4320196 – Física para Engenharia II - Prova P1 - 2013

Observações:

- Preencha todas as folhas com o seu nome, número USP, número da turma e nome do professor.
- A prova tem duração de 2 horas.
- Provas com identificação insuficiente não serão corrigidas.
- Não é permitido o uso de calculadora e celular (manter desligado).
- Apresente sua identidade ou cartão USP ao assinar a lista de presença.
- Resolva cada exercício a partir da frente da folha de resposta com o mesmo número.
- **Justifique** todas as respostas com fórmulas, comentários (sucintos) e cálculos intermediários, não esquecendo das unidades das grandezas físicas.
- Caso apareça alguma raiz que não seja um quadrado perfeito, deixe indicado (não é necessário calcular o valor decimal).
- Resultados serão anunciados no site da disciplina.

Formulário:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\tfrac{k}{m}};\ \ k = \left.\tfrac{d^2U(x)}{dx^2}\right|_{x=x_0}$$

$$x(t) = Ae^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(\omega t + \varphi);\ \ \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \tfrac{\gamma^2}{4}}$$

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(ae^{\beta t} + be^{-\beta t}\right);\ \beta = \sqrt{\tfrac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}$$

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}(a + bt)$$

$$x(t) = \tfrac{F_0/m}{\omega_0^2 - \Omega^2}\cos(\Omega t + \varphi)$$

$$x(t) = A(\Omega)\cos(\Omega t + \varphi(\Omega));$$

$$A(\Omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)^2+\gamma^2\Omega^2}}\ ;\ \tan\varphi(\Omega) = -\frac{\gamma\Omega}{\omega_0^2-\Omega^2}$$

$$\frac{dA(\Omega)}{d\Omega} = \frac{(2\Omega F_0/m)\left(\omega_0^2-\Omega^2-\gamma^2/2\right)}{\left[\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)^2+\gamma^2\Omega^2\right]^{3/2}}\ ;\ \Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/2}$$

$$Q = \tfrac{A(\omega_0)}{A(0)}\ ;\ Q = \tfrac{\omega_0}{\gamma}\ ;\ \tau_d = \gamma^{-1}$$

$$\theta \approx 0 \Rightarrow \mathrm{sen}\theta \approx \theta\ ;\ \cos\theta \approx 1 - \tfrac{\theta^2}{2}$$

$$I = I_{\text{c.m.}} + M.d^2$$

Q1 - Um sistema massa-mola consiste de um corpo de massa $m = 8$ kg e uma mola de constante elástica $k = 72$ N/m. No instante de tempo $t = 0$s, a massa do sistema é colocada na posição $x_0 = +0{,}1$m (em relação à posição de equilíbrio) com velocidade $v_0 = -0,3\sqrt{3}$ m/s. Desprezando quaisquer tipos de atrito, determine:

(a) [0,5] A frequência de oscilação.

(b) [0,5] A amplitude do movimento.

(c) [0,5] A posição em função do tempo $x(t)$.

(d) [0,5] A velocidade em função do tempo $v(t)$.

(e) [0,5] A energia potencial elástica U e a energia cinética K em função do tempo.

Solução Q1:

(a) $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{72}{8}} \Rightarrow \omega = 3$ rad/s

$$f = \omega/(2\pi) = 3/(2\pi) \Rightarrow \boxed{f = \frac{3}{2\pi}\ \text{Hz}}$$

($f \approx 0,5$ Hz usando $\pi \approx 3$).

Obs: tanto $\omega = 3$ rad/s como $f = 3/(2\pi)$ Hz serão considerados corretos.

(b) Energia total: $E = \frac{1}{2}kx_0^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 = 0,36 + 1,08 = 1,44$ J

Sendo $E = \frac{1}{2}kA^2$ temos $A^2 = 2,88/72 = 0,04 \Rightarrow \boxed{A = 0,2 \text{ m}}$

Solução alternativa: Sendo $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ e $\dot{x}(t) = -\omega A \text{ sen}(\omega t + \varphi)$ e usando $x(0) = 0,1$m; $\dot{x}(0) = -0,3\sqrt{3}$ e $\omega = 3$ temos

$$\begin{cases} 0,1 &= A\cos(\varphi) \\ -0,3\sqrt{3}/(-3) &= A \text{ sen}(\varphi)\,. \end{cases}$$

Elevando ao quadrado e somando:

$0,01(1+3) = A^2(\cos^2(\varphi) + \text{sen}^2(\varphi)) \Rightarrow A^2 = 0,04 \Rightarrow \boxed{A = 0,2 \text{ m}}$.

(c) Solução: $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$

Condições iniciais: $x(0) = 0,1$ m e $\dot{x}(0) = -0,3\sqrt{3}$ m/s

Logo: $A\cos\varphi = 0,1 \Rightarrow \cos\varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \pm\pi/3$.

