4320196 – Física para Engenharia II - Prova P3 - 2013

Observações:

- Preencha todas as folhas com o seu nome, número USP, número da turma e nome do professor.
- A prova tem duração de 2 horas.
- Não somos responsáveis por provas com identificação insuficiente.
- Não é permitido o uso de calculadora e celular (manter desligado).
- Apresente sua identidade ou cartão USP ao assinar a lista de presença.
- Resolva cada exercício a partir da frente da folha de resposta com o mesmo número.
- **Justifique** todas as respostas com fórmulas, comentários (sucintos) e cálculos intermediários, não esquecendo das unidades das grandezas físicas.
- Caso apareça alguma **raiz que não seja um quadrado perfeito** ou uma **fração irredutível**, deixe indicado (não é necessário calcular o valor decimal).
- Resultados serão anunciados no site da disciplina.

Formulário:

$$c = 3 \times 10^8 \text{ m/s} \qquad \gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\begin{cases} x' &= \gamma_v (x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma_v \left(t - \frac{v.x}{c^2}\right) \end{cases} \qquad \begin{cases} u'_x &= \frac{u_x - v}{\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)} \\ u'_{y,z} &= \frac{u_{y,z}}{\gamma_v \left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)} \end{cases}$$

$$\vec{p} = \gamma_u m_0 \vec{u} \qquad E = \gamma_u m_0 c^2$$

$$E = K + m_0 c^2 \qquad E^2 = (pc)^2 + \left(m_0 c^2\right)^2$$

$$\gamma_u^2 u^2 = \left(\gamma_u^2 - 1\right) c^2 \quad m(u) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} m_0 = \gamma_u m_0$$

$$f = f_0 \frac{\sqrt{c \pm |u|}}{\sqrt{c \mp |u|}}$$

$$\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \ldots$$

Q1 - Uma sonda interestelar é lançada da Terra. Após um breve período de aceleração (desprezível), ela se move com velocidade constante $v = 0{,}8c$. Suas baterias elétricas transmitem continuamente um sinal para a Terra. As baterias tem um tempo de duração (medido no referencial próprio da nave) de 15 anos.

(a) [0,5] Qual o tempo de duração das baterias medido no referencial da Terra?

(b) [0,5] A que distância da Terra (medida por um um observador da Terra) estará a sonda quando as baterias se extinguirem?

(c) [0,75] No momento em que as baterias se extinguirem, a que distância a Terra está da sonda, no referencial da sonda?

(d) [0,75] Por quanto tempo após o lançamento da sonda o sinal emitido pela nave será recebido pelo controle da missão na Terra?

Sugestão: expresse suas respostas em anos (tempo) e anos-luz (distância). 1 ano-luz=c.(1 ano).

Solução Q1:

a) O intervalo Δt medido pelo observador na Terra estará dilatado em relação ao tempo próprio T medido no referencial da sonda: $\Delta t = \gamma . T$.

Como $v = 0{,}8c = \frac{4c}{5}$, temos $\gamma = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{25-16}} = \frac{5}{3}$ e $\Delta t = \frac{5}{3}.15 \Rightarrow \boxed{\Delta t = 25 \text{ anos}}$.

b) $\Delta x = v.\Delta t = \frac{4c}{5}.(25) \Rightarrow \boxed{\Delta x = 20 \text{ anos-luz.}}$

c) $\Delta x' = v.T = \frac{4c}{5}.(15) \Rightarrow \boxed{\Delta x = 12 \text{ anos-luz.}}$

d) O tempo total em que o sinal será detectado será o tempo de duração das baterias (medido na Terra) mais o tempo que o último sinal leva para chegar à terra:

$\Delta t_{\text{tot}} = \Delta t + \Delta x/c = 25 + 20 = 45$ anos

ou

$\Delta t_{\text{tot}} = \Delta t + \Delta x/c = \gamma.T.(1 + \frac{v}{c}) = \frac{5}{3}.15.\frac{9}{5} = 45$ anos

Q2 - Um observador na plataforma de uma estação ferroviária (referencial S) joga uma bola verticalmente para cima com velocidade incial u_0 ($u_0 \ll c$) partindo da origem de S no instante $t = 0$. Outro observador está em um trem que viaja com velocidade constante v na direção do eixo x crescente (referencial S'). Estamos considerando referenciais S e S' com eixos x e x' (horizontais) e y e y' (verticais) paralelos entre si, sendo que as origens dos dois referenciais coincidem em $t = t' = 0$. Considere que a aceleração da gravidade (vertical) é g no referencial S. Expresse suas respostas em termos dos dados do problema (u_0, g, v).

(a) [0,5] Determine a posição da bola em função do tempo ($x(t)$ e $y(t)$) no referencial S. e calcule o tempo que a bola fica no ar de acordo com um observador em S.

