Circuitos de Primeira Ordem

Magno T. M. Silva e Flávio R. M. Pavan, 2015

1 Introdução

Em geral, um circuito de primeira ordem tem um único elemento armazenador de energia (um capacitor ou um indutor)[1] e é descrito por uma equação diferencial de primeira ordem, ordinária, linear e a coeficientes constantes[2]. Considere, por exemplo, o circuito R, L série alimentado por um gerador ideal de tensão e com condição inicial $i(t_0) = i_0$, como mostrado na Figura 1.

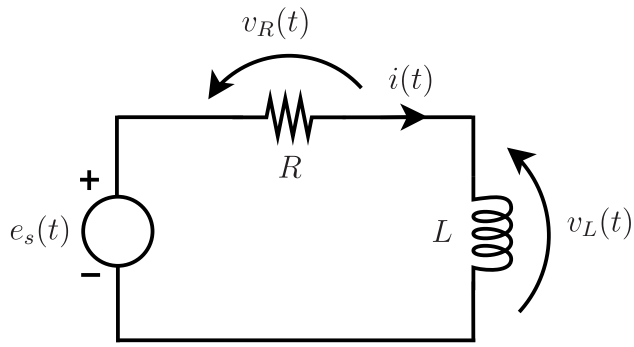

Figura 1: Circuito R, L série alimentado por um gerador ideal de tensão.

Escrevendo a segunda lei de Kirchhoff para esse circuito, obtemos

$$v_L(t) + v_R(t) = e_s(t).$$

Usando as relações constitutivas do indutor e do resistor (lei de Ohm), chega-se a

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = e_s(t). \tag{1}$$

Dividindo essa equação por L, obtemos

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L}i(t) = \frac{1}{L}e_s(t). \tag{2}$$

Dessa forma, o circuito da Figura 1 é descrito pela equação diferencial acima e a corrente $i(t)$ é a função incógnita. Essa equação diferencial é:

---

[1]Pode haver circuitos de primeira ordem com mais de um elemento armazenador de energia. Por exemplo, um circuito que contém dois capacitores em paralelo é equivalente a um circuito com um único capacitor. Há outros casos que são chamados de circuitos redutíveis, como veremos no curso de *Circuitos II*.

[2]Nem todos os circuitos de primeira ordem são descritos por uma equação diferencial desse tipo. No entanto, vamos considerar aqui apenas circuitos elétricos lineares com parâmetros (R, L, C) constantes e sendo t é a única variável independente.

1. **de primeira ordem**, pois aparece no máximo a primeira derivada da função incógnita;
2. **ordinária**, pois não há derivadas parciais (derivamos apenas com relação ao tempo, que é a única variável independente);
3. **linear**, pois não há funções não lineares da incógnita e/ou de suas derivadas; e
4. **a coeficientes constantes**, pois consideramos que o resistor e o indutor não variam no tempo.

A seguir, vamos resolver uma equação diferencial desse tipo para então voltarmos a esse circuito. Porém, antes disso, faça o exercício abaixo.

Exercício 1 – Circuito R, C paralelo

Considere o circuito R, C paralelo alimentado por um gerador ideal de corrente e com condição inicial $v(t_0) = v_0$, como mostrado na Figura 2. Verifique que esse circuito pode ser escrito pela equação diferencial

$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{RC}v(t) = \frac{1}{C}i_s(t). \tag{3}$$

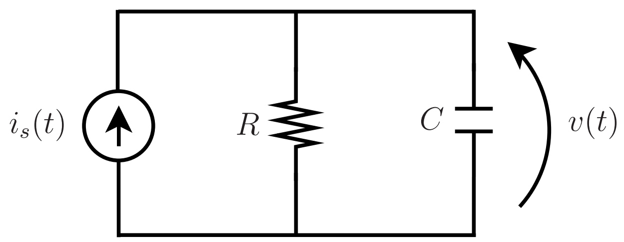

Figura 2: Circuito R, C paralelo alimentado por um gerador ideal de corrente.