Como $v(0) = -\omega\ A \text{ sen}\varphi < 0$ então $\text{sen}\varphi > 0$ logo $\varphi = +\pi/3$ e portanto

$\boxed{x(t) = 0,2\cos(3t + \frac{\pi}{3}) \text{ m}}$

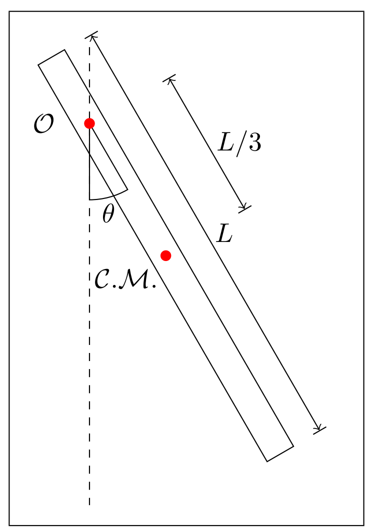
(d) Como $v(t) = -A\omega\text{sen}(\omega t + \varphi)$, temos

$\boxed{v(t) = -0,6 \text{ sen}(3t + \frac{\pi}{3}) \text{ m/s}}$

(e) $U(t) = \frac{1}{2}kx^2(t) \Rightarrow \boxed{U(t) = 1,44\ \cos^2(3t + \frac{\pi}{3}) \text{ J}}$

$K(t) = \frac{1}{2}mv^2(t) \Rightarrow \boxed{K(t) = 1,44 \text{ sen}^2(3t + \frac{\pi}{3}) \text{ J}}$

Q2 - Uma haste rígida de comprimento L e massa M está suspensa em um ponto que dista $L/3$ do centro gravitacional da haste. No instante $t = 0$ a haste é abandonada a partir do repouso de um ângulo θ_0 com a direção vertical. Considere o limite de oscilações com ângulos pequenos.



(a) [0,5] Obtenha a equação diferencial que descreve o movimento de rotação da haste.

(b) [0,5] Determine o período de oscilação T_o da haste nessas circunstâncias.

(c) [0,5] Obtenha a solução $\theta(t)$ da equação diferencial.

(d) [0,5] Obtenha a energia mecânica da haste no ângulo $\theta_0/2$.

(e) [0,5] Determine a razão T_e/T_o onde T_e é o período de oscilação da haste quando suspensa por sua extremidade.

Formulário adicional: - Momento de inércia de uma haste delgada uniforme de comprimento L e massa M em relação a um eixo vertical que passa pelo seu centro: $I_c = \frac{ML^2}{12}$.

Solução Q2:

(a)

$$I\ddot{\theta} = -Mg\frac{L}{3}\sin\theta, \text{ onde } I = \frac{1}{12}ML^2 + \frac{1}{9}ML^2 = \frac{7}{36}ML^2.$$

No limite de oscilações com ângulos pequenos, podemos aproximar $\sin\theta \approx \theta$,

$$\boxed{\ddot{\theta} = -\frac{12}{7}\frac{g}{L}\theta,}$$

(b) Identificamos da equação acima a frequência angular ω_o^2

$$\omega_o^2 = \frac{(2\pi)^2}{T_o^2} = \frac{12}{7}\frac{g}{L}.$$

portanto,

$$\boxed{T_o = \sqrt{\frac{7\pi^2 L}{3g}}.}$$

(c) A solução geral desse sistema é do tipo

$$\theta(t) = a\cos(\omega_o t) + b\sin(\omega_o t), \tag{1}$$

$$\dot{\theta}(t) = -a\omega_o\sin(\omega_o t) + b\omega_o\cos(\omega_o t).$$

Portanto,

$$\theta(0) = a\cos(0) + b\sin(0) = \theta_0 \;\Rightarrow\; a = \theta_0,$$

$$\dot{\theta}(0) = -a\omega_o\sin(0) + b\omega_o\cos(0) = 0 \;\Rightarrow\; b = 0,$$

Finalmente, reescrevendo a equação (1) substituindo os valores de a e b teremos

$$\boxed{\theta(t) = \theta_0\cos(\omega_o t), \text{ onde } \omega_o = \sqrt{\frac{12}{7}\frac{g}{L}}.}$$

(d) A expressão da energia mecânica da haste é dada por

$$E = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + Mg\frac{L}{3}(1-\cos\theta).$$

No limite de oscilações com ângulos pequenos $\cos\theta \approx 1 - \theta^2/2$, assim

$$E = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{36}ML^2\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{6}MgL\theta^2. \tag{2}$$

