

Processamento Imagens

Transformada de Fourier 1D e 2D

Agenda

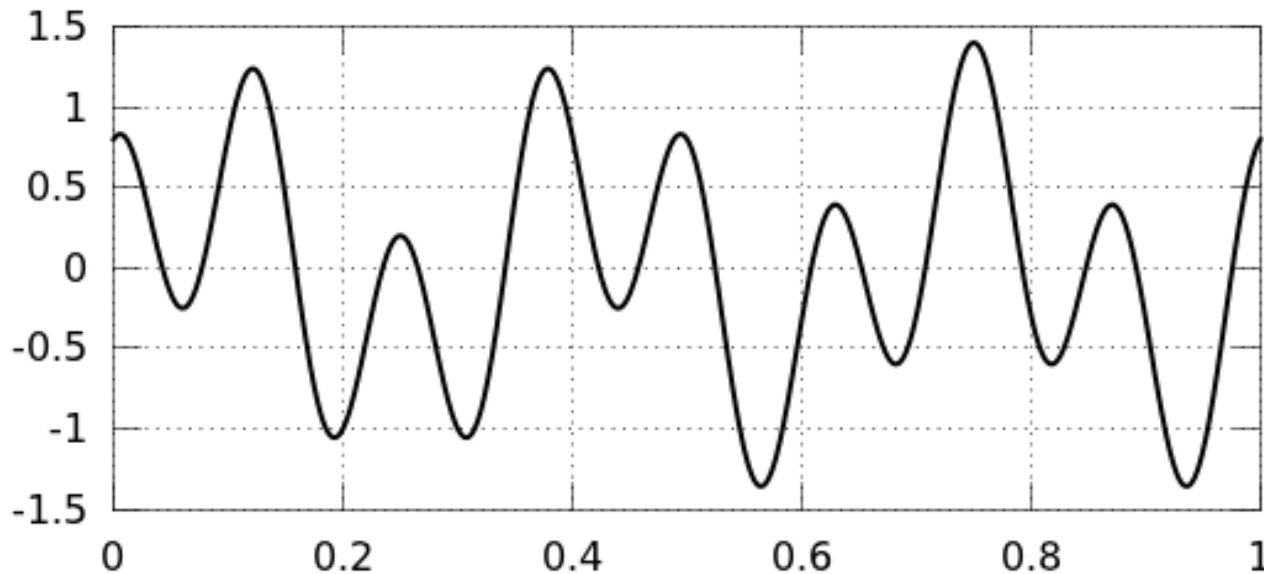
- Motivação / Introdução
- Série de Fourier e fundamentos
- Transformada de Fourier – 1D & 2D
 - contínua & discreta
- Principais propriedades

Motivação

- Transformações matemáticas são aplicadas a sinais para obter informações não disponíveis (ou não visíveis) diretamente no sinal original.
- Realizam um mapeamento entre domínios diferentes. Os valores nos diferentes domínios são diferentes, porém representam o mesmo dado.
 - Trem Bão
 - Rua Dr Carlos Camargo Sales, 500
 - $(-22.0057, -47.8962)$

Motivação

- Um sinal unidimensional está geralmente descrito no domínio do tempo em sua forma original.
 - quando exibimos o sinal temos uma representação tempo-amplitude.



Motivação

- Uma imagem (sinal bidimensional) está no domínio do espaço
 - quando exibimos a imagem temos uma representação espaço-amplitude (ou espaço-intensidade)



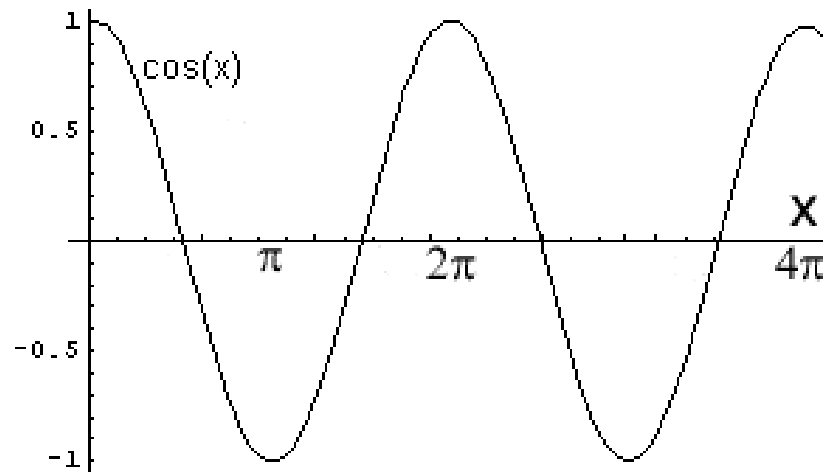
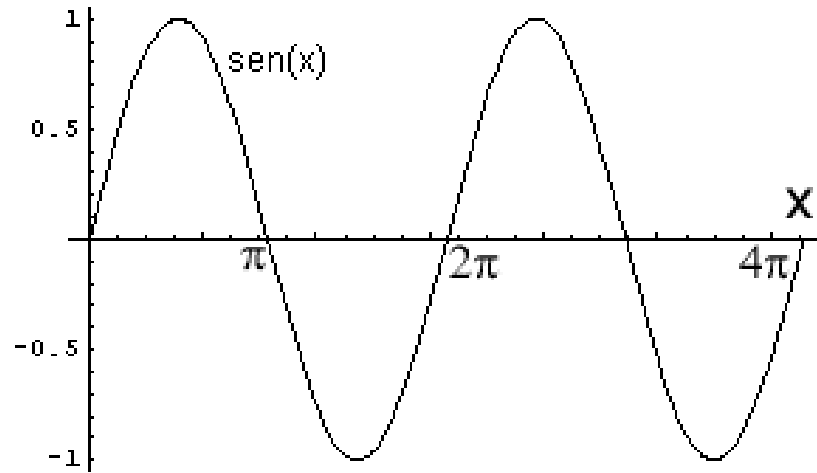
Motivação

- Matematicamente, um **senal pode ser definido como uma função**
- Há informação importante (e não óbvia) sobre o comportamento da função no conteúdo em frequência do sinal

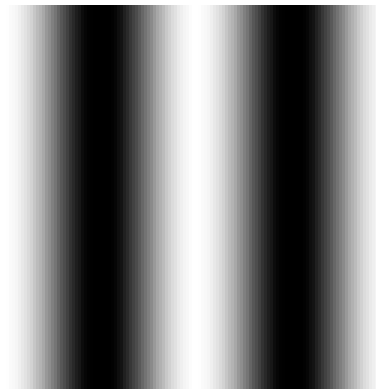
O que é frequência de uma função ?

- Em processos cíclicos (p.ex., descritos por uma função periódica), a frequência é definida como um número de ciclos por unidade de tempo/espaco

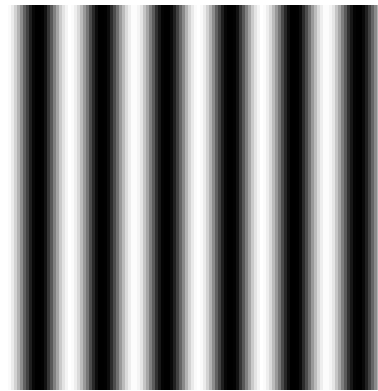
Funções periódicas



O que é frequência de uma função ?

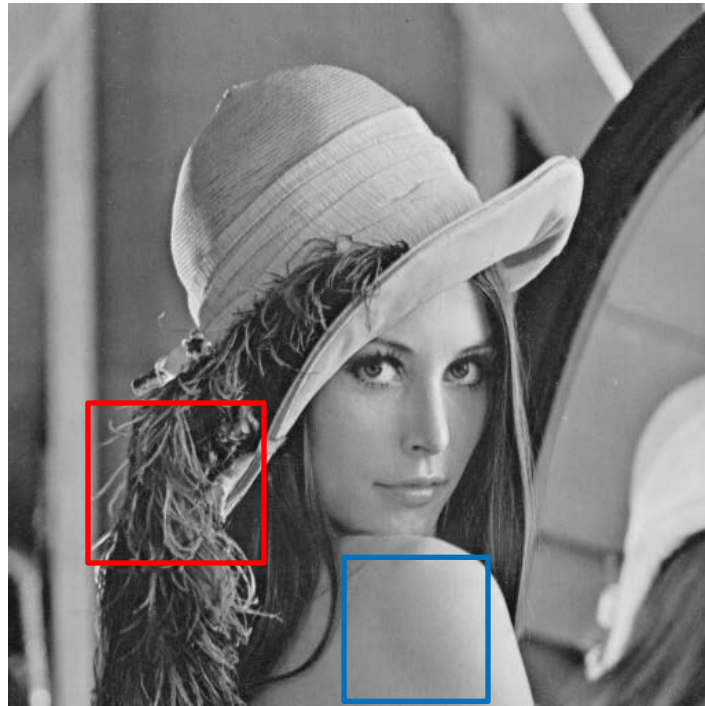


a



b

O que é freqüência de uma função ?



