ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Departamento de Engenharia de Sistemas Eletrônicos
PSI - EPUSP

# PSI.3212 – LABORATÓRIO DE CIRCUITOS ELETRICOS

**Edição 2016**

## INTRODUÇÃO TEÓRICA

## MEDIDA DA CONSTANTE DE TEMPO E TEMPO DE SUBIDA EM REDES DE PRIMEIRA ORDEM RC e RL

WALTER JAIMES SALCEDO/R.ONMORI

### 1 – Objetivos

Análise de Circuitos *RC* e *RL* de 1.ª ordem com resposta natural, forçada e em regime permanente. Será estudada a constante de tempo de descida e subida em circuitos RC e RL, em regime permanente senoidal, e algumas aplicações em circuitos eletrônicos. O tempo de carga e descarga desses circuitos pode ser utilizado como temporizadores e osciladores.

### 2.- Introdução

As características tensão-corrente do capacitor e do indutor introduzem as equações diferenciais e a solução define a dinâmica temporal das variáveis de tensão e corrente elétrica. Como resposta do circuito, essa pode ser natural ou forçada. Na resposta natural, as energias armazenadas nos capacitores ou indutores são descarregadas. Normalmente são usados resistores elétricos para dissipar essa energia em um determinado tempo. Nessa medida temporal caracteriza-se a constante de tempo necessária para a extinção do regime natural.
Na resposta forçada destaca-se o interesse em particular o estudo da solução imposta por fontes constantes e fontes senoidais, muito importante na análise de circuitos.

### 2.1 - Constante de tempo de descarga de circuitos RC e RL

A solução de uma equação diferencial é composta por duas parcelas essencialmente distintas: solução ou resposta natural, que determina a dinâmica das variáveis na ausência de fontes independentes e solução forçada.

Considere-se o circuito *RC* e RL representado na Figura 1:

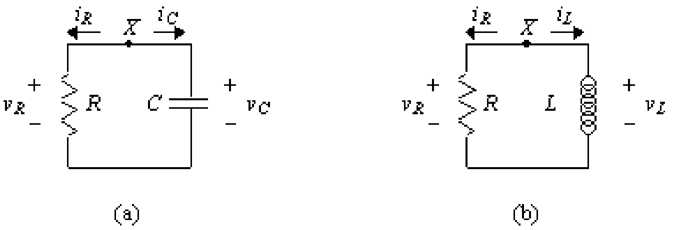


Figura 1 Circuitos *RC* (a) e *RL* (b) de 1ª ordem.

A equação diferencial linear de 1.ª ordem que descreve o circuito da figura 1-a será:

$$\frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{1}{RC}v_C(t) = 0 \quad (1)$$

cuja solução determina a dinâmica temporal da tensão e da corrente aos terminais do capacitor e da resistência.

Analogamente para o indutor conduzindo à equação diferencial linear de 1.ª ordem:

$$\frac{di_L(t)}{dt} + \frac{R}{L}i_L(t) = 0 \quad (2)$$

A solução geral para a equação de diferencial linear de 1.ª ordem será do tipo:

$$x(t) = A\, e^{\frac{t}{\tau}} \quad (3)$$

e a solução para o capacitor da figura 1-a:

$$Vc(t) = A\, e^{\frac{t}{\tau}} \quad (4)$$

com $\tau = R\,C$ , e a curva correspondente de Vc será conforme a figura2:

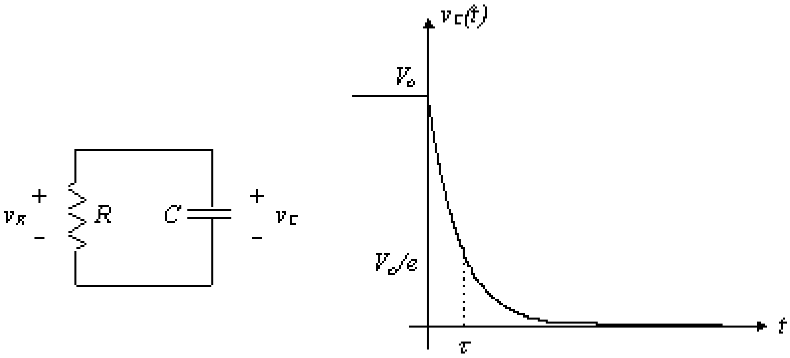


Figura 2 - Curva de tensão do capacitor - resposta natural.