Do item anterior vimos que $\theta(t) = \theta_0\cos(\omega_o t)$ portanto

$$\theta_0\cos(\omega_o t^*) = \theta_0/2 \;\Rightarrow\; t^* = \pi/3\omega_o,$$

consequentemente

$$\dot{\theta}(t^*) = -\theta_0\omega_o \sin(\omega_o t^*) = -\theta_0\omega_o\sqrt{3}/2,$$

assim a expressão (2) fica

$$E = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{36}ML^2\right)\theta_0^2\omega_o^2\frac{3}{4} + \frac{1}{6}MgL\frac{\theta_0^2}{4}.$$

substituindo $\omega_o^2 = 12g/7L$ teremos

$$\boxed{E = \frac{1}{6}MLg\theta_0^2,}$$

que é constante em todo o movimento.

(d) Para a haste suspensa por sua extremidade a equação do movimento de rotação é

$$I\ddot{\theta} = -Mg\frac{L}{2}\sin\theta, \text{ onde } I = \frac{1}{12}ML^2 + \frac{1}{4}ML^2 = \frac{1}{3}ML^2,$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{3g}{2L}\theta \;\Rightarrow \omega_e^2 = \frac{3g}{2L} \;\Rightarrow\; T_e = \sqrt{\frac{8\pi^2 L}{3g}},$$

portanto,

$$\boxed{\frac{T_e}{T_o} = \sqrt{\frac{8}{7}}.}$$

Q3 - Um sistema composto por um bloco de massa 2 kg que se encontra sobre uma mesa horizontal e que está ligado à parede por uma mola, tem seu movimento representado por:

$$\ddot{x} + 6\dot{x} + 25x = 0,$$

onde as constantes estão em unidades do sistema SI. Despreze o atrito do bloco com a superfície da mesa.

(a) [0,5] Identifique a constante de amortecimento γ e a frequência angular ω_0 na equação acima e determine o tipo de amortecimento sofrido pelo sistema.

(b) [1,0] Dado que o bloco se encontra inicialmente na posição $x = 1$ m, onde a origem deste sistema corresponde à posição do bloco com a mola relaxada, e com velocidade inicial de -7 m/s, determine a equação horária $x(t)$ do sistema, em função de sua amplitude e fase inicial.

(c) [1,0] Suponha agora que este sistema passe a oscilar sob a ação de uma força $F = \cos(\Omega t)$. Ache a frequência angular Ω sob a qual a amplitude das oscilações é máxima. Assuma que o tempo t é grande o suficiente para que a componente transiente do movimento já tenha sido totalmente suprimida. Encontre também esta amplitude máxima.

Solução Q3:

(a) $\gamma = 6\ \mathrm{s}^{-1}$ é a constante de amortecimento e $\omega_0^2 = 25$ é o quadrado da frequência angular natural do sistema.

Temos que $\omega_0 > \frac{\gamma}{2}$ e portanto o amortecimento é sub-crítico.

(b) O amortecimento é sub-crítico, então,

$x(t) = A\exp(-\frac{\gamma t}{2})\cos(\omega + \phi_0)$ onde

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} = 4$ rad/s

Das condições iniciais:

$x(t=0) = A\cos\phi_0 = 1$ (Eq. 1)

$\dot{x} = -A\frac{\gamma t}{2}\exp(-\frac{\gamma t}{2})\cos(\omega + \phi_0) - A\omega\exp(-\frac{\gamma t}{2})\sin(\omega + \phi_0)$

$\dot{x}(t=0) = -A\frac{\gamma t}{2}\cos\phi_0 - A\omega\sin\phi_0 = -7$ (Eq.2)

Substituindo Eq.1 na Eq. 2 temos $\sin\phi_0 = \frac{1}{A}$. Usando a relação $cos^2\phi_0 + \sin^2\phi_0 = 1$, a equação acima e a eq. 1:

$\phi_0 = \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \quad x(t) = \sqrt{2}\exp(-3t)\cos(4t + \frac{\pi}{4})$

(c) A amplitude é máxima quando $\Omega = \Omega_{\mathrm{res}}$:

$\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{2}} = \sqrt{7}$ rad/s

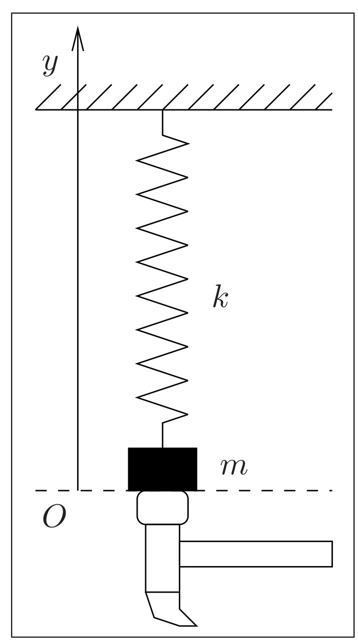
$A^2(\Omega_r) = \frac{F_0^2}{m^2[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \gamma^2\Omega^2]} = \frac{1}{2304}$

$A = \sqrt{\frac{1}{2304}}$ m.

