IFUSP

Eletricidade e Magnetismo I

GABARITO PROVA 1 — 18/4/2013

Questão 1 (1)

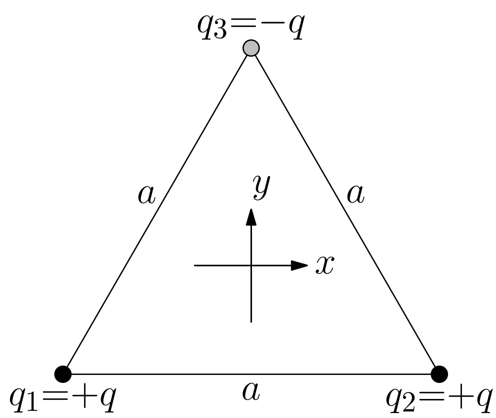
Três cargas de mesmo módulo, q, estão fixas nos vértices de um triângulo equilátero de lado a, como mostra a figura.

(0,5): a) Indique num diagrama as direções e sentidos das forças que atuam sobre cada carga.

(1,0): b) Calcule o módulo de cada uma das três forças.

(0,5): c) Utilizando as direções x e y indicadas na figura, escreva a expressão vetorial de cada força.

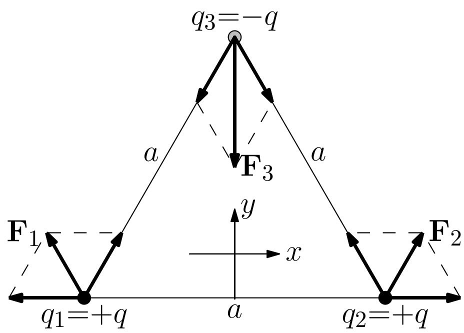
(0,5): d) Determine a energia eletrostática do sistema de cargas.



$$\mathbf{F}_{ij} = k\frac{q_i q_j}{r_{ij}^2}\,\hat{\mathbf{r}}_{ij} \qquad U = \sum_i \sum_{j<i} k\frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

Lei de Coulomb

a)



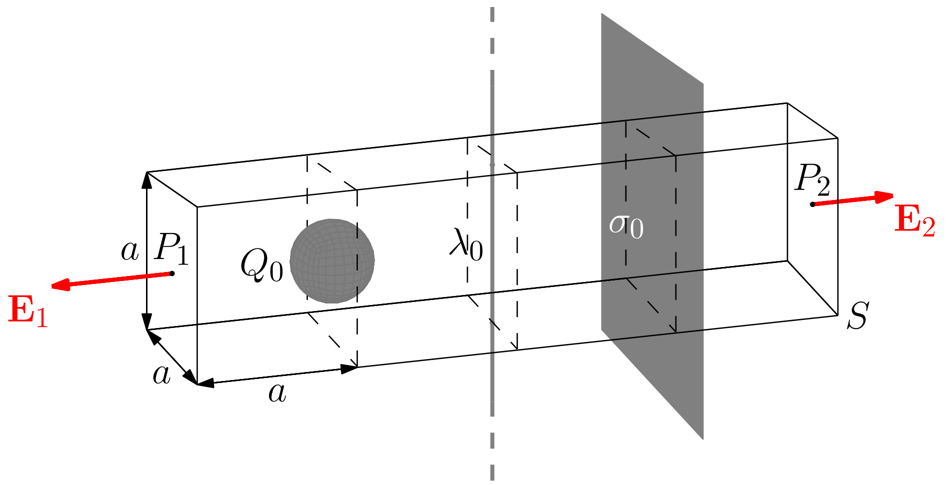
b) As forças entre cada par de cargas têm o mesmo módulo, $F_0 = kq^2/a^2$. Na figura acima vemos que:

$$\boxed{|\mathbf{F}_1| = |\mathbf{F}_2| = F_0 = k\frac{q^2}{a^2} \qquad |\mathbf{F}_3| = \sqrt{3}F_0 = \sqrt{3}k\frac{q^2}{a^2}}$$