Qual a região contém mais componentes de alta freqüência ?



Introdução

- Matemático francês Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)
- Teoria publicada em 1822: qualquer função periódica pode ser representada como uma soma de senos e/ou cossenos de diferentes frequências, cada uma multiplicada por um coeficiente diferente (Série de Fourier)
- Funções não periódicas (porém tendo um valor finito de área sob a curva) também podem ser representadas por integrais de senos e/ou cossenos multiplicadas por uma função peso (Transformada de Fourier)
- Ambas as representações permitem reconstruir a função original completamente por um processo inverso, sem perda de informação

Análise de Fourier

- Dois aspectos:
 - Análise: dividir um sinal (ou função) em partes constituintes mais simples (e possivelmente modificá-las).
 - Síntese: reconstruir um sinal (ou função) a partir de suas partes constituintes.
- Ambas podem ser realizadas por meio de operações lineares, i.e. integrais e séries.

Representação de sinais complexos

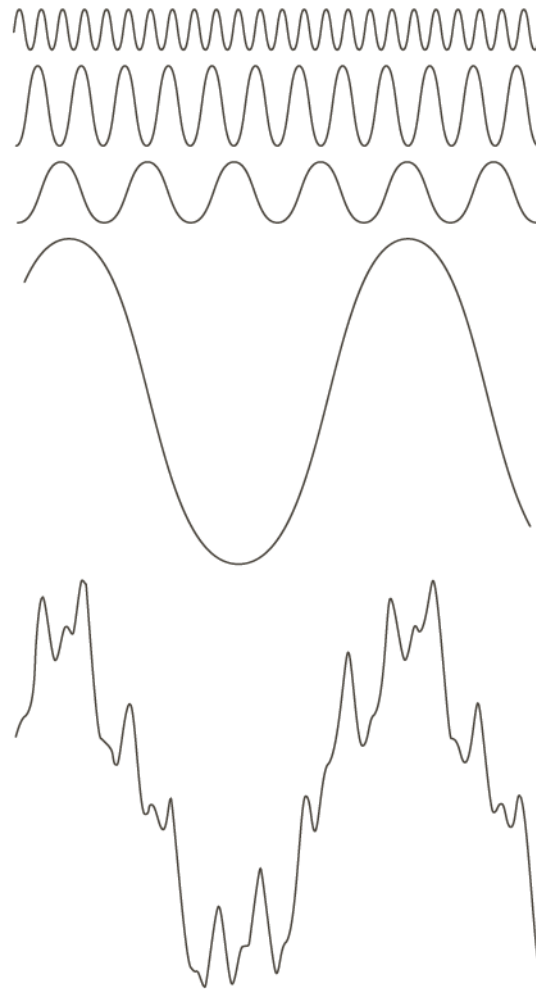
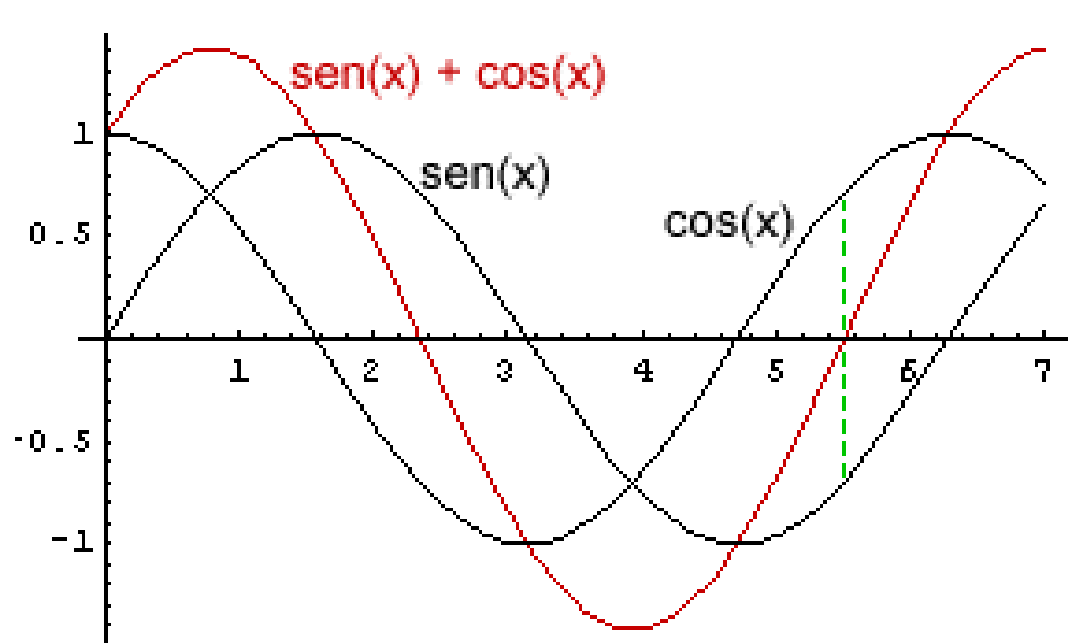


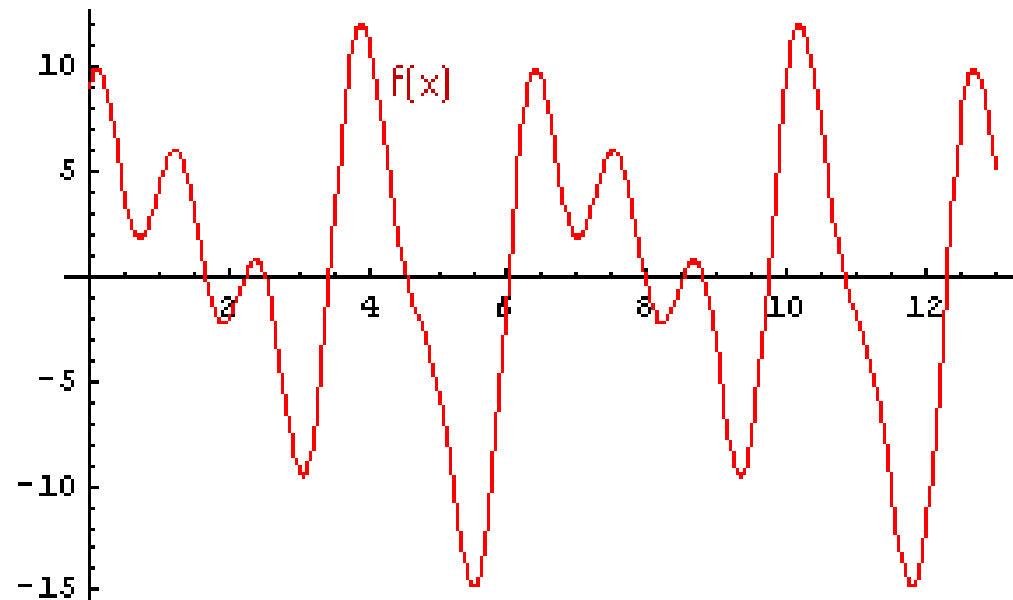
FIGURE 4.1 The function at the bottom is the sum of the four functions above it. Fourier's idea in 1807 that periodic functions could be represented as a weighted sum of sines and cosines was met with skepticism.

