4320196 – Física para Engenharia II - Prova de Recuperação - 2013

Observações:

- Preencha todas as folhas com o seu nome, número USP, número da turma e nome do professor.
- A prova tem duração de 2 horas.
- Não somos responsáveis por provas com identificação insuficiente.
- Não é permitido o uso de calculadora e celular (manter desligado).
- Apresente sua identidade ou cartão USP ao assinar a lista de presença.
- Resolva cada exercício a partir da frente da folha de resposta com o mesmo número.
- **Justifique** todas as respostas com fórmulas, comentários (sucintos) e cálculos intermediários, não esquecendo das unidades das grandezas físicas.
- Caso apareça alguma raiz que não seja um quadrado perfeito, deixe indicado (não é necessário calcular o valor decimal).
- Resultados serão anunciados no site da disciplina.

Formulário:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi); \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}; \;\; k = \left.\frac{d^2U(x)}{dx^2}\right|_{x=x_0}$$

$$x(t) = Ae^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(\omega t + \varphi); \;\; \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$$

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(ae^{\beta t} + be^{-\beta t}\right); \beta = \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}$$

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}(a + bt)$$

$$x(t) = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \Omega^2}\cos(\Omega t + \varphi)$$

$$x(t) = A(\Omega)\cos(\Omega t + \varphi(\Omega));$$

$$A(\Omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + \gamma^2\Omega^2}} \; ; \; \tan\varphi(\Omega) = -\frac{\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

$$\frac{dA(\Omega)}{d\Omega} = \frac{(2\Omega F_0/m)\left(\omega_0^2 - \Omega^2 - \gamma^2/2\right)}{\left[\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + \gamma^2\Omega^2\right]^{3/2}} \; ; \; \Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/2}$$

$$Q = \frac{A(\omega_0)}{A(0)} \; ; \; Q = \frac{\omega_0}{\gamma} \; ; \; \tau_d = \gamma^{-1}$$

$$\theta \approx 0 \Rightarrow \text{sen}\theta \approx \theta \; ; \; \cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

$$I = I_{\text{c.m.}} + M.d^2$$

Formulário (cont.):

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$

$$y(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt)$$

$$y(x,t) = A\,\cos(kx \mp \omega t + \varphi)$$

$$v = \frac{\omega}{k}; \; \tau = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}; \; k = \frac{2\pi}{\lambda}; v = \lambda.f$$

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}; \; I = \frac{1}{2}\mu v\omega^2 A^2; \; k_n = n\frac{\pi}{L}; \; k_n = (2n+1)\frac{\pi}{2L}$$

$$\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \text{sen}(a)\text{sen}(b)$$

$$\text{sen}(a \pm b) = \text{sen}(a)\cos(b) \pm \text{sen}(b)\cos(a)$$

$$A\text{sen}(kx - \omega t) + A\text{sen}(kx + \omega t) = 2A\text{sen}(kx)\cos(\omega t)$$

$$A\cos(kx - \omega t) + A\cos(kx + \omega t) = 2A\cos(kx)\cos(\omega t)$$

$$y(x,t) = A\cos(kx + \varphi)\cos(\omega t + \delta)$$

$$y(x,t) = 2A\cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right).\cos(\bar{k}x - \bar{\omega}t)$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2^2}{R_1^2} \;\; ; \;\; \beta(dB) = 10\log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

$$f_O = f_F\frac{(v \pm V_O)}{(v \pm V_F)} \quad \begin{cases} V_O \rightarrow \text{observador} \\ V_F \rightarrow \text{fonte} \end{cases}$$

$$c = 3 \times 10^8 \text{ m/s} \qquad \gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