c) $$\boxed{\mathbf{F}_1 = k\frac{q^2}{2a^2}\left(-\hat{\mathbf{x}} + \sqrt{3}\,\hat{\mathbf{y}}\right) \qquad \mathbf{F}_2 = k\frac{q^2}{2a^2}\left(+\hat{\mathbf{x}} + \sqrt{3}\,\hat{\mathbf{y}}\right) \qquad \mathbf{F}_3 = k\frac{q^2}{a^2}\left(-\sqrt{3}\,\hat{\mathbf{y}}\right)}$$

d) $$\boxed{U = \frac{k}{a}(q_1q_2 + q_1q_3 + q_2q_3) = -k\frac{q^2}{a}}$$

Questão 2	(2)



Considere o arranjo de cargas elétricas esboçado na figura: uma esfera isolante com carga total Q_0 uniformemente distribuída, um fio isolante muito longo com densidade linear de carga uniforme λ_0 e uma placa plana muito grande, isolante, com densidade superficial de carga uniforme σ_0. Todas as cargas são positivas.
A superfície S é a face externa de uma região definida por quatro cubos de aresta a adjacentes como indica a figura. A aresta dos cubos é igual ao espaçamento entre o centro da esfera e o fio e também à distância entre o fio e a placa.

(1,0): a) Qual é o fluxo do campo elétrico total através da superfície S, Φ_0?

(1,5): b) Determine o campo elétrico nos pontos P_1 e P_2 indicados na figura, que se encontram nos centros das faces de S.

$$\text{Lei de Gauss: } \oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_S \qquad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,\hat{\mathbf{r}} \qquad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\,\hat{\mathbf{r}} \qquad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\,\hat{\mathbf{r}}$$

Lei de Gauss

a) Da lei de Gauss $\Phi_S = \frac{1}{\epsilon_0} Q_S$, onde Q_S é a carga interna à superfície S. No caso Q_S é composta da carga da esfera e das cargas das porções do fio e da placa internas a S.

$$\boxed{\Phi_S = \frac{1}{\epsilon_0}\left(Q_0 + a\lambda_0 + a^2\sigma_0\right)}$$

b) Por simetria os campos $\mathbf{E}_1$ (em P_1) e $\mathbf{E}_2$ (em P_2) são perpendiculares às faces respectivas de S, como indicado na figura. Como todas as cargas são positivas, ambos os campos apontam para *fora*. Usando as fórmulas dadas para os campos da esfera, do fio infinito e do plano infinito, os módulos dos campos $\mathbf{E}_1$ e $\mathbf{E}_2$ são:

$$\boxed{E_1 = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{a^2} + \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{2a} + \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}}$$

$$\boxed{E_2 = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{9a^2} + \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{2a} + \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}}$$

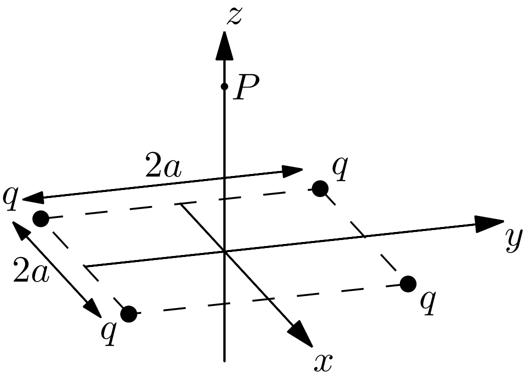
Questão 3	(3)

Quatro partículas pontuais com cargas idênticas q se encontram fixas nos vértices de um quadrado de lado $2a$, como mostra a figura.

(1,0): a) Calcule o potencial elétrico num ponto genérico do eixo z, $P = (0{,}0{,}z)$.

(0,5): b) Supondo as cargas positivas, quais são a direção e o sentido do campo elétrico num ponto do eixo tal que $z > 0$? Justifique.

