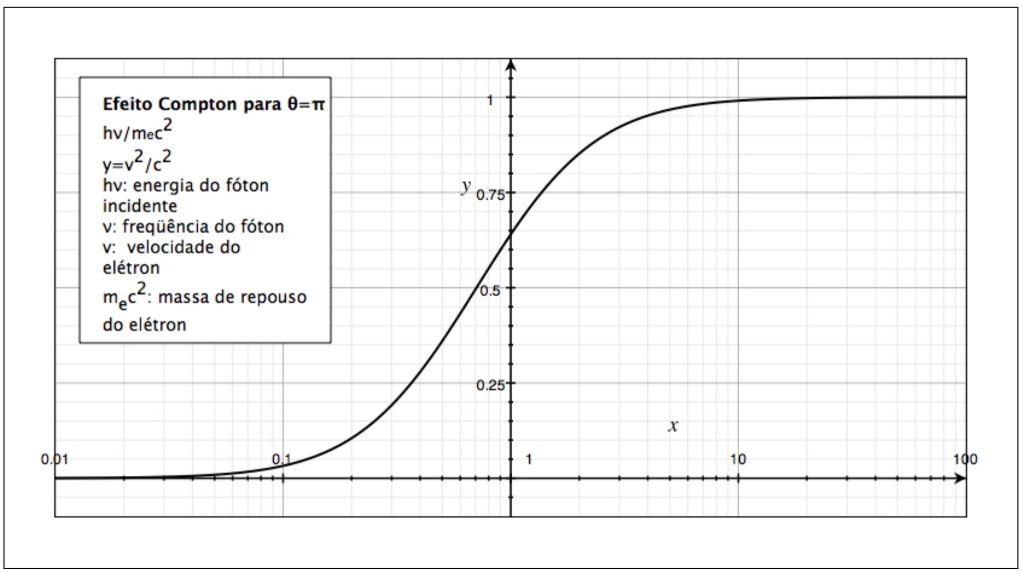
Efeito Compton Não-Relativístico

Celso L. Lima (IFUSP)

A figura abaixo mostra o comportamento de $y = \upsilon^2/c^2$ (υ e c são a velocidade do elétron e a da luz, respectivamente) em função de $x = h\nu/m_ec^2$ (razão entre a energia do fóton incidente e a energia de repouso do elétron) no espalhamento Compton quando $\theta = \pi$, o que corresponde ao ângulo de máxima transferência de energia para o elétron.



Nas condições da experiência de Compton (R-X com $\nu = 4.22 \times 10^{18}$ Hz, correspondendo a $E_{R-X} = 17.44$ keV, incidindo sobre carbono), tratar o elétron relativísticamente não deveria ser essencial, pois υ^2/c^2 é da ordem de 0.004 quando $E_{R-X}/m_ec^2 = \frac{17.44 \text{ keV}}{511 \text{ keV}} \sim 0.034$, tornando aceitável o uso de mecânica não-relativística para o elétron.

Lembre que a energia cinética relativística,

$$K = \frac{m_ec^2}{\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}} - m_ec^2,$$

pode ser expandida em potências de $(\upsilon/c)^2$ como:

$$\begin{aligned} K &= m_e c^2 \left[\left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{-1/2} - 1 \right] \\ &= m_e c^2 \left[1 + \frac{1}{2}\frac{\upsilon^2}{c^2} + \frac{3}{8}\left(\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^2 + ... - 1 \right] \\ &= m_e c^2 \left[\frac{1}{2}\frac{\upsilon^2}{c^2} + \frac{3}{8}\left(\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^2 + ... \right] \end{aligned}$$

Assim, se $\upsilon^2/c^2 \sim 0.004$, o termo seguinte na expansão é extremamente pequeno ($(\upsilon^2/c^2)^2 \sim (0.004)^2 \sim 0.000\,016$) e portanto $K \simeq \frac{1}{2} m_e \upsilon^2$. Conclusões análogas valem para a massa e momento linear: $m(\upsilon) = m_e \left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{-1/2} \rightarrow m_e$ e $p = m(\upsilon)\,\upsilon \rightarrow m_e \upsilon$.

Tentando avaliar qual seria o ingrediente essencial no espalhamento Compton, vou obter a seguir a expressão do efeito Compton, utilizando as expressões clássicas (i.e., não relativísticas) para o elétron [1].