Série de Fourier



$$f(x) = \text{sen}(x) + \text{cos}(x)$$

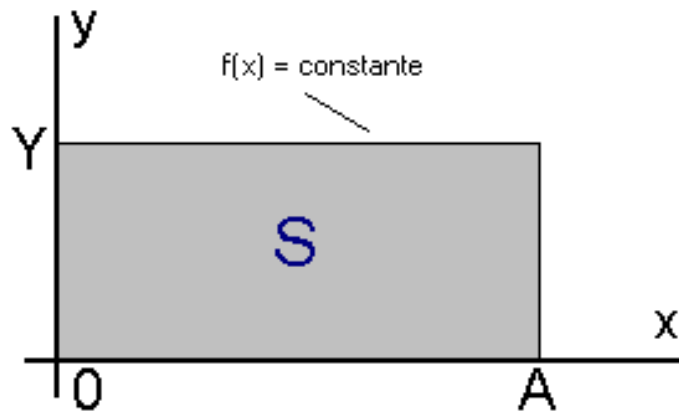
Série de Fourier



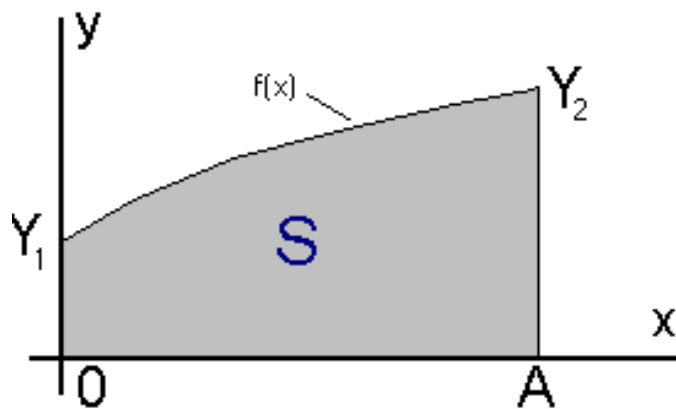
$$f(x) = a_0 + a_1 \sin(x) + a_2 \sin(2x) + a_3 \sin(3x) + \dots + b_1 \cos(x) + b_2 \cos(2x) + b_3 \cos(3x) + \dots$$

Fourier propôs uma forma simples e elegante de calcular os coeficientes...

Série de Fourier – Valores médios de uma função

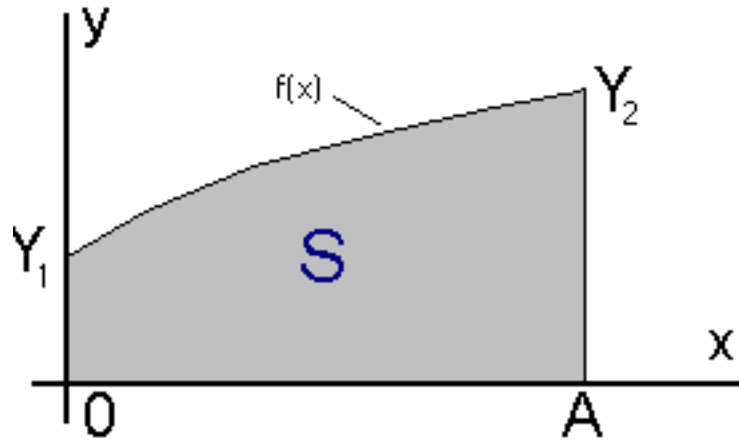


$$S = AY$$

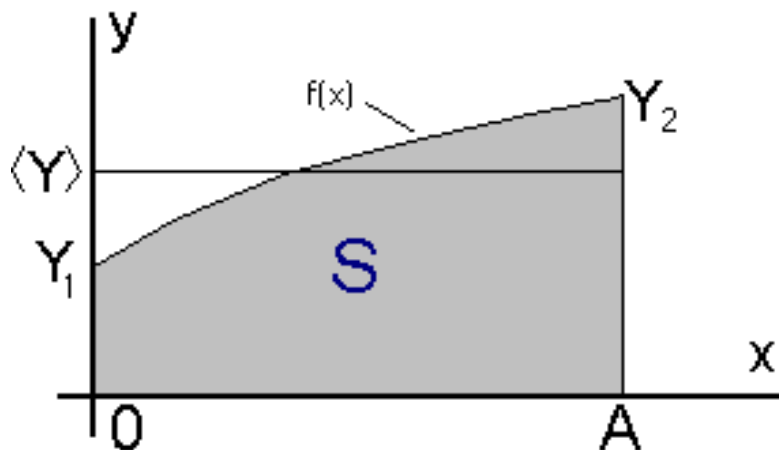


$$S = \int_0^A f(x) dx$$

Série de Fourier – Valores médios de uma função

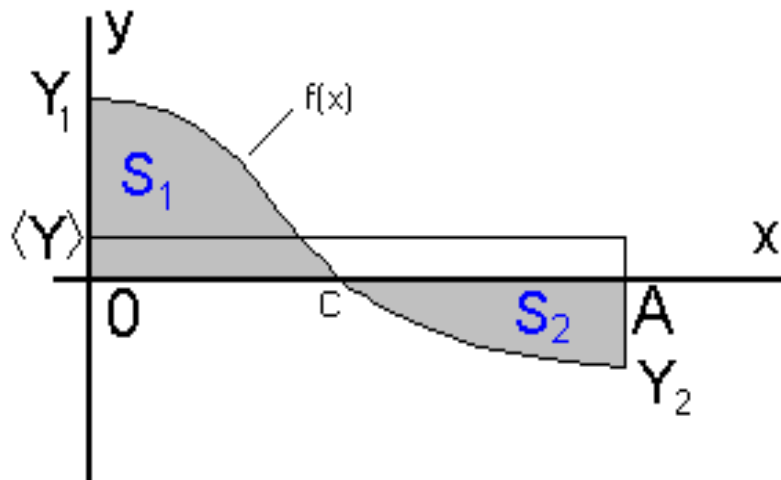


$$S = \int_0^A f(x) dx$$



$$\langle Y \rangle = \frac{\int_0^A f(x) dx}{A}$$

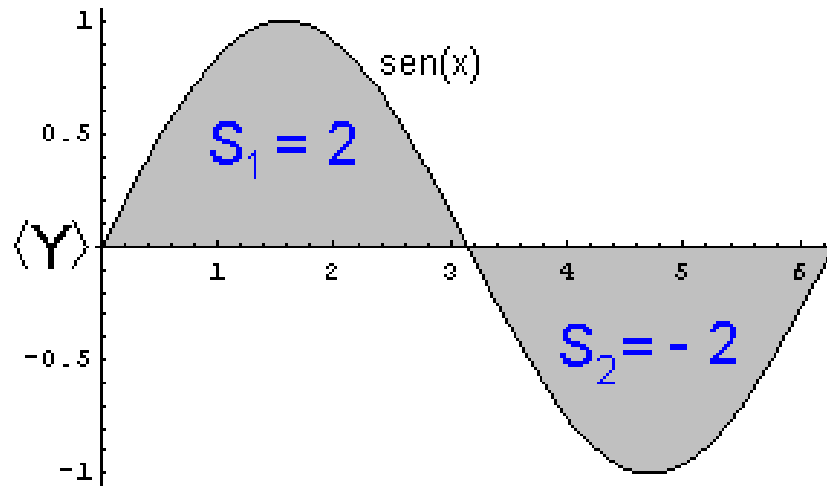
Série de Fourier – Valores médios de uma função



$$S = S_1 - S_2 = \langle Y \rangle * A$$

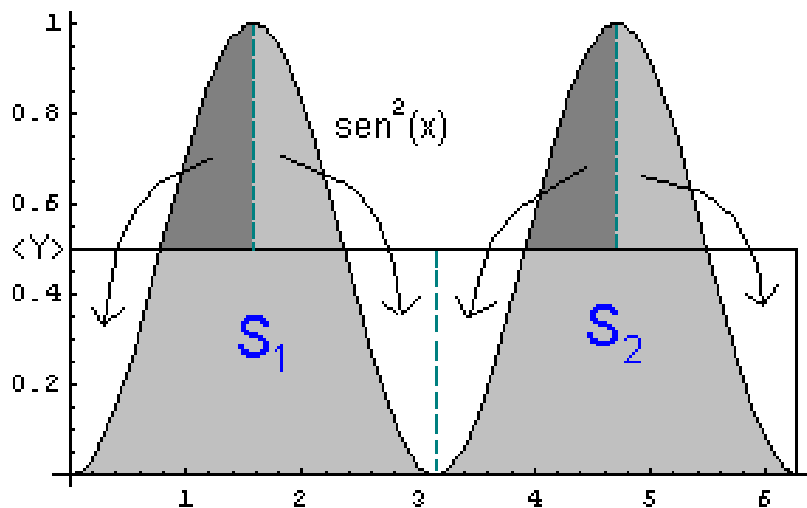
$$\langle Y \rangle = (S_1 - S_2)/A$$

Série de Fourier – Valores médios de uma função



Valor médio da função $\text{sen}(x)$ em um período é zero!
 $\langle \text{sen}(x) \rangle = 0$