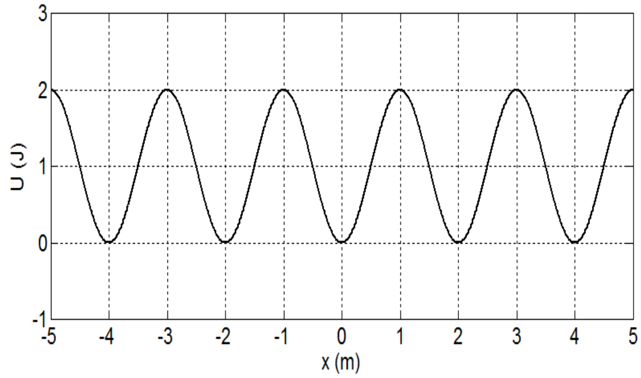
$$\begin{cases} x' &= \gamma_v(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma_v\left(t - \frac{v.x}{c^2}\right) \end{cases} \qquad \begin{cases} u'_x &= \frac{u_x - v}{\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)} \\ u'_{y,z} &= \frac{u_{y,z}}{\gamma_v\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)} \end{cases}$$

$$\vec{p} = \gamma_u m_0\vec{u} \qquad E = \gamma_u m_0 c^2$$

$$E = K + m_0c^2 \qquad E^2 = (pc)^2 + \left(m_0c^2\right)^2$$

$$\gamma_u^2 u^2 = \left(\gamma_u^2 - 1\right)c^2 \qquad f = f_0\frac{\sqrt{c \pm |u|}}{\sqrt{c \mp |u|}}$$

Q1 - A energia potencial de uma partícula de massa m numa dada posição x é descrita pela função $U(x) = (1 - \cos(\pi x))$ (em Joules, sendo x em metros), mostrada na figura ao lado.



(a) [0,5] Calcule a força $F(x)$ que atua na partícula para todo x.

(b) [0,5] Calcule a frequência angular de pequenas oscilações em torno de $x=0$.

Considerando que a partícula é colocada em repouso na posição $x_0 = 0{,}1$ m no instante de tempo $t=0$ s e realiza pequenas oscilações em torno de $x = 0$, determine:

(c) [0,5] A posição $x(t)$ em função do tempo.

(d) [0,5] A velocidade em função do tempo da partícula, $v(t)$.

(e) [0,5] O módulo da velocidade da partícula quando esta se encontra na posição $x = 0$ m.

Sugestão: utilize a série de Taylor de $\cos\theta$ em torno de $\theta = 0$.

Solução Q1:

a) Como $F(x) = -\frac{dU}{dx}$ temos

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} = +\frac{d\cos(\pi x)}{dx} = -\pi \mathrm{sen}(\pi x) \text{ N}$$

b) Para pequenas oscilações, $\cos\theta \approx 1 - \theta^2/2$ logo, em torno de $x = 0$, temos

$$U(x) \approx 1 - 1 + \pi^2 x^2/2 = \pi^2 x^2/2 \ .$$

Isso equivale a $U(x) = (1/2)kx^2$ com $k = \pi^2$. Assim, temos $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{\pi}{\sqrt{m}} \text{ rad/s}}$.

c) Sendo a solução geral $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, temos

$$\begin{aligned} x(0) &= A\cos\varphi = x_0 > 0 \Rightarrow \cos\varphi > 0 \\ \dot{x}(0) &= -A\omega \mathrm{sen}\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0 \text{ ou } \pi \end{aligned}$$

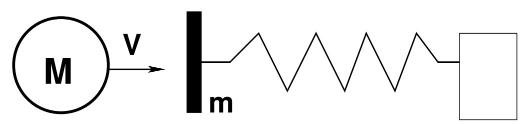
de modo que $A = 0{,}1$m e $\varphi = 0$. Assim, $\boxed{x(t) = 0{,}1\cos\left(\frac{\pi t}{\sqrt{m}}\right) \text{ m}}$.

d) Derivando: $v(t) = \frac{dx}{dt} = -0{,}1\frac{\pi}{\sqrt{m}}\mathrm{sen}(\frac{\pi t}{\sqrt{m}})$ m/s.

e) A partícula estará na posição $x = 0$ nos tempos t_n tais que $\omega t_n = (2n+1)\pi/2$ ($n = 0, 1, 2...$). Nestes instantes, $v(t = t_n) = \pm 0{,}1\frac{\pi}{\sqrt{m}}$ e é máxima em módulo.