2 Resolvendo uma equação diferencial de 1ª ordem

Considere a equação diferencial do tipo

$$\dot{x}(t) + \frac{1}{\tau}x(t) = f(t) \tag{4}$$

com condição inicial $x(t_0) = x_0$, em que $\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}$, $x(t)$ é a função incógnita, τ é uma constante real diferente de zero e $f(t)$ é uma função dada[3]. Como será visto nos cursos de *Cálculo*, a solução geral dessa equação para $t \geq t_0$ é dada por

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t), \tag{5}$$

em que $x_h(t)$ é a solução geral da equação homogênea

$$\dot{x}(t) + \frac{1}{\tau}x(t) = 0$$

e $x_p(t)$ é uma solução particular da equação completa (4). A seguir, vamos obter $x_h(t)$ e $x_p(t)$.

[3]Em *Circuitos Elétricos*, $f(t)$ é uma função da excitação ou entrada da rede.

2.1 Solução da equação homogênea

Vamos primeiramente resolver a equação homogênea

$$\dot{x}_h(t) = -\frac{1}{\tau}x_h(t), \tag{6}$$

Note que a função incógnita $x_h(t)$, solução da Equação (6), deve ter derivada proporcional à ela própria. Dada essa observação e descartando a solução trivial $x_h(t) = 0$, cabe uma pergunta: “que função não nula tem derivada proporcional a ela própria?” Uma possível candidata é a função exponencial. Portanto, vamos considerar que a solução de (6) é dada por

$$x_h(t) = Ae^{p(t-t_0)}, \tag{7}$$

cuja derivada vale

$$\dot{x}_h(t) = Ape^{p(t-t_0)}, \tag{8}$$

em que A e p são constantes. Substituindo (8) e (7) em (6), chega-se a

$$\underbrace{Ae^{p(t-t_0)}}_{\neq 0}\left(p + \frac{1}{\tau}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad p = -\frac{1}{\tau}.$$

Portanto, a solução não trivial da equação diferencial (6) é dada por

$$\boxed{x_h(t) = Ae^{-\frac{(t-t_0)}{\tau}}.} \tag{9}$$

Note que a constante τ que aparece dividindo $x(t)$ na equação completa (4) aparece na solução da equação homogênea dividindo $-(t - t_0)$ no argumento da exponencial. Essa constante desempenha um papel importante na solução. Para $\tau > 0$, quanto maior o valor de τ, mais lentamente a solução da equação homogênea $x_h(t)$ se aproxima de zero. É possível notar por análise dimensional que τ deve ter unidade de tempo e por isso é chamada de **constante de tempo**. Por exemplo, a constante de tempo do circuito R, L da Figura 1 vale

$$\tau = \frac{L}{R},$$

enquanto a constante de tempo do circuito R, C da Figura 2 vale

$$\tau = RC.$$

A constante A será determinada posteriormente. Como veremos, essa constante depende da solução particular da equação completa (4) e também da condição inicial $x(t_0) = x_0$.

2.2 Solução particular da equação completa

Substituindo (9) em (5), a solução da equação completa (4) se reduz a

$$x(t) = Ae^{-\frac{(t-t_0)}{\tau}} + x_p(t). \tag{10}$$

Ainda precisamos de uma solução particular $x_p(t)$ da equação geral. Note que a solução da equação homogênea, parcela $Ae^{-\frac{(t-t_0)}{\tau}}$ em (10), corresponde a uma resposta transitória que desaparece (tende a zero) para $\tau > 0$ e $t \to \infty$. Dessa forma, calculando o limite para $t \to \infty$ em ambos os lados de (10), obtemos

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \underbrace{\lim_{t\to\infty} Ae^{-\frac{(t-t_0)}{\tau}}}_{=0} + \lim_{t\to\infty} x_p(t). \tag{11}$$

Em outras palavras,

> uma solução particular da equação completa (4) é dada pela resposta permanente de $x(t)$, ou seja, a expressão de $x(t)$ quando $t \to \infty$.