Analogamente para o indutor:

$$i_L(t) = A\, e^{\frac{t}{\tau}} \quad (5)$$

com $\tau = L/R$ resulta numa resposta conforme mostrado na Fig. 3.

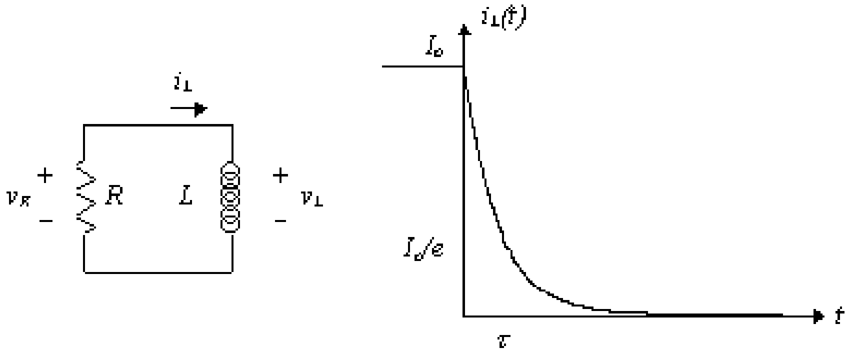


Figura 3 - Curva de corrente do indutor - resposta natural.

Com valores diferentes de R, pode-se variar o tempo de resposta do circuito (τ/10, τ, 2τ e 10τ) conforme ilustra a figura 4.

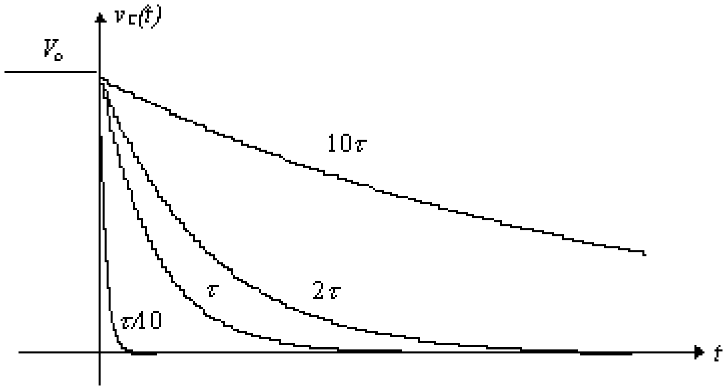


Figura 4 - Solução natural de um circuito *RC* em função da constante de tempo

## 2.2 Constante de tempo de circuitos RC e RL

A constante de tempo do circuito constitui uma medida do tempo necessário para a extinção do regime natural. Verifica-se assim que no instante de tempo $t = \tau$ as variáveis $v_C(t)$ ou $i_L(t)$ se encontram já reduzidas a uma fração $1/e$ do seu valor inicial.

## 2.3.- Medida da constante de tempo de carga circuitos RC e RL

## 2.4 Solução Forçada Constante (degrau) de um circuito *RC*

Considere-se o circuito *RC* (com fonte independente) representado na Figura 5 e admitir a fonte de tensão $v_s(t)$ definindo um sinal em degrau com origem em $t$ = 0s e amplitude $V_s$, ou seja, $v_s(t)= V_s.u(t)$. Admitir ainda no instante de tempo $t$ = 0s a tensão aos terminais do condensador é $v_C(0) = V_o$.