Assim, $\boxed{|v(t_n)| = 0{,}1\frac{\pi}{\sqrt{m}} \text{ m/s}}$.

Q2 - Um corpo de massa $M = 600$ g colide com uma plataforma de massa $m = 200$ g, inicialmente em repouso e presa a uma mola de constante $k = 0{,}8$ N/m e massa desprezível (a outra extremidade da mola mantém-se presa a uma parede). No momento da colisão, a mola está relaxada e a velocidade do corpo é $v = 1$ m/s. O sistema está imerso em um fluido com constante de amortecimento $\rho = 1,6$ kg/s.



Se a colisão entre o corpo e a plataforma for *completamente inelástica*, determine:

(a) [0,5] A frequência natural de oscilação do sistema na ausência de amortecimento.

(b) [0,5] O regime de oscilação amortecida.

(c) [0,5] A velocidade do corpo no instante logo após a colisão.

(d) [1,0] A posição do corpo em função do tempo $x(t)$ (considere $x = 0$ a posição de equilíbrio e $t = 0$ o instante logo após a colisão).

Solução Q2:

(a) Como a colisão é totalmente inelástica, a massa total presa à mola é $M_T = M + m$, de modo que a frequência natural será $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M_T}} = \sqrt{\frac{0{,}8}{0{,}6+0{,}2}} = 1$ rad/s .

(b) A constante de amortecimento γ será $\gamma = \frac{\rho}{M_T} = \frac{1{,}6}{0{,}8} = 2\ \mathrm{s}^{-1}$, de modo que $\frac{\gamma}{2} = \omega_0$, o que indica $\boxed{\textit{amortecimento crítico}}$.

(c) Por conservação de momento na colisão: $Mv = (M+m)V_i$, logo

$\boxed{V_i = \frac{M}{M+m}v = \frac{0{,}6}{0{,}8} = \frac{3}{4} = 0{,}75 \text{ m/s}}$.

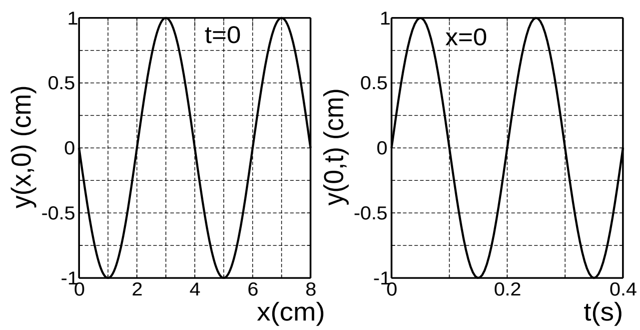
(d) Solução geral para o caso crítico: $x(t) = e^{-\gamma t/2}\,(a + bt)$ e $\dot{x}(t) = e^{-\gamma t/2}\,(-(\gamma/2)(a+bt) + b)$ com $\gamma = 2\ \mathrm{s}^{-1}$.

Condições iniciais :

$$x(0) = 0 \Rightarrow a = 0$$
$$\dot{x}(0) = V_i = 0{,}75 \text{ m/s} \Rightarrow b = \tfrac{3}{4}$$

Logo, temos $\boxed{x(t) = \frac{3}{4} t e^{-t} \text{ m}}$.

Q3 - A figura ao lado mostra dois gráficos que representam uma onda transversal em uma corda de 200 g de massa e 1 metro de comprimento, descrita por uma função $y(x,t)$. A onda está se movendo no sentido positivo de x. Com base nesses dados e na informação contida nesses gráficos, determine:
(Obs: justifique **todas** as respostas)



(a) [0.5] A amplitude e frequência da onda.

(b) [0.5] O comprimento de onda e a velocidade da onda.

(c) [1.0] A expressão $y(x,t)$ que descreve a onda.

(d) [0.5] A tensão na corda.

Solução Q3:

Baseando-se na expressão geral $y(x,t) = A\cos kx - \omega t + \varphi$:

a) Com base no gráfico, os valores máximos de e mínimo de $y(x,t)$ são $+1$ e -1 cm respectivamente, de modo que a $\boxed{\text{amplitude é } A = 1 \text{ cm}}$.

