega t)| \Rightarrow \omega T = \pi\ ,$$

Logo: $T = \pi/\omega \Rightarrow \boxed{T = \pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$

Q2 - Um canhão de massa $M = 500$ kg possui um sistema de recuo formado por dois elementos: uma mola de constante elástica $k = 2000$ N/m e um amortecedor com coeficiente de amortecimento $\rho = 2000$ kg/s. No instante $t = 0$ s, o canhão dispara um projétil de massa $m = 10$ kg com uma velocidade inicial v_0 de 100 m/s.



(a) [0,5] Qual a velocidade do tambor do canhão no momento do disparo?

(b) [0,5] Qual é o tipo de amortecimento (subcrítico, supercrítico ou crítico) do movimento oscilatório subsequente do tambor do canhão? Justifique sua resposta.

(c) [1,0] Considerando que no instante $t = 0$ s, o tambor do canhão se encontra na posição $x = 0$ m, determine a posição em função do tempo $x(t)$ do tambor do canhão.

(d) [0,5] Qual é o tempo necessário para que $x(t)$ atinja seu valor mínimo?

Solução Q2:

a) Por conservação de momento: $MV_i + mv_0 = 0 \Rightarrow V_i = -\frac{m}{M}v_0$ ou seja $\boxed{V_i = -2}$ m/s.

b) Sendo $\gamma = \rho/M = 4$ s^{-1} e $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}} = 2$ rad/s, temos que $\boxed{\omega_0 = \gamma/2 \text{ (regime crítico)}}$

c) Solução geral para o caso crítico: $x(t) = e^{-\gamma t/2}(a + bt)$ e $\dot{x}(t) = e^{-\gamma t/2}(-(\gamma/2)(a + bt) + b)$ com $\gamma = 4$ s^{-1}.

Condições iniciais :

$$x(0) = 0 \Rightarrow a = 0$$
$$\dot{x}(0) = V_i = -2 \text{ m/s} \Rightarrow b = -2$$

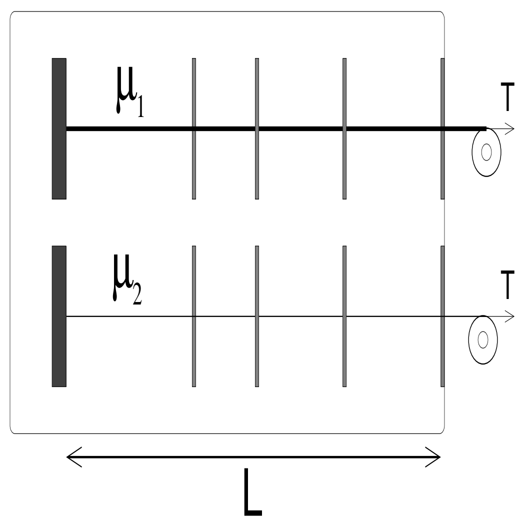
Logo, temos $\boxed{x(t) = -2te^{-2t} \text{ m}}$.

d) O valor mínimo de $x(t)$ ocorre no instante em que $\frac{dx}{dt} = 0$ (e $\frac{d^2x}{dt^2} > 0$).

Como $\frac{dx}{dt} = +2te^{-2t}(4t - 2)$, temos $(4t_m - 2) = 0 \Rightarrow \boxed{t_m = 0{,}5 \text{ s}}$.

e)

Q3 - Um instrumento musical (figura) é composto por duas cordas de densidades lineares de massa μ_1 e $\mu_2 = \mu_1/4$, presas ao corpo do instrumento em uma das pontas e fixas por trastes na outra (figura). A distância entre o último traste e o ponto de fixação é L. As tensões nas cordas podem ser reguladas por tarrachas. Inicialmente, as tensões são mantidas iguais a T e a corda 2 está afinada de tal forma que a frequência do seu harmônico fundamental é $f_2 = 300$ Hz.
Considere que as cordas vibram sempre no seu *harmônico fundamental*.



(a) [0.5] Determine a frequência f_1 da corda 1.

(b) [0.5] O músico que toca o instrumento deseja que a corda 1 vibre na mesma frequência da corda 2. Para isso, ele pretende prender a corda 1 em um segundo traste localizado a uma distância L_a do ponto de fixação. Calcule a razão $\frac{L_a}{L}$.

(c) [0.75] Por ser não conhecer bem o instrumento, o músico prende a corda em um outro traste, reduzindo o comprimento da corda 1 para $L_b = \frac{3L}{4}$. Ele então percebe um batimento (interpretado como "desafinação") entre as frequências das cordas. Calcule a frequência desse batimento.