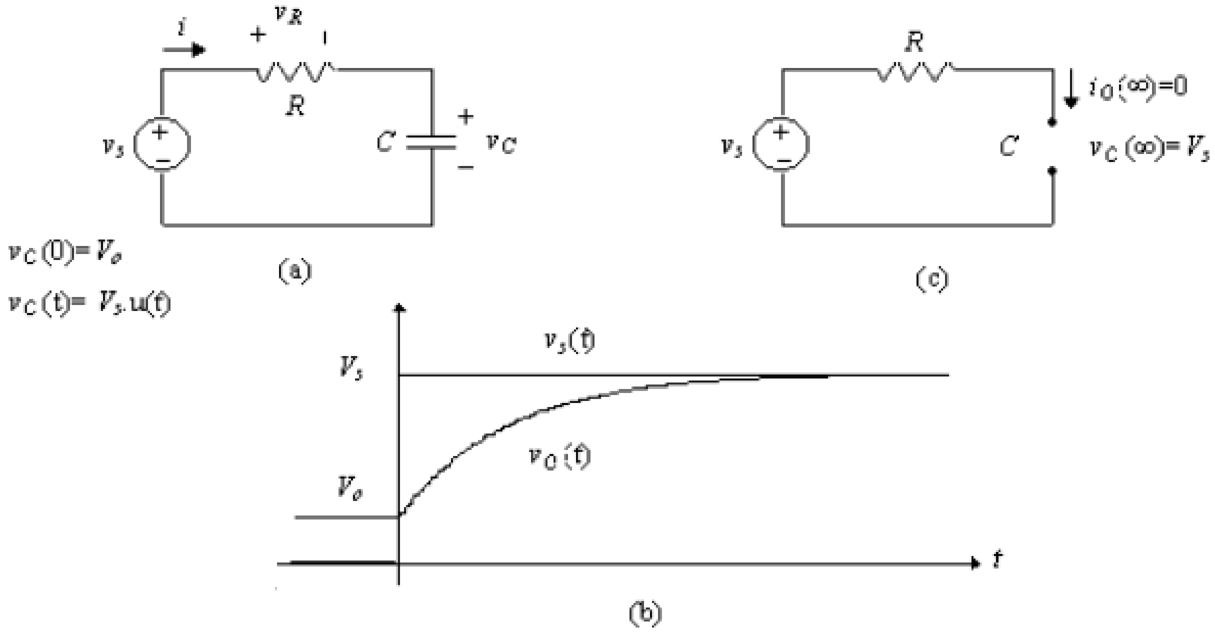


Figura 5 - Solução forçada (degrau) do circuito RC.

A solução será dada por:

$$v_C(t) = V_s + (V_o - V_s)e^{-t/\tau} \quad (6)$$

No caso do circuito R.C a tensão de saída do capacitor ($V_C$) será: $v_C = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$ , onde $\tau$ = R.C . A tensão final tende ao valor de “E”

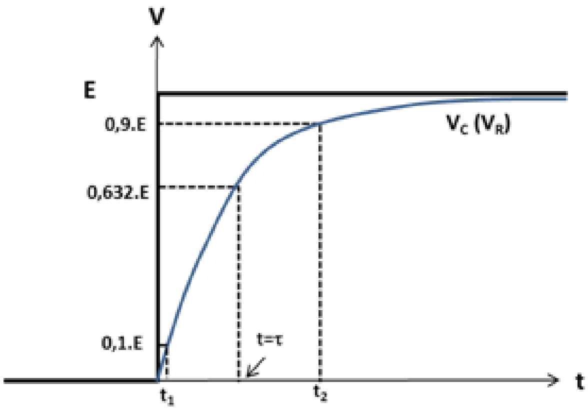


Figura 6 - Determinação do tempo de resposta τ do circuito RC.

Nestes circuitos a tensão de saída no instante **t = τ** é igual a 0,632 vezes o estado final (E).
O Tempo de subida define-se entre os instantes onde a tensão de saída atinge o 10% e 90% do valor final respectivamente.

$$t_r = t_2 - t_1 \quad (7)$$

No Circuito RC a frequência de corte para a resposta de estado estacionário acontece em $f_c = {}^{1}/_{(2\pi R.C)}$ , assim o produto $f_c.t_r$ será igual a:

$$f_c t_r = \frac{\ln(9)}{2\pi} \quad (8)$$

Assim, o formato da forma de onda na saída destes sistemas quando excitadas com uma onda quadrada de baixa frequência ( 1/T << 1/τ) será como o sinal mostrado na Figura 3.

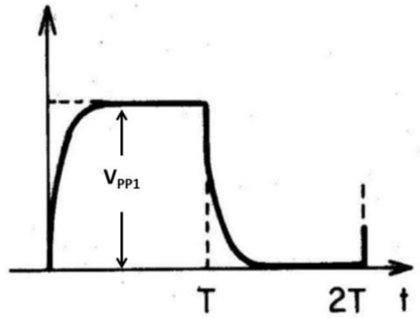


Figura 7.

### 2.5 Solução Forçada Senoidal de um circuito *RC*

Como visto na experiência anterior, é possível usar um sinal senoidal em um circuito RC e obter a sua resposta em função da frequência conforme a figura 8.