(idem para cosseno)



Valor médio da função $\text{sen}^2(x)$ é $1/2$! $\langle \text{sen}^2(x) \rangle = 1/2$

$$\langle \text{sen}^2(x) \rangle = \frac{\int_0^{2\pi} \text{sen}^2(x) dx}{2\pi} = \frac{1}{2}$$

Série de Fourier – Calculando coeficientes

$$f(x) = a_0 + a_1 \operatorname{sen}(x) + a_2 \operatorname{sen}(2x) + a_3 \operatorname{sen}(3x) + \dots + b_1 \operatorname{cos}(x) + b_2 \operatorname{cos}(2x) + \dots$$

Suponha que queremos calcular a_3 . Multiplicando os dois lados por $\operatorname{sen}(3x)$

$$f(x)\operatorname{sen}(3x) = a_0 \operatorname{sen}(3x) + a_1 \operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(3x) + a_2 \operatorname{sen}(2x) \operatorname{sen}(3x) + a_3 \operatorname{sen}^2(3x) + \dots \\ \dots + b_1 \operatorname{cos}(x) \operatorname{sen}(3x) + \dots$$

Tomando as médias de cada termo da equação:

$$\langle f(x)\operatorname{sen}(3x) \rangle = \langle a_0 \operatorname{sen}(3x) \rangle + \langle a_1 \operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(3x) \rangle + \langle a_2 \operatorname{sen}(2x) \operatorname{sen}(3x) \rangle \\ + \langle a_3 \operatorname{sen}^2(3x) \rangle + \dots + \langle b_1 \operatorname{cos}(x) \operatorname{sen}(3x) \rangle + \dots$$

O que acontece?

Série de Fourier – Calculando coeficientes

Tomando as médias de cada termo da equação:

$$\langle \mathbf{f(x)sen(3x)} \rangle = \langle a_0 \text{sen}(3x) \rangle + \langle a_1 \text{sen}(x) \text{sen}(3x) \rangle + \langle a_2 \text{sen}(2x) \text{sen}(3x) \rangle + \langle \mathbf{a_3 \text{sen}^2(3x)} \rangle + \dots + \langle b_1 \text{cos}(x) \text{sen}(3x) \rangle + \dots$$

$$\langle \mathbf{f(x)sen(3x)} \rangle = \frac{1}{2} * a_3$$

$$\mathbf{a_3} = 2 * \langle \mathbf{f(x)sen(3x)} \rangle$$

Série de Fourier – Calculando coeficientes

$$f(x) = a_0 + a_1 \operatorname{sen}(x) + a_2 \operatorname{sen}(2x) + a_3 \operatorname{sen}(3x) + \dots + b_1 \operatorname{cos}(x) + b_2 \operatorname{cos}(2x) + \dots$$

Fazendo o mesmo para todos os valores de n em $\operatorname{sen}(nx)$ e $\operatorname{cos}(nx)$, verificamos que:

$$a_0 = \langle f(x) \rangle = \text{média de } f(x)$$

$$a_n = 2 * \langle f(x) \operatorname{sen}(nx) \rangle = 2 \text{ vezes a média de } f(x) \operatorname{sen}(nx)$$

$$b_n = 2 * \langle f(x) \operatorname{cos}(nx) \rangle = 2 \text{ vezes a média de } f(x) \operatorname{cos}(nx)$$

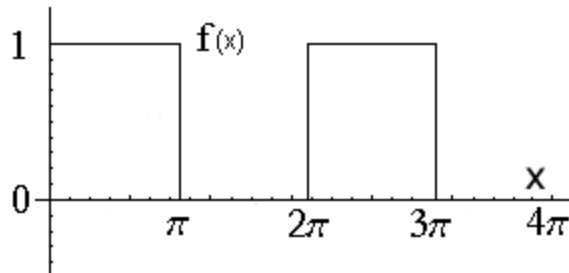
Série de Fourier – Exemplo Onda Quadrada

$$f(x) = a_0 + a_1 \operatorname{sen}(x) + a_2 \operatorname{sen}(2x) + a_3 \operatorname{sen}(3x) + \dots + b_1 \operatorname{cos}(x) + b_2 \operatorname{cos}(2x) + \dots$$

$$a_0 = \langle f(x) \rangle$$

$$a_n = 2 \langle f(x) \operatorname{sen}(nx) \rangle$$

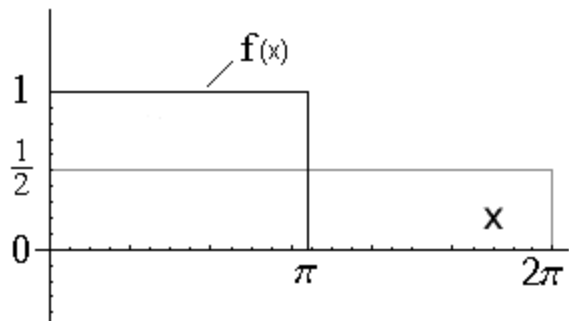
$$b_n = 2 \langle f(x) \operatorname{cos}(nx) \rangle$$



1 período: 0 a 2π

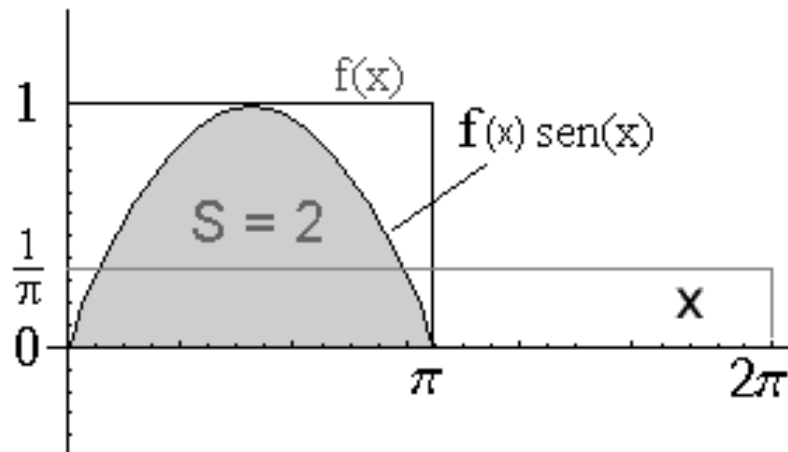
$f(x) = 1$ (de 0 a π)

$f(x) = 0$ (de π a 2π)