O gráfico de $y(0,t)$ tem um período de $T = 0.2$s de modo que $\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = 10\pi \text{ rad/s}}$ (ou $f = 5$ Hz).

b) O gráfico de $y(x,0)$ mostra um comprimento de onda de $\boxed{\lambda = 4 \text{ cm}}$ (por ex. a distância entre dois máximos). Com isso, a velocidade da onda será $\boxed{v = f.\lambda = 20 \text{ cm/s}}$.

c) Pelos gráficos, $\omega = 10\pi$ e $k = 2\pi/\lambda = \pi/2 \text{ cm}^{-1}$

Temos ainda que $y(0,0) = 0$ logo $\varphi = \pm\pi/2$. Determinamos φ por um outro ponto nos gráficos, por exemplo, $y(x = 1, 0) = -A$. Como $x = 1 = \lambda/4 = \pi/2k$

$$y(x = \lambda/4, 0) = A\cos\pi/2 - 0 + \varphi = -A \Rightarrow cos\pi/2 + \varphi = -1 \Rightarrow \varphi = +\frac{\pi}{2}$$

Logo $\boxed{y(x,t) = \cos\left(\frac{\pi x}{2} - 10\pi t + \frac{\pi}{2}\right) = -\text{sen}\left(\frac{\pi x}{2} - 10\pi t\right)\ \text{cm}}$.

Resposta também aceita: x e y em metros ($k = 50\pi\ \text{m}^{-1}$): $\boxed{y(x,t) = -\text{sen}\,(50\pi x - 10\pi t)\ \text{m}}$.

d) Como $m = 0{,}2$ kg e $L = 1$ m, temos $\mu = 0{,}2$ kg/m. Assim, sendo $v = 0{,}2$ m/s:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \Rightarrow T = \mu.v^2 = (0.2)(0.04) = 8 \times 10^{-3}\text{N}$$

$\boxed{T = 0{,}008\ \text{N}}$.

Q4- Um laboratório de Física de altas energias possui um equipamento capaz de acelerar (fornecer energia cinética) e medir a energia de partículas carregadas. Sendo a massa de um elétron em repouso aproximadamente igual a 0,5 MeV/c^2, responda:

(a) [0,5] Se um elétron tem energia de 1 MeV medida pelo equipamento, qual velocidade do elétron em relação ao laboratório?

(b) [0,5] Qual a energia cinética fornecida ao elétron no caso do ítem (a)?

(c) [1,0] Se uma energia cinética de 25 MeV é fornecida a um múon em repouso (massa $\simeq 200$ vezes a massa do elétron), calcule a velocidade final do múon em relação ao laboratório.

(d) [0,5] Sendo o tempo de decaimento de um múon em repouso aproximadamente igual a $\tau' = 2\ \mu$s, calcule o tempo de decaimento do múon do ítem (c) medido por um observador no laboratório.

Solução Q4:

Resolução

a) Como $E = \gamma_u m_0 c^2 = 1$ MeV e $m_0 c^2 = 0{,}5$ MeV, temos $\gamma_u = 2$. Logo $\boxed{u = \sqrt{1 - \gamma_u^{-2}}c = \sqrt{3}\,c/2}$.

b) Sendo $E = K + m_0 c^2 = 1$ MeV temos $\boxed{K = 0{,}5\ \text{MeV}}$.

c) A energia de repouso do múon será $M_0 c^2 = 200(0.5) = 100$ MeV. Sendo $K' = 25$ MeV, temos $E' = K' + M_0 c^2 = 125$ MeV.

Como $E' = \gamma_{u'} M_0 c^2 = 100\gamma_{u'}$ temos $\gamma_{u'} = \frac{5}{4}$, logo

$$\boxed{u' = \sqrt{1 - \gamma_{u'}^{-2}}c = \frac{3c}{5}}$$

d) O tempo medido pelo observador no laboratório estará dilatado por um fator $\gamma_{u'} = \frac{5}{4}$. Logo $\boxed{\Delta t = \gamma_{u'}\tau' = 2{,}5\ \mu\text{s}}$.