4320196 – Física para Engenharia II - Prova P2 - 2013

Observações:

- Preencha todas as folhas com o seu nome, número USP, número da turma e nome do professor.
- A prova tem duração de 2 horas.
- Não somos responsáveis por provas com identificação insuficiente.
- Não é permitido o uso de calculadora e celular (manter desligado).
- Apresente sua identidade ou cartão USP ao assinar a lista de presença.
- Resolva cada exercício a partir da frente da folha de resposta com o mesmo número.
- **Justifique** todas as respostas com fórmulas, comentários (sucintos) e cálculos intermediários, não esquecendo das unidades das grandezas físicas.
- Caso apareça alguma **raiz que não seja um quadrado perfeito** ou uma **fração irredutível**, deixe indicado (não é necessário calcular o valor decimal).
- Resultados serão anunciados no site da disciplina.

Formulário:

$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$

$y(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt)$

$y(x,t) = A\cos(kx \mp \omega t + \varphi)$

$v = \frac{\omega}{k};\ \tau = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f};\ k = \frac{2\pi}{\lambda}; v = \lambda.f$

$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}};\ I = \frac{1}{2}\mu v\omega^2 A^2;\ k_n = n\frac{\pi}{L};\ k_n = (2n+1)\frac{\pi}{2L}$

$\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \mathrm{sen}(a)\mathrm{sen}(b)$

$\mathrm{sen}(a \pm b) = \mathrm{sen}(a)\cos(b) \pm \mathrm{sen}(b)\cos(a)$

$A\mathrm{sen}(kx - \omega t) + A\mathrm{sen}(kx + \omega t) = 2A\mathrm{sen}(kx)\cos(\omega t)$

$A\cos(kx - \omega t) + A\cos(kx + \omega t) = 2A\cos(kx)\cos(\omega t)$

$y(x,t) = A\cos(kx + \varphi)\cos(\omega t + \delta)$

$y(x,t) = 2A\cos(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t).\cos(\bar{k}x - \bar{\omega}t)$

$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2^2}{R_1^2}\ ;\ \beta(dB) = 10\log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)$

$f_O = f_F\frac{(v \pm V_O)}{(v \pm V_F)}\ \begin{cases} V_O \rightarrow \text{observador} \\ V_F \rightarrow \text{fonte}\end{cases}$

$\mathrm{sen}\ \alpha = \frac{v}{V_F}$

Q1 - Uma corda de violino com 30 cm de comprimento é colocada próxima a uma fonte sonora que emite um som com frequência de 440 Hz. A corda passa então a vibrar no seu segundo modo normal de vibração. Suponha que a corda em repouso coincida com o eixo O-x e que o amortecimento da corda produzido pelo seu atrito com o ar possa ser desprezado.

(a) [0,5] Qual a frequência f da onda estacionária induzida na corda? Justifique.

(b) [0,5] Determine o comprimento de onda na corda.

(c) [0,5] Determine a velocidade de uma onda nessa corda.

(d) [0,5] Determine a posição dos ventres da onda na corda em relação à extremidade $x = 0$.

(e) [0,5] Sabendo que o movimento de um ponto da corda na posicão $x = 7{,}5$ cm é dado por $y(7{,}5\ \text{cm}, t) = 0{,}2\cos(2\pi f t)$ (y em cm), obtenha a função $y(x,t)$ que descreve a onda estacionária na corda.

Solução Q1:

a) A corda é forçada a oscilar pela onda sonora. Se o amortecimento da corda produzido pelo ar é desprezível, a frequência e ressonância da corda é aproximadamente igual à frequência da onda sonora. Logo a frequência de vibração f_2 da corda é igual a 440 Hz.

b) A expressão geral de uma onda estacionária é $y(x,t) = A\sin(kx + \beta_1)\cos(\omega t + \beta_2)$.

Pelas condições de contorno temos que: $y(0,t) = 0 \Longrightarrow \sin(\beta_1) = 0 \Longrightarrow \beta_1 = 0$ rad $\Longrightarrow$ $y(x,t) = A\sin(kx)\cos(\omega + \beta_2)$

$$y(L,t) = A\sin(kL)\cos(\omega t + \beta_2) = 0 \Longrightarrow kL = n\pi \Longrightarrow \frac{2\pi}{\lambda}L = \pi n \Longrightarrow L = n\frac{\lambda}{2},$$

com n sendo um inteiro positivo.