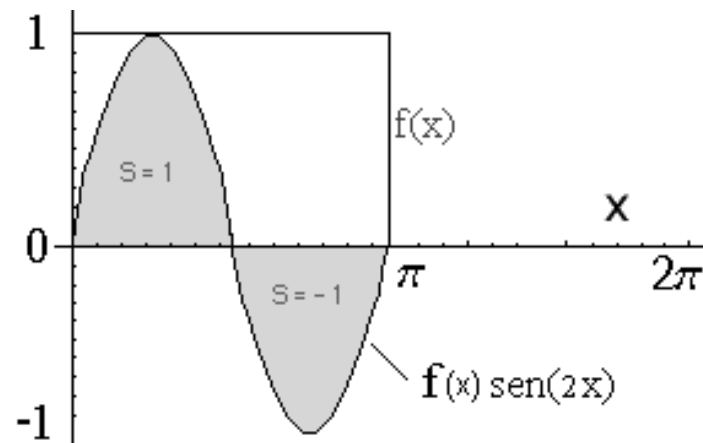


$$a_0 = 1/2$$

Série de Fourier – Exemplo Onda Quadrada



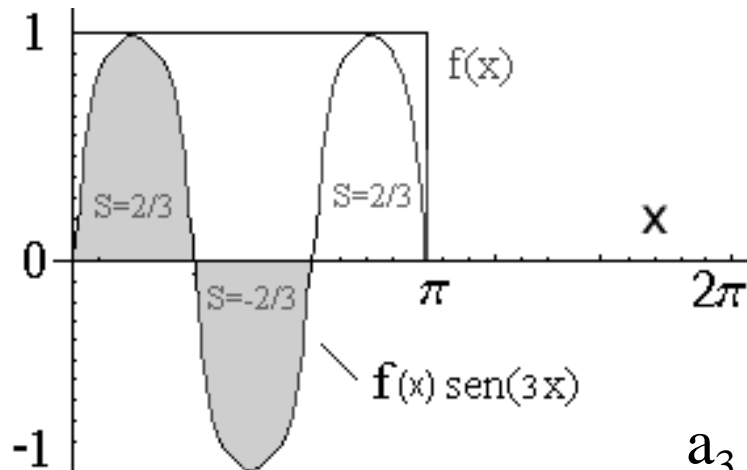
$$a_1 = 2 \langle f(x) \text{sen}(x) \rangle = 2/\pi$$



$$a_2 = 2 \langle f(x) \text{sen}(2x) \rangle$$

$$a_2 = 0$$

Série de Fourier – Exemplo Onda Quadrada



$$a_3 = 2 \langle f(x) \text{sen}(3x) \rangle = 2/3\pi$$

$$a_0 = 1/2;$$

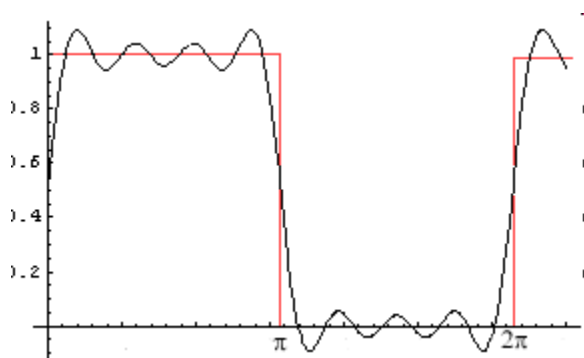
$$a_n = 0 - \text{para todo } n \text{ PAR};$$

$$a_n = 2/n\pi - \text{para todo } n \text{ ÍMPAR.}$$

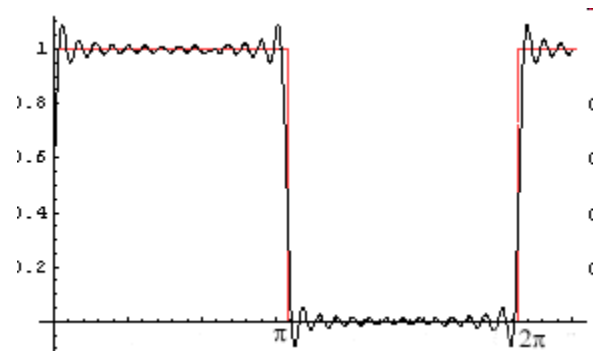
Verifique que todos os termos b_n são nulos!

Série de Fourier – Exemplo Onda Quadrada

$$f(x) = 1/2 + (2/\pi) \text{sen}(x) + (2/(3\pi)) \text{sen}(3x) + (2/(5\pi)) \text{sen}(5x) + (2/(7\pi)) \text{sen}(7x) + \dots$$



Onda quadrada: 5 termos



Onda quadrada: 15 termos

Série de Fourier

Série de Fourier

- $f(x)$ é periódica de período T se
 - $f(x) = f(x + nT)$, para qualquer n inteiro e positivo
- Seja $f(x)$ uma função periódica de período $2n$. A série de Fourier para esta função é dada por:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$$

- Observe que b_0 não é indicado, pois $\text{sen}(0) = 0$

Série de Fourier

- Casos particulares

- $f(x)$ = função par, isto é, $f(-x) = f(x)$, então os coeficientes b_k são nulos

- $f(x)$ = função ímpar, isto é, $f(-x) = -f(x)$, então os coeficientes a_k são nulos

Série de Fourier

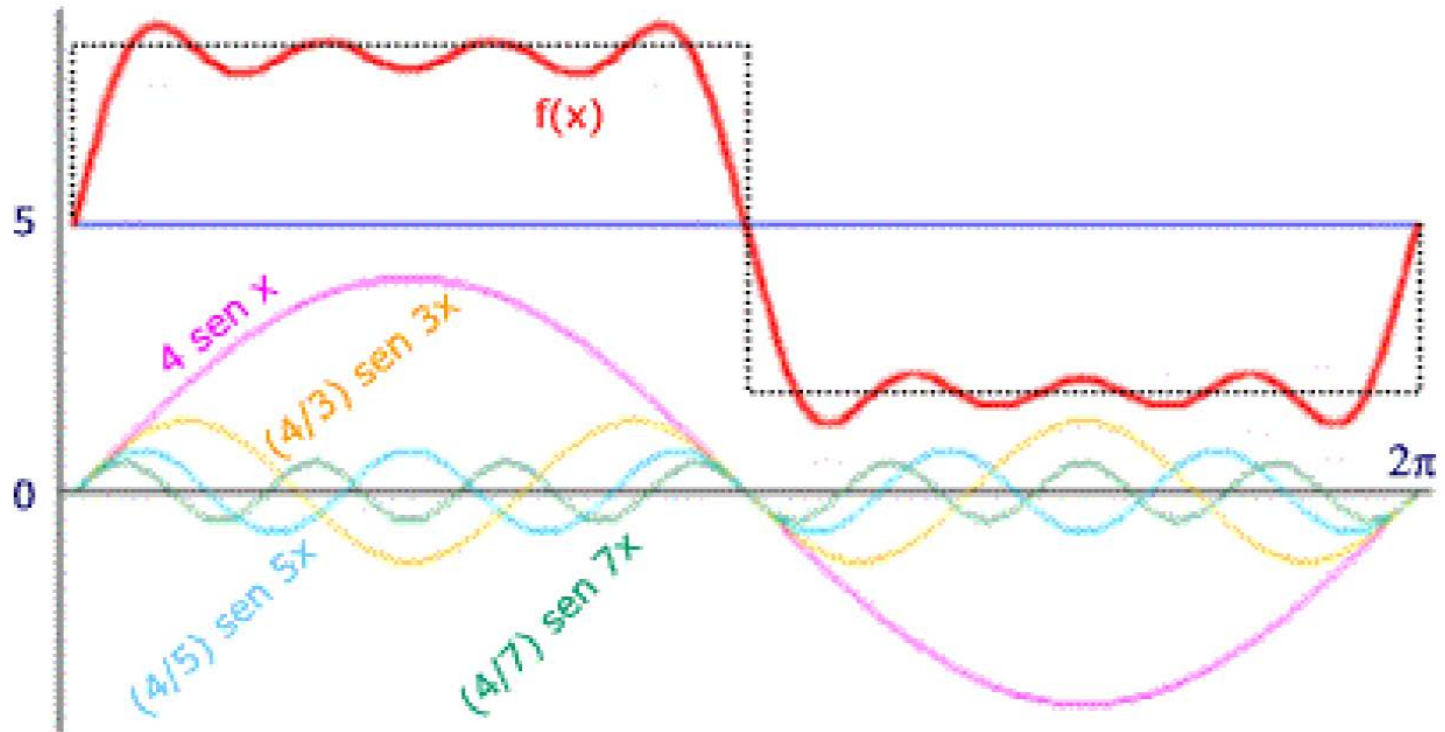
- Na prática utiliza-se um número finito de componentes (sin/cos) para representar as funções

Ex.: representação de uma onda quadrada

$$f(x) = 5 + 4 \sin x + \frac{4}{3} \sin 3x + \frac{4}{5} \sin 5x + \frac{4}{7} \sin 7x + \dots$$

- Com apenas 5 componentes já se consegue uma boa aproximação

Série de Fourier



$$f(x) = 5 + 4 \sin x + \frac{4}{3} \sin 3x + \frac{4}{5} \sin 5x + \frac{4}{7} \sin 7x + \dots$$