Exemplo 1 – Resposta do circuito R, L ao degrau

No circuito da Figura 1, considere que a excitação seja dada por

$$e_s(t) = EH(t - t_0)$$

e que a corrente inicial do indutor valha $i(t_0) = i_0$. Sabemos que para essa excitação, o indutor irá se comportar como um curto-circuito em regime ($t \to \infty$) e portanto

$$i(t)\Big|_{t\to\infty} = \frac{E}{R} = i_p(t).$$

Neste caso, a solução particular da equação geral é constante e é fácil verificar que ela satisfaz (2) para $t \geq t_0$. Assim, a expressão da corrente do indutor do circuito da Figura 1 é dada por

$$i(t) = i_h(t) + i_p(t) = Ae^{-\frac{(t-t_0)}{\tau}} + \frac{E}{R}, \quad t \geq t_0. \tag{12}$$

Como vimos, a constante de tempo desse circuito vale $\tau = L/R$. Para completar a resposta, ainda precisamos calcular a constante A. Para isso, vamos impor a condição inicial $i(t_0) = i_0$, ou seja,

$$i(t_0) = i_0 = A + \frac{E}{R} \quad \Rightarrow \quad A = \left(i_0 - \frac{E}{R}\right).$$

Cabe observar que a A depende da condição inicial e da excitação. Substituindo A em (12), chegamos a

$$\boxed{i(t) = \left(i_0 - \frac{E}{R}\right) e^{-\frac{(t-t_0)}{L/R}} + \frac{E}{R}, \quad t \geq t_0.} \tag{13}$$

Como discutimos anteriormente, a parcela que corresponde à solução da equação homogênea desaparece com o passar do tempo e por isso é chamada de **resposta transitória**, enquanto a parcela que corresponde à solução particular da equação completa é a **resposta permanente**. Note que calculando $i(t)$ em $t = t_0$, obtemos a condição inicial $i(t_0) = i_0$ e calculando o limite dessa expressão para $t \to \infty$, chega-se a $i(\infty) = E/R$, que é a resposta em regime permanente.

Além disso, se $e_s(t) = 0$, dizemos que o circuito está **livre** e a resposta se reduz a

$$i_{\text{livre}}(t) = i_0 e^{-\frac{(t-t_0)}{L/R}}, \quad t \geq t_0,$$

que é chamada de **resposta livre** e ocorre devido apenas às condições iniciais. Em contrapartida, se $i_0 = 0$ e $e_s(t) = EH(t - t_0)$, a resposta se reduz a

$$i_{\text{forçada}}(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{(t-t_0)}{L/R}}\right), \quad t \geq t_0.$$

que é chamada de **resposta forçada** e ocorre devido apenas à função de excitação. Os gráficos dessas respostas estão mostrados na Figura 3 para $t_0 = 0$, $i_0 = 2$ A, $L = 1$ H, $R = 2\ \Omega$ e $e_s(t) = 12H(t)$ (V, s).