Como a corda está vibrando no seu segundo modo normal, temos que:

$$L = 2\frac{\lambda_2}{2} = \lambda_2 \Longrightarrow \lambda_2 = 30 \text{ cm}.$$

c) $\lambda_2 = \frac{v}{f_2} \Longrightarrow v = Lf_2 \Longrightarrow v = (0,3 \times 440)$ m/s $= 132$ m/s.

d) Nos pontos onde existem ventres o módulo do deslocamento máximo do ponto da corda é A. Logo, temos que

$$A\sin(kx) = \pm A \Longrightarrow kx = (2n+1)\frac{\pi}{2} \Longrightarrow \frac{2\pi}{\lambda_2}x = (2n+1)\frac{\pi}{2} \Longrightarrow x = (2n+1)\frac{\lambda_2}{4},$$

onde n é nulo ou um inteiro positivo e $x < L$. Por isso os ventres da corda estão localizados em $x_1 = \frac{\lambda_2}{4} = 7,5$ cm, $x_2 = \frac{3\lambda_2}{4} = 22,5$ cm

e) O movimento de qualquer ponto da corda é dado por: $y(x,t) = A\sin(k_2 x)\cos(\omega_2 t + \beta_2)$.

O número de onda é dado por: $k_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2} = \frac{\pi}{15}$ cm^{-1}. A frequência angular é dada por: $\omega_2 = 2\pi f_2 = 880\pi$ rad/s. A equação do movimento do ponto que dista 7,5 cm do ponto O é:

$$\begin{aligned} y(7,5 \text{ cm}, t) &= A\sin\left(\frac{\pi}{15} \times 7,5\right)\cos(880\pi t + \beta_2) = A\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(880\pi t + \beta_2) \\ y(7,5 \text{ cm}, t) &= A\cos(880\pi t + \beta_2), \text{ com } t \text{ em segundos.} \end{aligned}$$

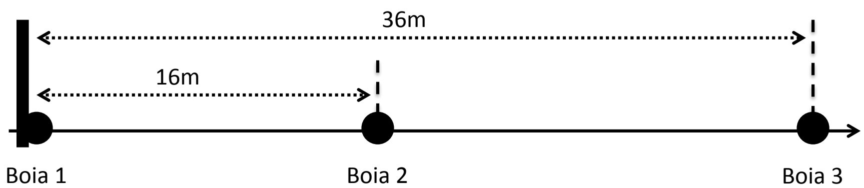
Pela comparação entre a expressão anterior e a expressão fornecida pelo problema $y(7,5 \text{ cm}, t) = 0,2\cos(2\pi f_2 t)$ cm, temos que $A = 0,2$ cm e $\beta_2 = 0$ rad.

Logo, a função que descreve a onda estacionária na corda é:

$$y(x,t) = 0,2\sin\left(\frac{\pi}{15}\,x\right)\cos(880\pi t) \text{ cm},$$

onde x está em centímetros e t em segundos.

Q2 - Um grupo de pesquisa marinha está desenvolvendo boias com sensores de movimento para monitoração remota de ondas em alto-mar. De forma a testar o equipamento, três destas boias são posicionadas ao longo de um rio num trecho sem curvas, na proximidade de uma barragem. A boia 1 está posicionada junto à parede da barragem, a boia 2 está a 16 metros e a boia 3 a 36 metros. Considere as ondas na superfície da água como sendo transversais.



Após um período de calmaria, uma onda se dirige em direção à barragem (e às boias), enquanto os pesquisadores ficam na sala de controle analisando a resposta dos sensores (considere a barragem na posição x=0, e a onda na direção negativa de x).

(a) [0,5] Se o sensor da boia 2 registrou o movimento 4s após o sensor da boia 3, qual a velocidade da onda?

(b) [0,5] Os sensores registram um movimento oscilatório de período 3,2s e amplitude 0,7m. Qual o comprimento de onda e a frequência desta onda?

(c) [1,0] Diferentemente dos sensores das boias 2 e 3, o sensor da boia 1 registra que a amplitude da oscilação é de 1,4m. Escreva a equação da onda incidente, da onda refletida pela barragem, e da onda total resultante (para definir a fase inicial, assuma que $y(x = 0, t = 0)$ é um ponto de máximo).

(d) [0,5] Considerando a interferência entre a onda incidente e a onda refletida, qual será a amplitude de oscilação registrada pelos sensores das boias 2 e 3 após a reflexão?