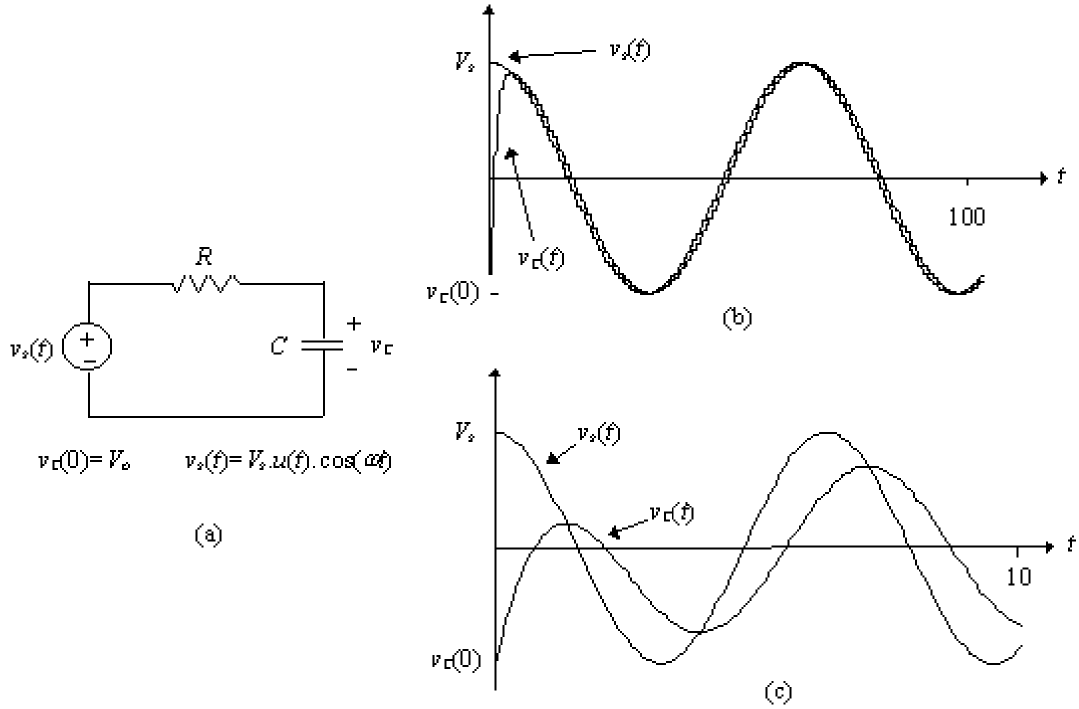


Figura 8 - Respostas forçada senoidal do circuito RC.

Na figura 8 representam-se as dinâmicas temporais de um circuito RC de 1.ª ordem com condição inicial distinta de zero e termo forçado senoidal.

A frequência do sinal forçado é $\omega = (10RC)^{-1}$ em (b) e $\omega = (RC)^{-1}$ em (c).

Nesta figura são visíveis três características fundamentais do regime forçado senoidal:

***(i)*** após a extinção da solução natural, a tensão aos terminais do capacitor segue a forma senoidal da fonte independente, designadamente a mesma frequência;

***(ii)*** existe uma diferença entre as amplitudes das senóides aplicada e medida aos terminais do capacitor, que se constata depender da relação entre a frequência da senóide e os parâmetros *R* e *C* do circuito;

***(iii)*** existe uma diferença de fase entre as senóides aplicada e medida aos terminais do capacitor, que mais uma vez se constata ser uma função da relação entre a frequência da senóides e os parâmetros *R* e *C* do circuito.

## 3.- Oscilador de onda quadrada utilizando um circuito RC

O oscilador de onda quadrada com um circuito RC está embasada na resposta de um circuito comparador. Para o melhor entendimento do oscilador de onda quadrada, primeiro analisaremos a resposta de um circuito comparador.

### 3.1. Comparador (Circuito de disparo - Schmitt invertido)

No circuito da Figura 9 a tensão de entrada $V_{in}$ alimenta a entrada $V_-$ do amplificador operacional e tem uma realimentação positiva (ver eq. 9).

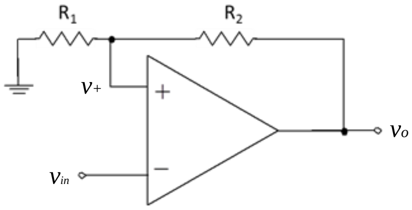


Figura 9 - Circuito de um amplificador na configuração "comparador".