(d) [0.75] Para eliminar o batimento, o músico aumenta a tensão da corda 2 para T_2, ainda mantendo o comprimento da corda 1 em $L_b = \frac{3L}{4}$. Nesse caso, calcule a razão $\frac{T_2}{T}$ necessária para afinar a corda 2 com a corda 1.

Solução Q3:

Frequência do primeiro harmônico: $f = \dfrac{v}{2L}$ onde $v = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$.

a) A frequência na corda 1 será dada por:

$$f_1 = \frac{2}{L}\sqrt{\frac{T}{\mu_1}} = \frac{2}{L}\sqrt{\frac{T}{4\mu_2}} = \frac{1}{2}f_2$$

Logo $\boxed{f_1 = 150 \text{ Hz}}$

b) Para que $f_1 = f_2$ devemos ter

$$\frac{v_1}{2L_a} = \frac{v_2}{2L} \Rightarrow \frac{L_a}{L} = \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}} = \frac{1}{2}$$

$\boxed{\frac{L_a}{L} = 1/2}$

c) Se $L_b = \frac{3L}{4}$ então

$$f_{1b} = \frac{v_1}{2L_b} = \frac{4v_1}{6L} = \frac{2v_2}{6L} = \frac{2}{3}f_2 = 200 \text{ Hz}$$

A frequência de batimento será $\boxed{\Delta f = f_2 - f_{1b} = 100 \text{ Hz}}$

d) Para que $f_2' = f_{1b}$, temos que ter:

$$\frac{v_2'}{2L} = \frac{v_1}{2L_b} \Longrightarrow \frac{v_2'}{v_1} = \frac{4}{3} \Rightarrow \sqrt{\frac{T_2}{T}\frac{\mu_1}{\mu_2}} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{T_2}{T} = \frac{1}{4}.\frac{16}{9} = \frac{4}{9}$$

$\boxed{T_2/T = 4/9}$

Q4 [2,5]- Um elétron em repouso é atingido por um pósitron (anti-elétron; ambos tem a mesma massa m_0) com velocidade $u = 0{,}8c$ e se aniquilam, transformando-se em dois fótons. Um dos dois fótons emerge formando um ângulo de 90^o com a direção de incidência do pósitron e outro formando um ângulo θ com essa mesma direção.

Calcule as energias dos dois fótons (em termos de m_0 e c) e o ângulo θ.

Solução Q4:

Para $u = 4c/5$ temos $\gamma_u = 5/3$.

O sistema conserva energia e momento relativísticos:

Situação inicial:

$$E_i = (\gamma_u + 1)\, m_0 c^2 = \tfrac{8}{3} m_0 c^2$$

$$P_{xi} = +\gamma_u . m_0 . u = \tfrac{4}{3} m_0 c$$

$$P_{yi} = 0$$

Situação final:

$$E_F = p_1 c + p_2 c$$

$$P_{xf} = p_2 \cos(\theta)$$

$$P_{yf} = -p_2 \,\mathrm{sen}(\theta) + p_1$$

Temos então três equações para os momentos do fóton a 90^o (p_1) e o outro fóton (p_2):

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 &= \frac{8}{3} m_0 c &(1)\\ p_1 &= p_2 \,\mathrm{sen}(\theta) &(2)\\ \frac{4}{3} m_0 c &= p_2 \cos(\theta) &(3) \end{aligned}$$

Elevando Eqs. (2) e (3) ao quadrado e somando, obtemos:

$(p_1)^2 + \frac{16}{9}(m_0 c)^2 = (p_2)^2$

Substituindo Eq. 1:

$$(p_1)^2 + \frac{16}{9}(m_0 c)^2 = (p_1)^2 - \frac{16}{3}(m_0 c)(p_1) + \frac{64}{9}(m_0 c)^2 \Rightarrow p_1 = \frac{48}{9}\frac{3}{16}(m_0 c) = m_0 c$$

Logo $\boxed{p_1 = m_0 c,\ p_2 = \frac{5}{3} m_0 c}$, ou seja, $\boxed{E_1 = m_0 c^2,\ E_2 = \frac{5}{3} m_0 c^2}$.

O ângulo θ pode ser calculado dividindo a Eq. (2) pela (3): $\tan\theta = \frac{3}{4} \Rightarrow \boxed{\theta = \arctan\left(\frac{3}{4}\right)}$

(ou $\theta = \text{arcsen}\left(\frac{3}{5}\right)$)