(b) [1,0] Determine a posição da bola em função do tempo t' ($x'(t')$ e $y'(t')$) no referencial S'.

(c) [0,5] Calcule o tempo que a bola fica no ar de acordo com um observador em S'.

(d) [0,5] Determine as componentes da velocidade $u'_x(t')$ e $u'_y(t')$ no referencial S'.

Solução Q2:

a) Em S, temos um movimento retilíneo uniformemente acelerado na direção y partindo da origem com velocidade inicial $v_y(0) = u_0$. Logo $x(t) = 0$ e $y(t) = u_0 t - \frac{g}{2}t^2$.

Tempo de voo t_v: $y(t_v) = 0 \Rightarrow t(v_0 - \frac{g}{2}t) = 0$ logo, como $t_v > 0$, temos $t_v = \frac{2u_0}{g}$.

b) Pelas Transformações de Lorentz, temos:

$$\begin{array}{rcccl} x' & = & \gamma_v \left(x - vt \right) & = & -\gamma_v vt \\ y' & = & y & = & u_0 t - \frac{gt^2}{2} \\ t' & = & \gamma_v \left(t - \frac{v.x}{c^2} \right) & = & \gamma_v t \end{array}$$

Substituindo t', temos:

$$\begin{array}{rcl} x'(t') & = & -vt' \\ y'(t') & = & u_0 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} t' - \frac{g}{2} \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 \right) (t')^2 \end{array}$$

c) Tempo de voo t'_v em S': $y'(t'_v) = 0 \Rightarrow \frac{t'}{\gamma_u}(u_0 - \frac{g}{2\gamma_u} t') = 0$.

Como $t'_v > 0$, temos $t'_v = \frac{2u_0\gamma_v}{g} \Rightarrow \boxed{t'_v = \frac{2u_0}{g\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}}$.

d)

$$\begin{array}{rcl} u'_x(t') & = & -v \\ u'_y(t') & = & u_0 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} - g \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 \right) t' \end{array}$$

Q3 - Em uma experiência, dois prótons (massa de repouso de 1 GeV/c^2) são lançados diretamente um contra o outro de modo a colidirem. A distância inicial entre os prótons é de 6 km e a velocidade de cada próton é 0,5c, ambos medidos no referencial S do laboratório. Considere que o lançamento dos dois prótons ocorre no instante $t = 0$ em S.

(a) [0,5] Qual é o momento linear de cada próton em S antes da colisão?

(b) [0,5] Se, após a colisão, for detectada uma terceira partícula (além dos dois prótons), calcule a massa de repouso máxima dessa partícula.

Considere agora um referencial S' que se move juntamente com um dos prótons.

(c) [0,5] Qual a velocidade relativa entre os prótons antes da colisão no referencial S'?

(d) [0,5] O lançamento dos dois prótons é simultâneo em S'? Justifique.

(e) [0,5] Calcule a energia cinética de cada um dos dois prótons no referencial S' antes da colisão.

Solução Q3:

a) O momento linear de cada próton será $p = \gamma_u m_0 u = \frac{1}{\sqrt{1-1/4}}.m_0.(\pm c/2) = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ GeV/c.

b) A energia total antes da colisão em S é:

$$E_i = \frac{2\sqrt{3}}{3}m_0c^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}m_0c^2 = \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)m_0c^2$$

A maior massa de repouso possível ocorre se toda a energia cinética antes da colisão $K_i = E_i - 2m_0c^2$ se converter em massa, com a partícula produzida e os prótons permanecendo em repouso após a colisão. Nesse caso, é necessário que o momento final seja zero. Por conservação de momento, isto ocorre no Ref. S do laboratório no qual o momento inicial é zero. Nesta situação limite, a energia após a colisão será $E_F = M_{0\max}c^2 + 2m_0c^2$. Assim, por conservação de energia, após a colisão temos:

$$E_F = E_i \Rightarrow M_{0\max}c^2 = \left(\frac{4\sqrt{3}}{3} - 2\right)m_0c^2.$$

Logo, temos $M_{0\max} = \left(\frac{4\sqrt{3}}{3} - 2\right)m_0 = \left(\frac{4\sqrt{3}}{3} - 2\right)$ GeV/c^2.

c) A velocidade relativa é medida em um referencial em que um dos prótons está em repouso (por ex, Ref. S' movendo-se com $v = +c/2$):

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}} = \frac{-c/2 - c/2}{1 + \frac{1}{4}} = -\frac{4c}{5}$$

d) O lançamento dos dois prótons é simultâneo em S (ocorre em $t = 0$) mas não será simultâneo em S'. Chamemos o próton que está em repouso em S' de "A"e o outro de "B".