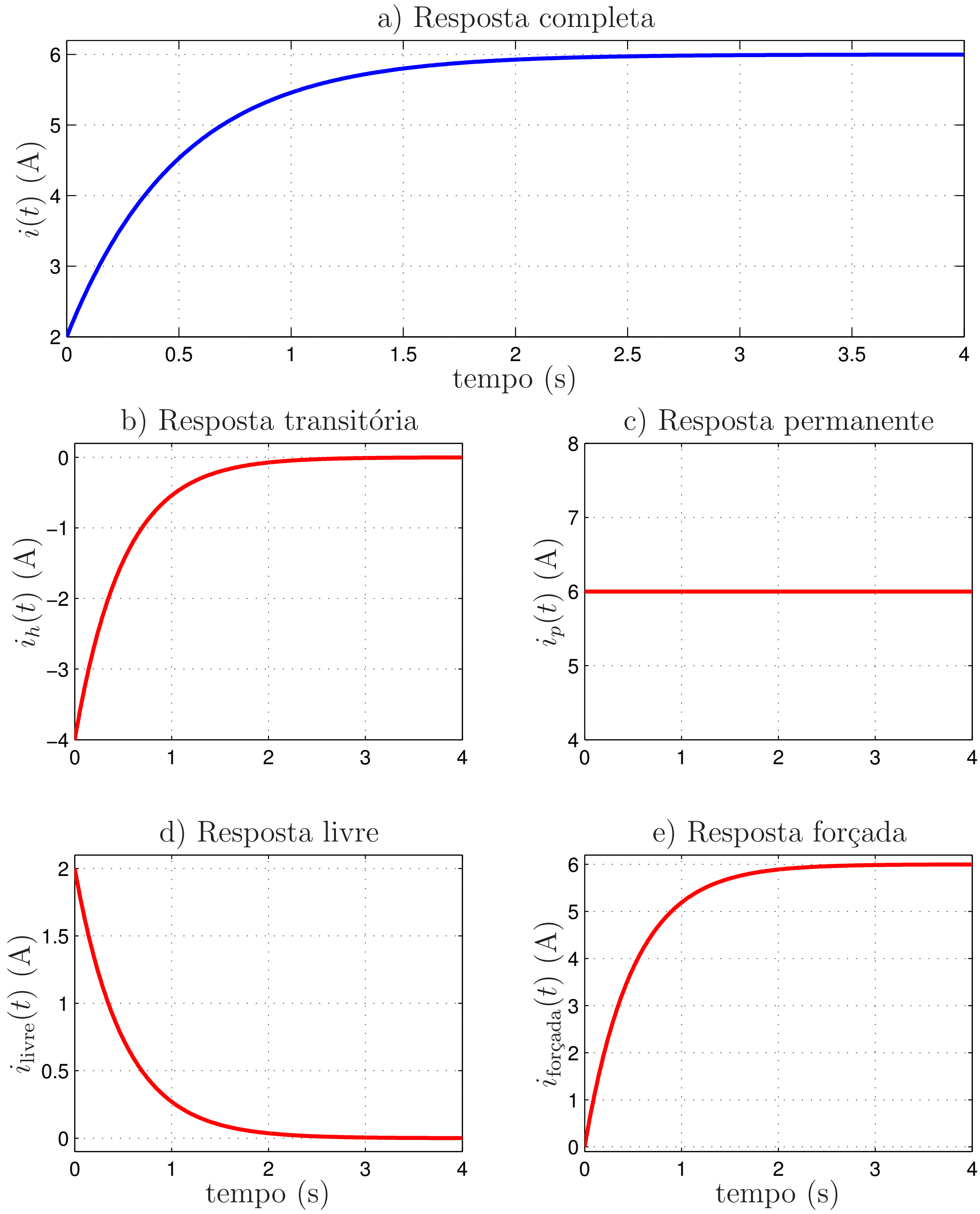

Figura 3: Respostas do circuito da Figura 1, considerando $t_0 = 0$, $i_0 = 2$ A, $L = 1$ H, $R = 2\ \Omega$, $e_s(t) = 12H(t)$, (V, s).

Usando o princípio da superposição, podemos verificar que

$$i(t) = i_{\text{transitória}}(t) + i_{\text{permanente}}(t)$$

e

$$i(t) = i_{\text{livre}}(t) + i_{\text{forçada}}(t).$$

Exercício 2 – Resposta do circuito R, C ao degrau

Considere o circuito R, C paralelo da Figura 2 com excitação $i_s(t) = IH(t - t_0)$ e condição inicial $v(t_0) = v_0$. Verifique que a expressão da tensão do capacitor para $t \geq t_0$ é dada por

$$\boxed{v(t) = (v_0 - RI)\, e^{-\frac{(t-t_0)}{RC}} + RI, \quad t \geq t_0.} \tag{14}$$

Obtenha as expressões das respostas transitória, permanente, livre e forçada para esse circuito e faça gráficos dessas respostas para $t_0 = 0$, $v_0 = 8$ V, $C = 0{,}5$ F, $R = 2\ \Omega$, $i_s(t) = 2H(t)$ (A, s).