(1,0): c) Calcule o campo elétrico $\mathbf{E}(0{,}0{,}z)$ a partir dos resultados anteriores.



$$V(\mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_j \frac{q_j}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}_j|} \qquad \mathbf{E} = -\operatorname{grad} V = -\frac{\partial V}{\partial x}\,\hat{\mathbf{x}} - \frac{\partial V}{\partial y}\,\hat{\mathbf{y}} - \frac{\partial V}{\partial z}\,\hat{\mathbf{z}}$$

Potencial Elétrico

a) Para cada uma das quatro cargas $|\mathbf{R} - \mathbf{r}_j|^2 = z^2 + 2a^2$, assim

$$\boxed{V(0{,}0{,}z) = \frac{4q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{z^2 + 2a^2}}}$$

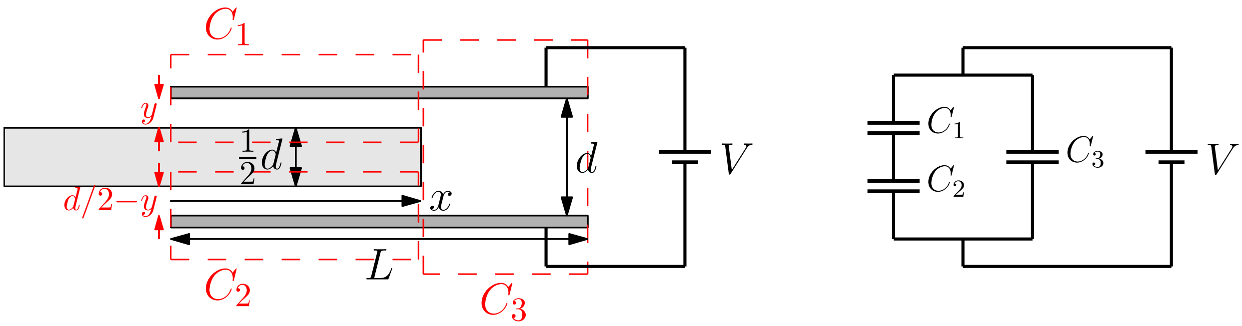
b) A simetria da localização das cargas anula as componentes do campo elétrico paralelas ao plano das cargas para qualquer ponto do eixo z. Assim, o campo elétrico em pontos deste eixo só tem a componente paralela. Supondo as cargas positivas, para $z > 0$ o campo aponta na direção $+\,\hat{\mathbf{z}}$.

c) Como o campo elétrico em pontos do eixo só tem a componente z, $\mathbf{E}(0{,}0{,}z) = E(z)\,\hat{\mathbf{z}}$ com:

$$E(z) = -\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{q}{\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial z} \left(z^2 + 2a^2\right)^{-1/2} = -\frac{q}{\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{2} \left(z^2 + 2a^2\right)^{-3/2} 2z \right].$$

Ou seja: $$\boxed{\mathbf{E}(0{,}0{,}z) = \frac{q}{\pi\epsilon_0} \frac{z}{(z^2 + 2a^2)^{3/2}}\,\hat{\mathbf{z}}.}$$

Questão 4	(4)



No arranjo esquematizado à esquerda na figura, temos um capacitor de placas paralelas quadradas de lado L e espaçamento d, no interior do qual se introduz parcialmente uma placa metálica, também quadrada de lado L e espessura $d/2$. As placas externas estão conectadas a uma bateria que mantém uma tensão constante V entre elas. O circuito equivalente a este arranjo se encontra à direita na figura. Considere $d \ll L$ e use a aproximação de placas infinitas.

(1,0): a) Calcule as capacitâncias C_1, C_2 e C_3 em função de x (comprimento da porção da placa metálica que foi inserida no capacitor).

(1,0): b) Mostre que a capacitância equivalente do sistema é dada por: $C(x) = \dfrac{\epsilon_0 L}{d}(x+L)$.