Série de Fourier

- 1a. componente: constante. Se não existisse (se fosse nula), o sinal estaria centrado no zero do eixo y . Em Eng. Elétrica esse termo corresponderia a componente de corrente contínua
- 2a. componente: $(4\sin x)$ tem o mesmo período ($T = 2\pi$) do sinal. Portanto, é chamado de oscilação fundamental
- As demais parcelas correspondem às oscilações harmônicas do sinal
- Os coeficientes a_k e b_k são, na realidade, as amplitudes de cada harmônico

Transformada de Fourier (sinal contínuo 1D)

Definições matemáticas importantes

• Número complexo

$$C = R + jI$$

• Conjugado complexo

$$C^* = R - jI$$

• Módulo $|C| = \sqrt{R^2 + I^2}$

• Fase $\phi = \arctan\left(\frac{I}{R}\right)$

Fase deve ser calculada usando a função *atan2*, que considera os 4 quadrantes do plano complexo

Definições matemáticas importantes

- Fórmula de Euler

$$e^{-j2\pi ut} = \cos(2\pi ut) - j \sin(2\pi ut)$$

- Função impulso (delta de Dirac) $\delta(t)$

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{se } t = 0 \\ 0 & \text{se } t \neq 0 \end{cases}$$

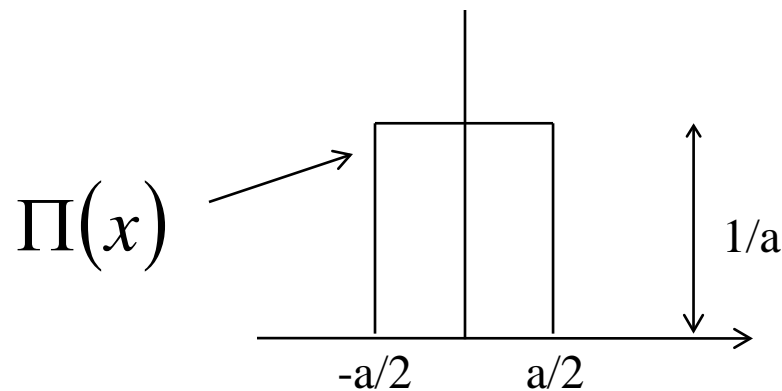
Interpretação física: pulso de amplitude infinita e duração zero

Definições matemáticas importantes

- Função impulso (propriedades)

$$\delta(t) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \Pi\left(\frac{x}{a}\right)$$

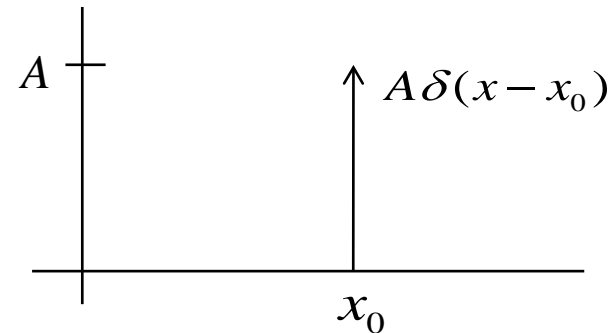
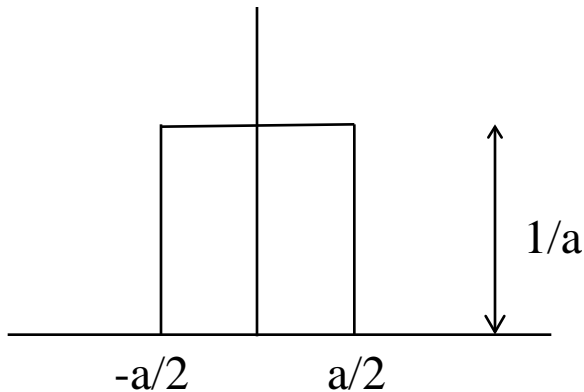
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t) dt = 1$$



Definições matemáticas importantes

- Função impulso: propriedade do peneiramento (*sift*)

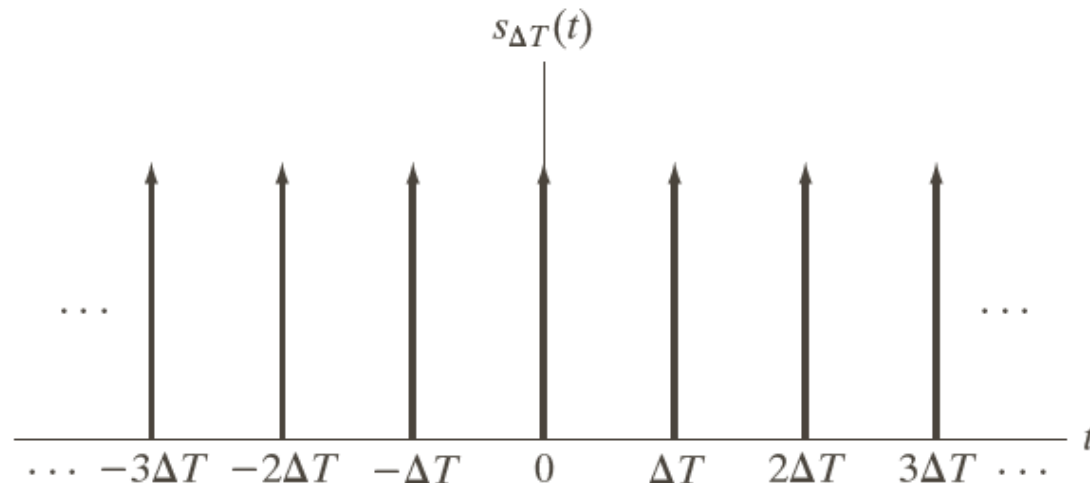
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t+t_0)\delta(t)dt = f(t_0)$$



Definições matemáticas importantes

- Trem de impulsos

$$s_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta T)$$



Transformada de Fourier (sinal contínuo)

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j2\pi st} dt$$

onde s é a função no espectro e t no tempo

Transformada Inversa

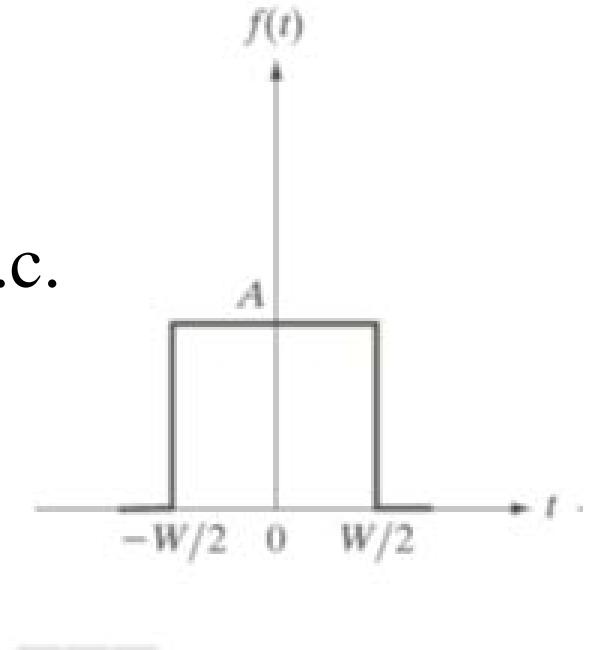
$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(s)e^{j2\pi st} ds$$