Exemplo 2 – Resposta do circuito R, C à excitação senoidal

Considere o circuito R, C paralelo da Figura 2 com excitação $i_s(t) = 2\cos(2t + 125{,}54^{\mathrm{o}})H(t)$, (A, s) e condição inicial $v(0) = 8$ V. Adote $C = 0{,}5$ F e $R = 6\ \Omega$ e determine a resposta completa neste caso.

Substituindo os dados na equação diferencial (3), chega-se a

$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{3}v(t) = 4\cos(2t + 125{,}54^{\mathrm{o}}). \tag{15}$$

Para resolver essa equação, vamos obter inicialmente uma solução particular. Como a excitação é senoidal e o circuito é linear, sabemos que em regime permanente a tensão do capacitor também será senoidal com $\omega = 2$ rad/s. Para obter $v_p(t)$, podemos usar fasores. A impedância desse circuito é dada por (verifique!)

$$Z(j\omega) = \frac{R}{1 + j\omega RC} \Rightarrow Z(j2) = \frac{6}{1 + j6} = 0{,}1622 - j0{,}9730 = 0{,}9864e^{-j80{,}54^{\mathrm{o}}}\ \Omega.$$

O fasor da tensão do capacitor vale

$$\widehat{V}_p = Z(j2) \cdot \widehat{I}_s = 0{,}9864e^{-j80{,}54^{\mathrm{o}}} \cdot 2e^{j125{,}54^{\mathrm{o}}} = 1{,}9728e^{j45^{\mathrm{o}}}\ \mathrm{V}$$

e consequentemente a expressão de sua resposta permanente é

$$v_p(t) = 1{,}9728\cos(2t + 45^{\mathrm{o}}),\ (\mathrm{V}, \mathrm{s}). \tag{16}$$

Substituindo $v_p(t)$ em (15), chega-se a

$$-2 \cdot 1{,}9728\ \mathrm{sen}(2t + 45^{\mathrm{o}}) + \frac{1}{3}1{,}9728\cos(2t + 45^{\mathrm{o}}) = 4\cos(2t + 125{,}54^{\mathrm{o}}),$$

ou ainda,

$$3,9456\cos(2t+135^o)+0,6576\cos(2t+45^o)=4\cos(2t+125,54^o).$$

Essa igualdade pode ser verificada facilmente usando fasores, o que mostra que a tensão do capacitor em regime permanente senoidal dada por (16) satisfaz (15), sendo uma solução particular dessa equação diferencial.

Uma vez encontrada a solução particular e lembrando que a constante de tempo do circuito R, C vale $\tau = RC = 3$ s, podemos obter a solução completa dada por

$$v(t)=v_h(t)+v_p(t)=Ae^{-t/3}+1,9728\cos(2t+45^o),\quad t\geq 0. \tag{17}$$

Ainda precisamos descobrir o valor de A e para isso, vamos impor a condição inicial $v(0) = 8$ V, ou seja,

$$v(0)=8=A+1,9728\cos(2\cdot 0+45^o)\Rightarrow A=8-1,9728\cos(45^o)=6,6050\text{ V}. \tag{18}$$

Assim, a expressão da tensão do capacitor para $t \geq 0$ vale

$$\boxed{v(t)=6,6050\ e^{-t/3}+1,9728\cos(2t+45^o),\ (\text{V, s}).} \tag{19}$$

Essa expressão é composta de dois termos: resposta transitória e resposta permanente. A resposta livre será dada por

$$v_{\text{livre}}(t)=v_0e^{-t/\tau}=8\ e^{-t/3}.$$

e a resposta forçada por

$$v_{\text{forçada}}(t)=v(t)-v_{\text{livre}}(t)=\underbrace{-1,3950}_{=6,6050-8}\ e^{-t/3}+1,9728\cos(2t+45^o).$$

Os gráficos dessas respostas estão mostrados na Figura 4.

Exercício 3 – Resposta do circuito R, L à excitação senoidal

Considere o circuito R, L série da Figura 1 com excitação $e_s(t)=10\cos(5t+30^o)H(t),\ (\text{V}, \text{s})$ e condição inicial $i(0) = -4$ A. Adote $L = 0{,}5$ H e $R = 10\ \Omega$. Obtenha a expressão de $i(t)$ para $t \geq 0$ e obtenha também expressões das respostas transitória, permanente, livre e forçada para esse circuito. Esboce os gráficos dessas respostas.