(0,5): c) A a força horizontal entre o capacitor e a placa metálica pode ser obtida de $F = \dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}$, onde $U(x)$ é a energia eletrostática armazenada no sistema. Calcule esta força e expresse-a em termos da carga total no capacitor.

$$Q = CV \qquad C = \frac{\epsilon_0 A}{d} \qquad C_p = \sum C_i \qquad \frac{1}{C_s} = \sum \frac{1}{C_i} \qquad U = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CV^2$$

Capacitores e energia eletrostática

a) Os contornos dos capacitores C_1, C_2 e C_3 estão indicados na figura.
Se y é a separação entre a placa metálica e a placa superior do capacitor, a separação entre a placa metálica e a placa inferior do capacitor é $d/2 - y$. A figura sugere $y = d/4$.

O capacitor C_1 tem área xL e separação y: $\boxed{C_1 = \dfrac{\epsilon_0 Lx}{y} = \dfrac{\epsilon_0 4Lx}{d}.}$

O capacitor C_2 tem área xL e separação $d/2 - y$: $\boxed{C_2 = \dfrac{\epsilon_0 Lx}{d/2 - y} = \dfrac{\epsilon_0 4Lx}{d}.}$

O capacitor C_3 tem área $(L-x)L$ e separação d: $\boxed{C_3 = \dfrac{\epsilon_0 L(L-x)}{d}}.$

b) A associação de C_1 e C_2 em série tem capacitância equivalente C_{12} tal que

$$\frac{1}{C_{12}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{y}{\epsilon_0 Lx} + \frac{d/2 - y}{\epsilon_0 Lx} = \frac{d}{2\epsilon_0 Lx} \Rightarrow C_{12} = \frac{2\epsilon_0 Lx}{d}.$$

Note que este resultado é independente de y. A associação final é C_{12} em paralelo com C_3:

$$C(x) = C_{12} + C_3 = \frac{\epsilon_0 2Lx}{d} + \frac{\epsilon_0 L(L-x)}{d} = \frac{\epsilon_0 L(L+x)}{d},$$

como indicado.

c) A energia do capacitor é:

$$U(x) = \tfrac{1}{2}C(x)V^2 = \frac{1}{2}\frac{\epsilon_0 L(L+x)}{d}V^2,$$

o que resulta para a força

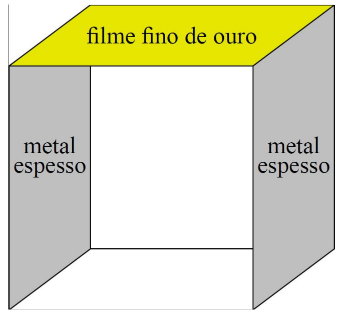
$$F = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}\frac{\epsilon_0 L}{d}V^2.$$

Substituindo $V = Q/C(x)$:

$$F = \frac{1}{2}\frac{\epsilon_0 L}{d}\left(\frac{Q}{C(x)}\right)^2 \Rightarrow \boxed{F = \frac{Q^2 d}{2\epsilon_0 L}\frac{1}{(L+x)^2}}.$$

Questão 5	(5)

A Figura mostra um cubo de sílica de aresta $a = 3{,}0$ cm. Sobre duas faces opostas são depositados filmes espessos de metal, e uma terceira face recebe um filme de ouro com espessura t de apenas $1{,}0 \times 10^{-6}$ cm. Uma voltagem V de $1{,}0$ mV é aplicada entre as faces metalizadas com filmes espessos.



(1,5): a) Calcule a resistência do dispositivo.
(1,0): b) Calcule a potência dissipada no filme de ouro.

Dados: $\rho_{\text{Au}} = 2{,}25\times10^{-8}\ \Omega\cdot\text{m}$ $\rho_{\text{Sílica}} = 7{,}5\times10^{17}\ \Omega\cdot\text{m}$ $\mathbf{E} = \rho\mathbf{J}$ $R = \rho\ell/A$ $P = VI = RI^2$

Lei de Ohm