Solução Q2:

a) $\Delta x = 36 - 16 = 20m$
$v = \Delta x / \Delta t = 20/4 = 5m/s$

b) $\lambda = vT = 5 * 3,2 = 16m$
$f = 1/T = 1/3,2 = 0,3125Hz$

c) $y_i(x,t) = A\cos(2\pi(x/\lambda + t/T)) = y_i(x,t) = 0,7\cos(2\pi(x/16 + t/3,2))$
Se a amplitude em x=0 é o dobro da amplitude original, a reflexão é equivalente a reflexão por ponta solta da corda:
$y_r(x,t) = 0,7\cos(2\pi(x/16 - t/3,2))$
$y_t(x,t) = 1,4\cos(2\pi x/16)\cos(2\pi t/3,2) = 1,4\cos(x\pi/8)\cos(t\pi/1,6)$

d) $\cos(2\pi 16/16) = 1$, e portanto em x=16m existirá um ventre de amplitude 1,4m
$\cos(2\pi 36/16) = \cos(2\pi * 2,25) = \cos(2\pi * 0,25) = \cos(\pi/2) = 0$, e portanto em x=36m existirá um nó (amplitude = 0)

Q3 - A taxa instantânea da energia transferida por uma onda ao longo de uma corda (a potência instantânea) é dada por:

$$P(x,t) = -F\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} \qquad (1)$$

onde F é a tensão.

(a) [0,5] Usando a expressão (1), obtenha $P(x,t)$ para uma onda estacionária dada por:

$$y(x,t) = A\,\mathrm{sen}(kx)\cos(\omega t) \qquad (2)$$

Utilize que $\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta) = \frac{1}{2}\mathrm{sen}(2\theta)$.

(b) [0,5] Calcule a potência média por período P_{med} transportada pela onda para todo x.

(c) [1,0] Para uma onda estacionária dada pela expressão (2), faça gráficos de $P(x,t)$ e do deslocamento $y(x,t)$ em função de x para: $t=0$, $t=\frac{\pi}{4\omega}$, $t=\frac{\pi}{2\omega}$, e $t=\frac{3\pi}{4\omega}$.

(d) [0,5] Qual o valor da potência instantânea nos nós e nos ventres da onda?

Solução Q3:

(a)

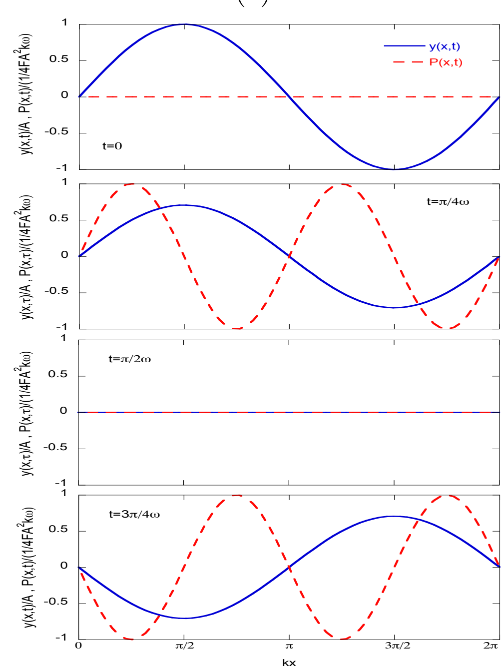
$$\begin{aligned}
\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} &= kA\cos(kx)\cos(\omega t)\\
\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} &= -\omega A\,\mathrm{sen}(kx)\,\mathrm{sen}(\omega t)\\
\Rightarrow P &= FA^2\omega k(\mathrm{sen}(kx)\cos(kx))(\mathrm{sen}(\omega t)\cos(\omega t))\\
&= \tfrac{1}{4}FA^2\omega k\,\mathrm{sen}(2kx)\,\mathrm{sen}(2\omega t)
\end{aligned}$$

(b) O valor médio de P é proporcional ao valor médio de $\mathrm{sen}(2\omega t)$ que é zero em um período. Assim, $P_{med} = 0$.

(c) Figura ao lado

(d) Nos pontos onde $\mathrm{sen}(2kx_n) = 0$, $P(x,t)$ é nula para qualquer tempo. Logo $2kx_n = \mathrm{n}\pi \Rightarrow x_n = \mathrm{n}\lambda/4$. $P(x,t) = 0$ nos nós e nos ventres.