Observe que estamos trabalhando com números complexos!!!₄₁

Transformada de Fourier

Exemplo

$$f(t) = A \text{ se } \frac{-W}{2} \leq t \leq \frac{W}{2}, 0 \text{ c.c.}$$

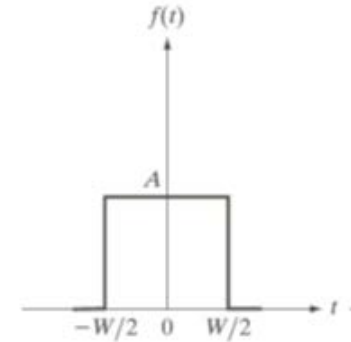


$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}$$

$$\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{j2}$$

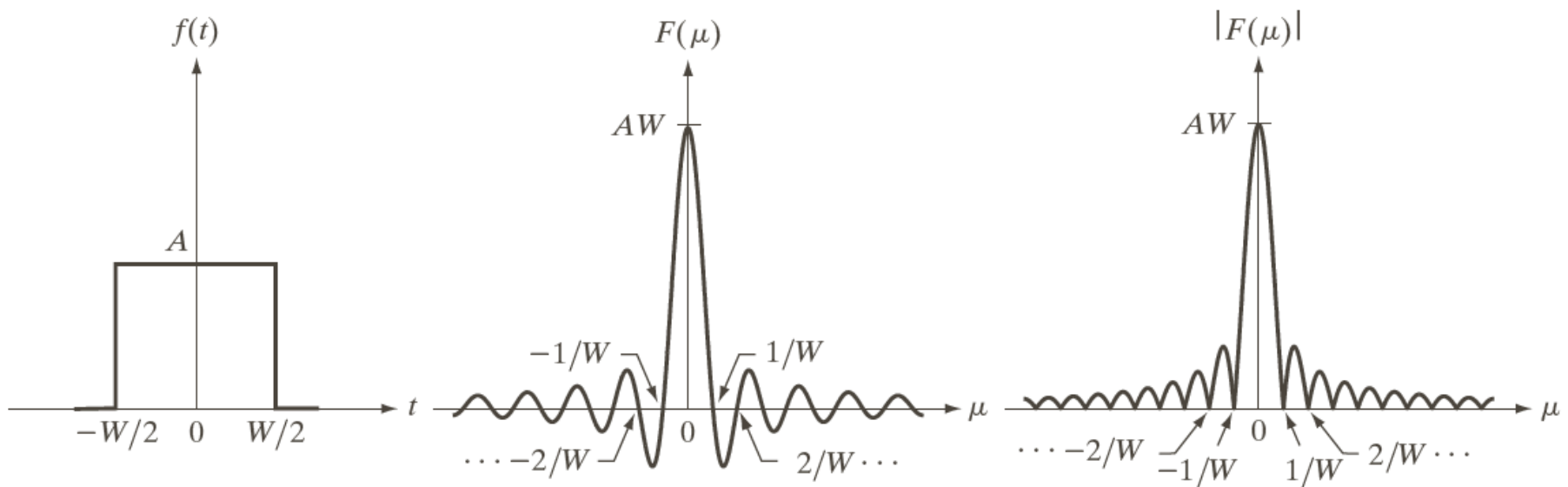
Transformada de Fourier - Exemplo

$$f(t) = A \text{ se } \frac{-w}{2} \leq t \leq \frac{w}{2}, 0 \text{ c.c.}$$



- Ex. 4.1 Gonzales: transformada de uma onda quadrada

Transformada de Fourier



a b c

FIGURE 4.4 (a) A simple function; (b) its Fourier transform; and (c) the spectrum. All functions extend to infinity in both directions.

Transformada de Fourier

Ex. 4.2 Gonzales: transformada de um impulso e de um trem de impulsos

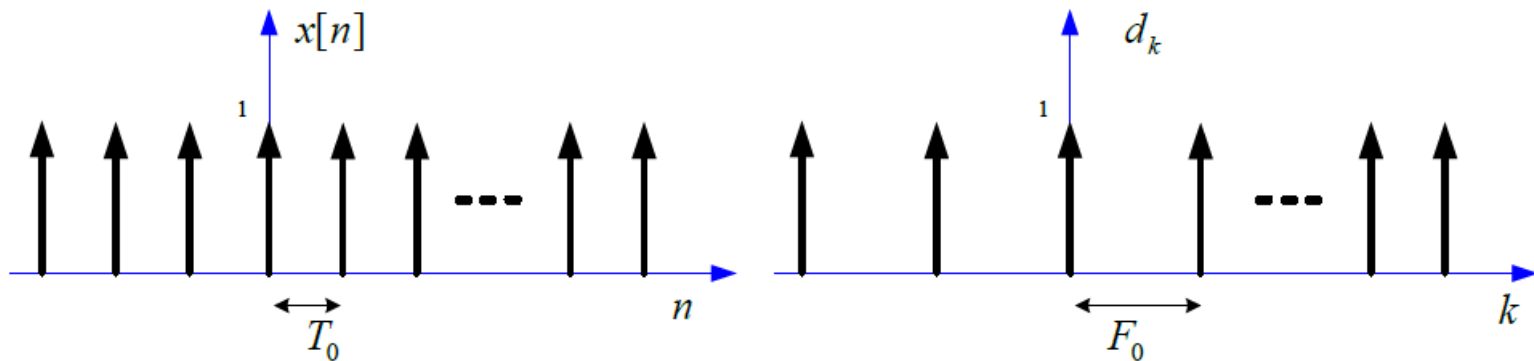


Figure 4.8 – An impulse train and its discrete-time Fourier coefficients

$$F_0 = 1/T_0$$

Transformada de Fourier

- Nota 1) A FT existe se $f(t)$ for contínua e integrável e $F(s)$ for integrável. Essas duas condições são quase sempre satisfeitas na prática.
- Nota 2) da linearidade da integral, segue que a FT também é um operador linear, ou seja, $FT(f+g) = FT(f) + T(g)$; $FT(\alpha f) = \alpha FT(f)$
- Nota 3) $F(s)$ é uma isometria em \mathbf{L}^2 , ou seja

$$\langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle, \quad \forall f, g \in \mathbf{L}^2$$

$$\|f\|^2 = \int_X |f|^2 d\mu$$

$$\langle f, g \rangle = \int_X f g d\mu$$

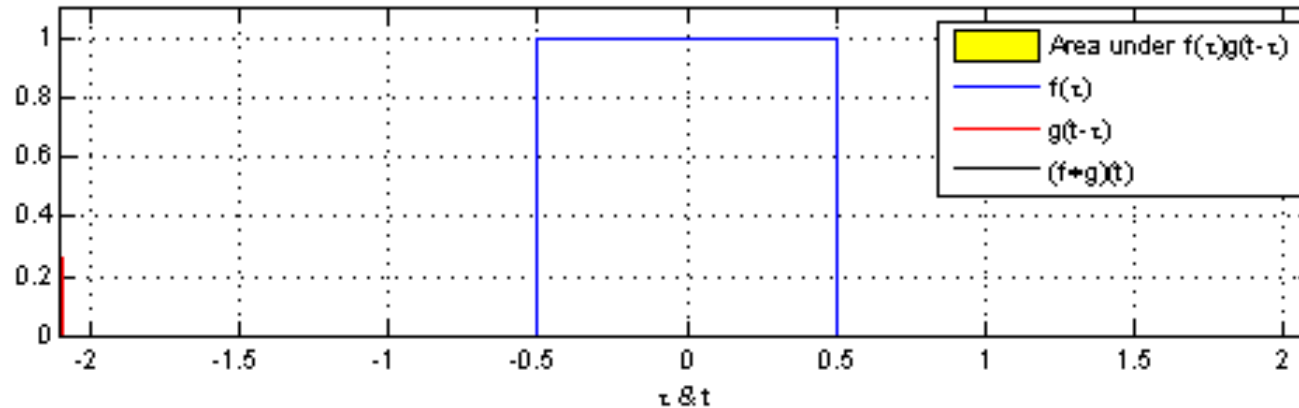
Transformada de Fourier

- Como consequência da Nota 3,

$$\|f\|^2 = \|\hat{f}\|^2 \text{ - teorema de Plancherel}$$

- A energia da função é preservada na transformação.