Q4 - Um corpo de massa m está preso a uma mola de constante elástica k. O conjunto está colocado ao longo de um eixo y em uma região na qual não há aceleração da gravidade, com a outra ponta da mola presa a uma superfície fixa. O corpo está em contato com um martelo e está sujeito também a uma força de resistência do ar dada por

$$F_{\mathrm{at}} = -\rho\dot{y},$$

para $\rho > 0$. O sistema é sub-crítico, ou seja temos $\gamma < 2\omega_0$, onde $\gamma = \rho/m$ e $\omega_0^2 = k/m$. Na situação de equilíbrio a superfície do corpo que entra em contato com o martelo está na origem do eixo y. No instante $t = 0$ o martelo imprime ao corpo uma velocidade v_0 dirigida no sentido positivo do eixo y, e depois disto permanece fixo com a sua superfície de contato em $y = 0$. Quando o corpo volta a se chocar com a superfície do martelo, que está em $y = 0$, ele se fixa ao martelo e permanece em repouso depois deste segundo choque.



(a) [0,25] Determine a energia mecânica do sistema formado pelo corpo e pela mola em $t = 0$.

(b) [0,75] Determine a posição $y(t)$ e a velocidade $\dot{y}(t)$ no intervalo de tempo entre os dois choques.

(c) [0,5] Determine o tempo T transcorrido entre os dois choques.

(d) [1,0] Determine a energia dissipada no segundo choque do corpo com o martelo.

Solução Q4:

(a) Em $t = 0$ não há energia potencial na mola, e toda a energia mecânica é portanto cinética, de onde segue imediatamente que

$$\begin{aligned} E_M &= \frac{m}{2}\,[\dot{y}(0)]^2 \\ &= \frac{m}{2}\,v_0^2. \end{aligned}$$

(b) A solução geral do problema, válida até o segundo choque, é dada por

$$y(t) = e^{-\gamma t/2}\,[A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)]\,,$$

onde $\omega = \sqrt{w_0^2 - \gamma^2/4}$ e $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. As condições iniciais são $y(0) = 0$ e $\dot{y}(0) = v_0$. A primeira nos dá de imediato $A = 0$, o que reduz a solução e a sua derivada a

$$\begin{aligned} y(t) &= B\,e^{-\gamma t/2}\sin(\omega t), \\ \dot{y}(t) &= -\frac{\gamma}{2}\,B\,e^{-\gamma t/2}\sin(\omega t) + \omega B\,e^{-\gamma t/2}\cos(\omega t), \end{aligned}$$

de forma que a segunda condição de contorno nos dá $B = v_0/\omega$. Com isto temos a forma final da solução,

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{v_0}{\omega}\,e^{-\gamma t/2}\sin(\omega t), \\ \dot{y}(t) &= v_0\,e^{-\gamma t/2}\left[\cos(\omega t) - \frac{\gamma}{2\omega}\,\sin(\omega t)\right]. \end{aligned}$$

(c) Dada a solução para $y(t)$ determinada no item anterior, é fácil ver que o tempo entre o início do movimento e o segundo choque é dado simplesmente por $\omega T = \pi$, ou seja temos

$$T = \frac{\pi}{\omega}.$$

(d) No segundo choque, que acontece em $y = 0$, não há energia potencial e a energia cinética é dada pela velocidade,

$$\dot{y}(t) = v_0\,e^{-\gamma t/2}\left[\cos(\omega t) - \frac{\gamma}{2\omega}\,\sin(\omega t)\right],$$

para o tempo no qual $y(t)$ é zero pela segunda vez, ou seja quando temos $\sin(\omega t) = 0$, $\cos(\omega t) = -1$ e $\omega t = \pi$. Segue que temos para esta velocidade

$$
\begin{aligned}
\dot{y}(\pi/\omega) &= v_0\, e^{-\gamma\pi/(2\omega)} \left[\cos(\pi) - \frac{\gamma}{2\omega}\, \sin(\pi)\right] \\
&= -v_0\, e^{-\gamma\pi/(2\omega)}.
\end{aligned}
$$

A energia dissipada neste choque, que é completamente inelástico, é a energia cinética, que é dada por

$$
\begin{aligned}
E_{c,M} &= \frac{m}{2}\left[v_0\, e^{-\gamma\pi/(2\omega)}\right]^2 \\
&= \frac{m v_0^2}{2}\, e^{-\gamma\pi/\omega}.
\end{aligned}
$$