Para o próton A, que permanece na origem de S', ele ocorre em $t'_A = 0$. Para o próton B, ocorre antes:

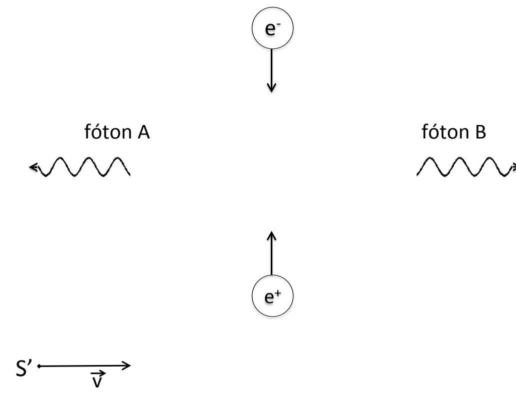
$$t'_B = \gamma_v\left(0 - \frac{v.x_B}{c^2}\right) = -\frac{2\sqrt{3}}{3}\frac{3000}{3\times10^8} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}\times 10^{-5}\text{ s.}$$

e) Em S', o próton A está em repouso, logo $K_A = 0$.

O próton B tem velocidade $u' = -\frac{4c}{5}$ logo:

$$K_B = \left(\frac{1}{\sqrt{1-(u/c)^2}} - 1\right)m_0c^2 = \left(\frac{5}{3} - 1\right)m_0c^2 = \frac{2}{3}\text{ GeV}$$

Q4 - Um elétron de massa de repouso m_0 encontra sua anti-partícula, um pósitron, estando ambos a velocidades muito baixas (praticamente em repouso) no referencial S do laboratório. O resultado é a aniquilação do par, com a emissão de dois fótons (A e B), com direções opostas ao longo do eixo x em S.



(a) [0,5] Calcule a energia e o momento de cada fóton do par em S, em função da massa m_0 do elétron.

(b) [0,5] A frequência do fóton é proporcional ao seu momento: $f = |p|c/h$, onde h é a constante de Planck. Considere o referencial de um observador S' que se desloca com velocidade v, paralela ao eixo de propagação do par de fótons. Qual a frequência do fóton A e do fóton B para esse observador em função da massa de repouso do elétron e da velocidade do referencial?

(c) [1,0] Calcule, a partir das frequência obtidas no item anterior, o momento total dos fótons gerados, bem como a energia resultante.

(d) [0,5] Determine o momento e a energia do par elétron-pósitron medidos no referencial S'. Como essas quantidades se comparam com o momento e energia dos fótons? Justifique.

Deixe todas suas respostas em função da velocidade de luz (c) se for o caso.

Solução Q4:

a) A energia total inicial é $E = 2\,m_0\,c^2$ no referencial do centro de massa.

Por conservação de energia, a soma de energia dos fótons deve igualar a energia inicial $E_A + E_B = E$

O momento inicial é $p_x = 0$ e $p_y = 0$. O momento final é igual a $p_A + p_B = 0$, portanto $p_A = -p_B$.

Como no caso do fóton $|p| = E/c$, temos que $E_A = E_B$ e $p_A = -m_0 c$ e $p_B = m_0 c$.

b) As frequências em S serão iguais a $f = m_0 c^2/h$. O fóton se propaga na direção contrária a observadores em S' (contra-propagante) e o fóton B se propaga na mesma direção de observadores em S' (co-propagante).

Assim, por efeito Doppler relativístico, o observador em S' mede: $f'_A = \frac{m_0\,c^2}{h}\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$ e $f'_B = \frac{m_0\,c^2}{h}\sqrt{\frac{c-v}{c+v}}$.

c) Temos a diferença entre os módulos dos momentos, e portanto resolvendo a equação temos:

$$p' = p'_A + p'_B = \frac{h}{c}(f'_B - f'_A) = m_0 c \left(\frac{\sqrt{c-v}}{\sqrt{c+v}} - \frac{\sqrt{c+v}}{\sqrt{c-v}} \right) = -2\, m_0 \, \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} \, v = -2\, m_0 \, \gamma_v \, v.$$

Para a energia, a soma dará

$$E' = h(f'_A + f'_B) = m_0 c^2 \left(\frac{\sqrt{c-v}}{\sqrt{c+v}} - \frac{\sqrt{c+v}}{\sqrt{c-v}} \right) = 2\, \gamma_v m_0 \, c^2.$$

d) Por conservação de energia e momento em S', devemos ter $E'_p = 2\, m_0 \gamma_v \, c^2$ e $P'_p = -2\, m_0 \, \gamma_v \, v$.

Ou seja, o resultado é consistente com o momento total do par inicial, e sua energia, no referencial em movimento.