Vou designar por E_0 e $\overrightarrow{p_0}$ a energia e o momento do fóton incidente, E_1 e $\overrightarrow{p_1}$ a energia e momento do fóton espalhado e, finalmente, E_e e $\overrightarrow{p_e}$ designam as variáveis relativas ao elétron; θ denota o ângulo de espalhamento do fóton.

A conservação da energia nos dá:

$$\begin{aligned} E_0 &= E_1 + E_e \\ h\nu_0 &= h\nu_1 + \frac{p_e^2}{2m_e} \end{aligned}$$

e da conservação do momento linear obtemos:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{p_0} &= \overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_e} \\ \overrightarrow{p_e} &= \overrightarrow{p_0} - \overrightarrow{p_1}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} p_e^2 &= (\overrightarrow{p_0} - \overrightarrow{p_1}) \cdot (\overrightarrow{p_0} - \overrightarrow{p_1}) \\ p_e^2 &= p_0^2 + p_1^2 - 2p_0 p_1 \cos\theta \end{aligned}$$

Lembrando que o momento do fóton pode ser escrito em termos da freqüência (ou do comprimento de onda) como:

$$p_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{h\nu_0}{c} = \frac{h}{\lambda_0}$$
$$p_1 = \frac{h}{\lambda_1} = \frac{h\nu_1}{c} = \frac{h}{\lambda_1}$$

obtemos:

$$\frac{p_e^2}{2m_e} = \frac{h^2}{2m_e c^2}\left(\nu_0^2 + \nu_1^2 - 2\nu_0\nu_1\cos\theta\right)$$

e

$$h\left(\nu_0 - \nu_1\right) = \frac{h^2}{2m_e c^2}\left(\nu_0^2 + \nu_1^2 - 2\nu_0\nu_1\cos\theta\right)$$
$$\left(\nu_0 - \nu_1\right) = \frac{h}{2m_e c^2}\left(\nu_0^2 + \nu_1^2 - 2\nu_0\nu_1\cos\theta\right).$$

Fatorando adequadamente o termo do lado direito obtemos:

$$\begin{aligned}\left(\nu_0 - \nu_1\right) &= \frac{h}{2m_e c^2}\left(2\nu_0\nu_1\right)\left(\frac{\nu_0^2 + \nu_1^2}{2\nu_0\nu_1} - \cos\theta\right) \\ &= \frac{h}{m_e c^2}\nu_0\nu_1\left(1 - \cos\theta + \frac{\left(\nu_0 - \nu_1\right)^2}{2\nu_0\nu_1}\right). \qquad (1)\end{aligned}$$

Nas condições da experiência original de Compton, $\frac{(\nu_0-\nu_1)^2}{2\nu_0\nu_1} \ll 1$ (pois a variação de energia do fóton é muito pequena) e pode ser desprezado,[1] resultando:

$$\left(\nu_0 - \nu_1\right) = \frac{h}{m_e c^2}\nu_0\nu_1\left(1 - \cos\theta\right)$$
$$c\left(\frac{\nu_0 - \nu_1}{\nu_0\nu_1}\right) = \frac{h}{m_e c}\left(1 - \cos\theta\right)$$

e finalmente o resultado de Compton é obtido:

$$\lambda_1 - \lambda_0 = \lambda_C\left(1 - \cos\theta\right)$$

[1]Deve ser observado que esse termo é igual a $\frac{K_e(\theta=\pi)}{m_e c^2}$, ou seja, à energia máxima que pode ser transferida ao elétron, medida em termos da sua energia de repouso. Há, portanto, consistência no uso da aproximação não-relativística: ela pode ser usada sempre que a energia cinética do elétron for bem menor do que sua massa de repouso.

onde $\lambda_C = \frac{h}{m_e c} = 2,427 \times 10^{-2}$ Å é o comprimento de onda Compton do elétron.

Resumo da ópera: efeitos relativísticos **não** são essenciais para se obter o resultado de Compton (pelo menos para fótons de energia baixa quando comparada com a massa do elétron), sendo **vital apenas o conceito de fóton** como partícula de luz.

Não se está dizendo, porém, que o uso da relatividade especial seja irrelevante no efeito Compton, mas sim que não é a relatividade a responsável primeira pelo comportamento experimentalmente observado de $(\lambda_1 - \lambda_0)$. Na verdade, usando-se a relatividade o resultado obtido é exato, prescindindo-se da aproximação feita na equação (1) e, além disso, levar em conta a relatividade é absolutamente **fundamental** para que os resultados corretos sejam obtidos no caso de fótons de energia mais alta.

Referências

[1] J.D. Walecka, *Introduction to Modern Physics*, World Scientific, Singapore (2008).