O comportamento desse circuito, atuando como comparador, pode ser descrita por meio de um gráfico de $V_0$ em função de $V_{in}$, conforme mostrada na Fig. 10 (conhecida como curva de histereses, pois o caminho percorrido é distinto). A mudança de estado da tensão de saída ($V_0$) de $V_H$ (*high*) para $V_L$ *(low)* ocorre nas tensões $V_{TU}$ e $V_{TL}$, respectivamente. A tensão na entrada (V+) do amplificador operacional é função do sinal de saída Vo como pode ser visto na Eq.9:

$$V_+ = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_0 \quad (9).$$

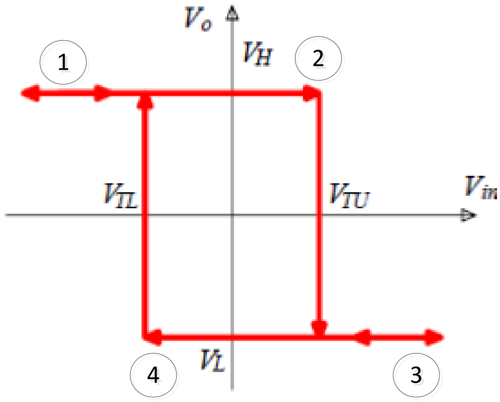


Figura 10 - Curva de histerese do "comparador".

Vamos analisar o comportamento do circuito (Fig. 9) passo-a-passo, supondo inicialmente que o nível de saída encontra-se em $V_0 = V_H$.

- Enquanto nível de entrada for menor que $V_{TU}$, intervalo entre (1) e (2), a saída permanecerá em $V_H$.
- Quando a entrada se tornar maior que $V_{TU}$ a saída mudará para o nível $V_{L.}$
- Enquanto nível de entrada for maior que $V_{TL}$, intervalo entre (3) e (4), a saída permanecerá em $V_L$.
- Quando a entrada se tornar menor que $V_{TL}$ a saída mudará para o nível $V_{H,}$ ou seja para a condição inicial

As tensões limiares são dadas pelas seguintes expressões:

$$V_{in} = V_{TU} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_H \quad (10)$$

$$V_{in} = V_{TL} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_L \quad (11)$$

### 3.2. Oscilador de onda quadrada

Para fazer um oscilador, usa-se o circuito da figura 9 com algumas alterações. O oscilador de onda quadrada é um sistema de realimentação positiva e negativa como usada anteriormente. Para fazer o circuito oscilar, utiliza-se a carga e descarga de um capacitor para promover a mudança de estado do oscilador. O circuito do oscilador de onda quadrada é mostrado na Figura 11.

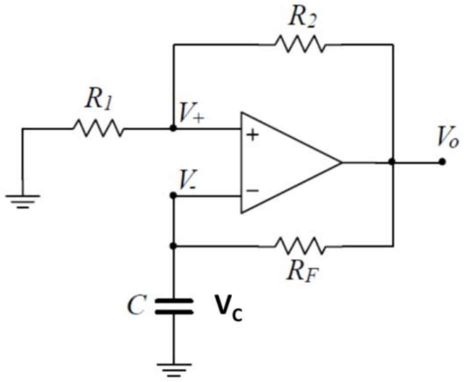


Figura 11 - Oscilador com amplificador operacional.

A curva de resposta do oscilador é mostrada na Figura 12.

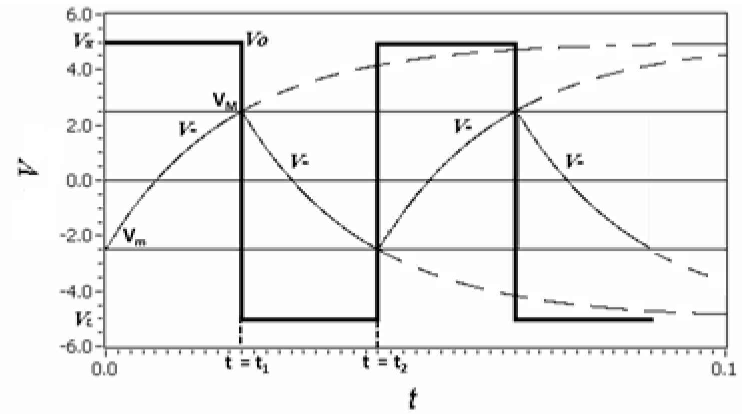


Figura 12 Gráfico das tensões do oscilador.

Como pode ser demonstrado, o período da onda quadrada é expresso por:

$$T = 2.t_1 = 2R_F C.\ln\left(1 + 2\frac{R_1}{R_2}\right) \qquad (12)$$

Observe que o período é uma função do produto $R_F C$ e da razão $R_1/R_2$.