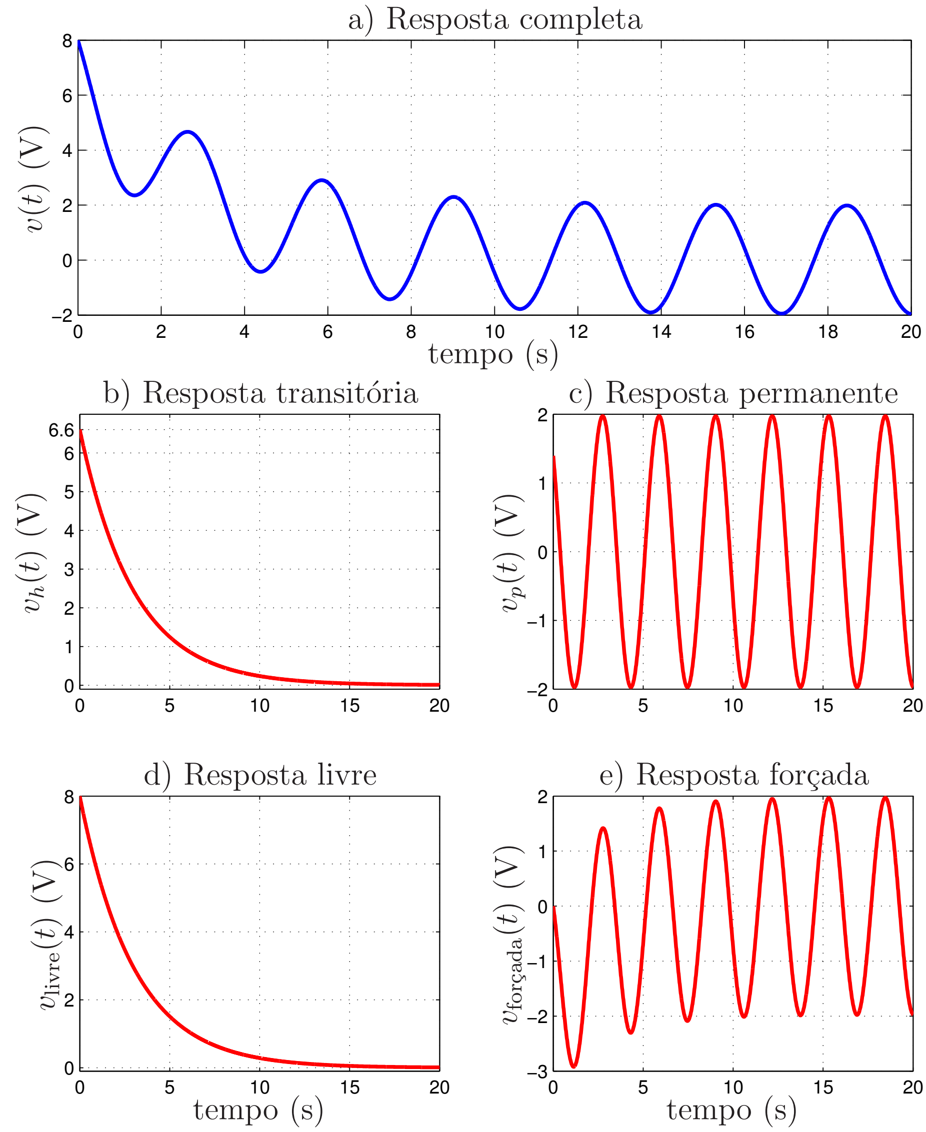

Figura 4: Respostas do circuito da Figura 2, considerando $t_0 = 0$, $v_0 = 8$ V, $C = 0{,}5$ F, $R = 6\ \Omega$, $i_s(t) = 2\cos(2t + 125{,}54^{\circ})H(t)$, (V, s).