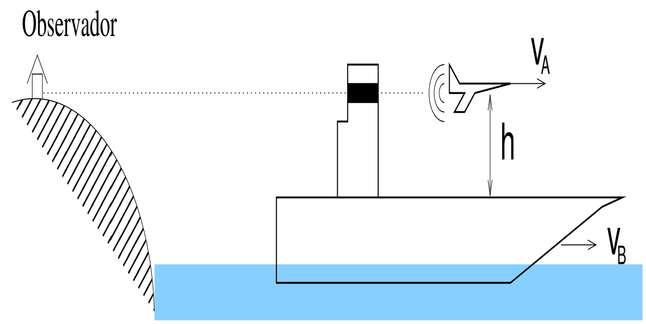
(c)



y(x,t) (linha cheia) e P(x,t) (linha tracejada) como função de x.

Q4 - Um jato com velocidade V_A realiza um "fly-by" (voo rasante) próximo à torre de controle de um porta-aviões, a uma altura h = 50m do convés em um dia sem vento. O porta-aviões se move a uma velocidade V_B = 17m/s na mesma direção do avião.

Medições feitas pelo fabricante do jato indicam que a frequência do som das turbinas do avião é de 1500 Hz com intensidade sonora de 170 dB medida a 1 metro de distância. Considere a velocidade do som no ar em repouso como sendo 340 m/s.



(a) [0.5] O avião se afasta de um observador em terra situado à mesma altura do avião (figura). Durante o "fly-by", esse observador mede um valor de 1000 Hz para a frequência do som dos jatos do motor. Calcule a velocidade do jato durante o "fly-by".

(b) [0.5] Determine a frequência medida por um observador dentro da torre de controle.

(c) [0.5] Calcule a intensidade sonora do ruído das turbinas do avião medida no convés (despreze efeitos de interferência).

(d) [1.0] Calcule a altura mínima h_{min} para que o avião possa fazer o "fly-by" sem que a intensidade sonora no convés atinja o limiar da dor (130 dB).

Dado adicional: $\log_{10} 5 \approx 0.7$

Solução Q4:

a) A frequência f_1 medida pelo observador é dada pelo efeito Doppler com fonte se afastando com velocidade $+V_A$:

$$f_1 = \frac{f_0}{(1 + V_A/v_s)} \Rightarrow \frac{f_0}{f_1} = 1 + \frac{V_A}{v_s} \Rightarrow \frac{V_A}{v_s} = \frac{f_0}{f_1} - 1$$

Como $f_0 = 1500$ Hz, $f_1 = 1000$ Hz, temos $V_A = 0.5 v_s$ ou $\boxed{V_A = 170 \text{ m/s}}$

b) Nesse caso, temos o efeito Doppler com observador e fonte em movimento (em um referencial em que o ar está em repouso).

$$f_2 = f_0 \frac{(1 + V_B/v_s)}{(1 + V_A/v_s)} = f_0 \frac{(1 + 17/340)}{(1 + 170/340)} = 1500.\frac{1.05}{1.5} = 1050 \text{ Hz}$$

Logo, $\boxed{f_2 = 1050 \text{ Hz}}$

c) Sendo I_1 a intensidade a $h_1 = 1$ metro e I_h a intensidade a h metros, temos $I_h = I_1 \frac{h_1^2}{h^2}$. A intensidade sonora no convés β_h será então:

$$\beta_h = 10\log\frac{I_h}{I_0} = 10\log\frac{I_1}{I_0}.\frac{h_1^2}{h^2} = \left(10\log\frac{I_1}{I_0} - 20\log\frac{h}{h_1}\right) = \beta_1 - 20\log\frac{h}{h_1}$$

Sendo $\beta_1 = 170$ dB, $h_1 = 1$ m e $h = 50$ m, temos
$\beta_h = 170 - 20\log 50 = 170 - 20(1.7) = 170 - 34 = 136$. Logo $\boxed{\beta_h = 136 \text{ dB}}$

d) Queremos que a intensidade sonora máxima seja $\beta_m = 130$ dB a uma altura $h = h_m$. Seguindo o raciocínio do ítem anterior, temos $I_m = I_1\frac{h_1^2}{h_m^2}$. Logo:

$$\beta_m = 10\log\frac{I_m}{I_0} = 10\log\frac{I_1}{I_0}.\frac{h_1^2}{h_m^2} = \left(10\log\frac{I_1}{I_0} - 20\log\frac{h_m}{h_1}\right) = \beta_1 - 20\log\frac{h_m}{h_1}$$

Sendo $\beta_1 = 170$ dB, $\beta_m = 130$ dB e $h_1 = 1$ m, temos

$$20\log\frac{h_m}{h_1} = \beta_1 - \beta_m = 170 - 130 = 40 \Rightarrow h_m = h_1.10^{40/20} = 100h_1$$

Logo $\boxed{h_m = 100\text{m.}}$