Convolução de 2 sinais



<https://pt.wikipedia.org/wiki/Convolu%C3%A7%C3%A3o>

Convolução

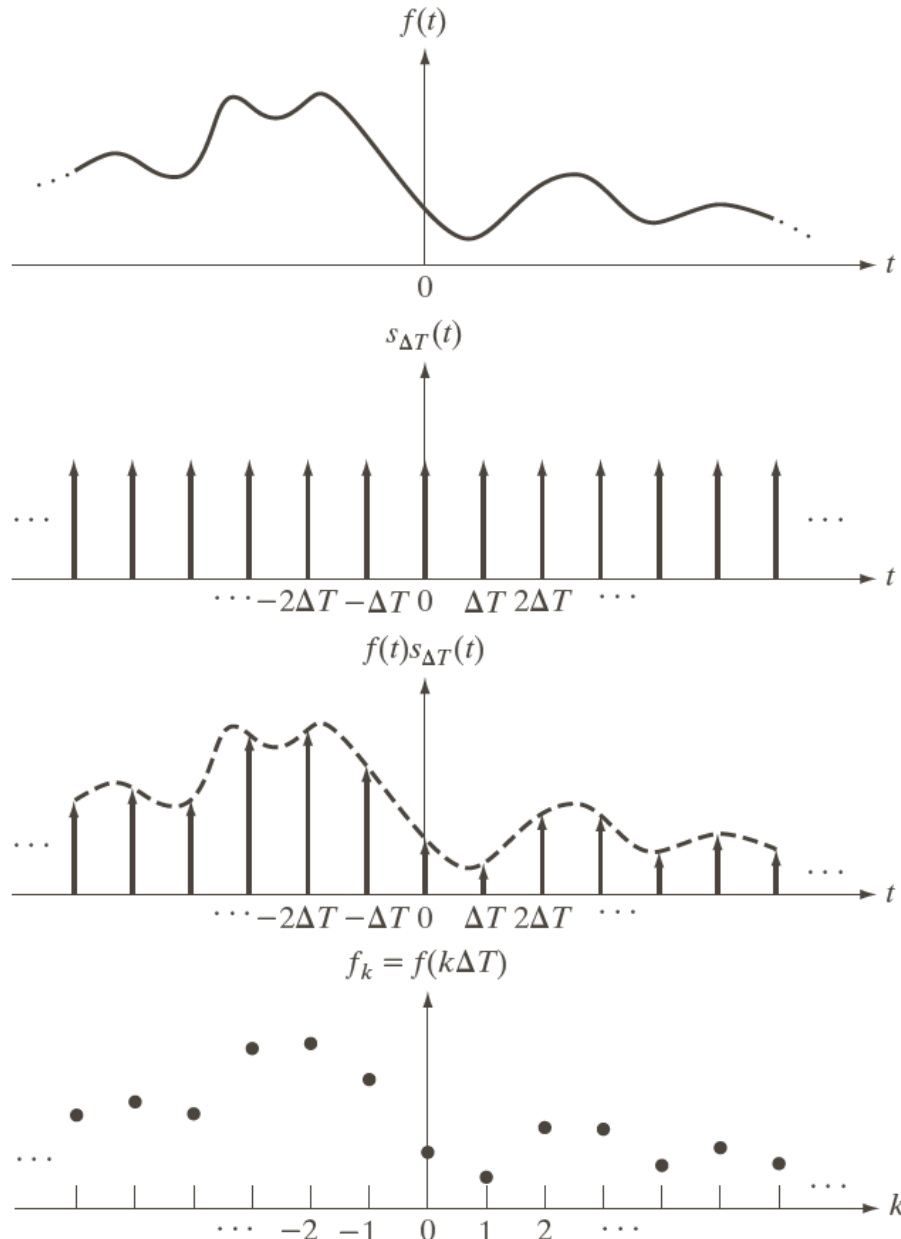
- Uma das propriedades mais importantes da FT

$$h(t) \xrightarrow{\text{FT}} H(f) \quad \text{e} \quad g(t) \xrightarrow{\text{FT}} G(f)$$

$$(h * g)(t) \xrightarrow{\text{FT}} H(f)G(f)$$

$$h(t)g(t) \xrightarrow{\text{FT}} (H * G)(f)$$

Amostragem de um sinal



a
b
c
d

FIGURE 4.5

(a) A continuous function. (b) Train of impulses used to model the sampling process. (c) Sampled function formed as the product of (a) and (b). (d) Sample values obtained by integration and using the sifting property of the impulse. (The dashed line in (c) is shown for reference. It is not part of the data.)

Transformada de funções amostradas

Seja $F(\mu) = \mathfrak{F}\{f(t)\}$

Seja $\tilde{f}(t) = f(t)S_{\Delta T}(t)$ a função amostrada

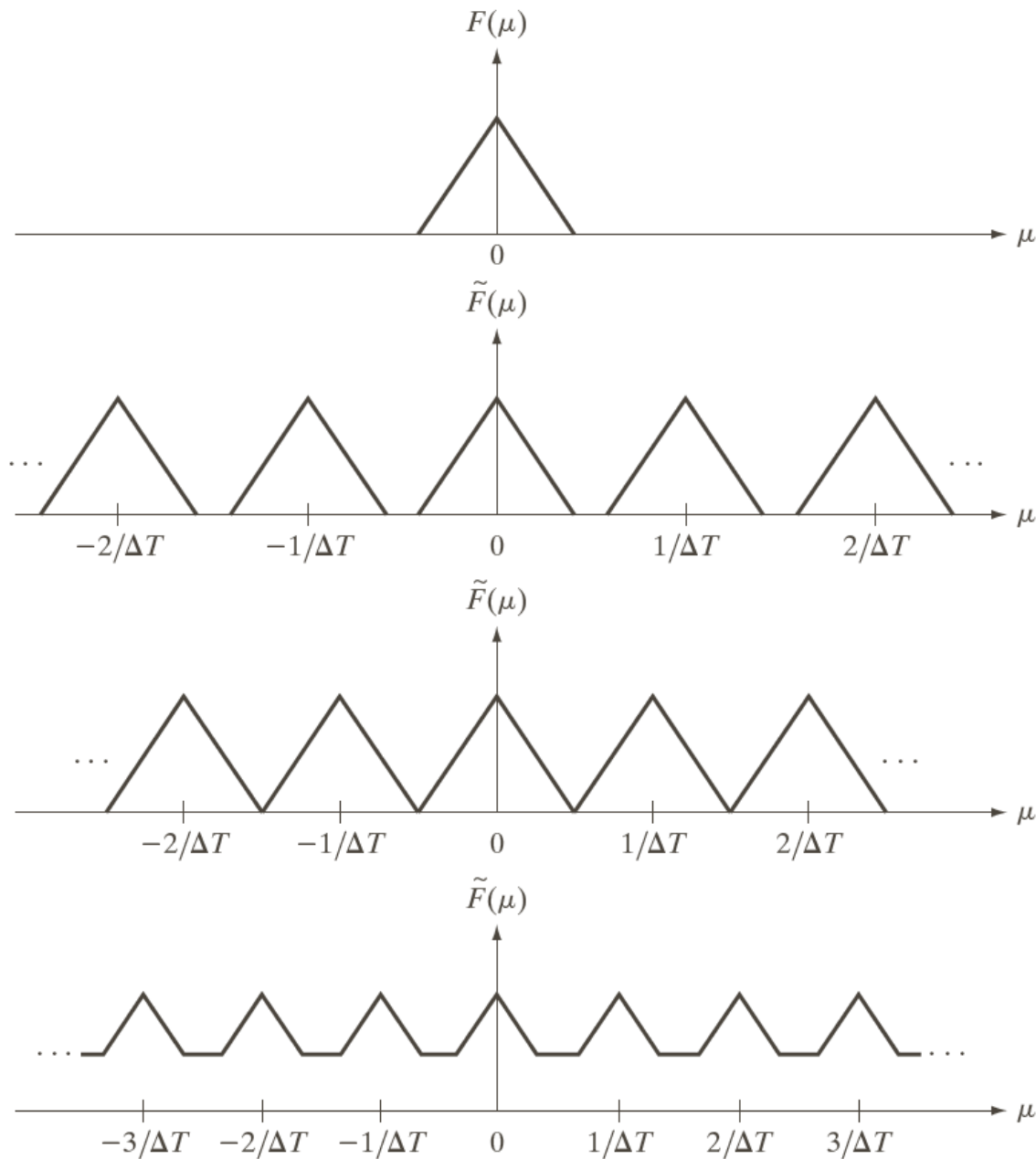
Pelo Teorema da Convolução

$$\tilde{F}(\mu) = \mathfrak{F}\{\tilde{f}(t)\} = \mathfrak{F}\{f(t)S_{\Delta T}(t)\} = F(\mu) \otimes S(\mu)$$

Transformada de funções amostradas

$$\tilde{F}(\mu) = F(\mu) \otimes S(\mu) = \frac{1}{\Delta T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\mu - \frac{n}{\Delta T}\right)$$

A transformada de Fourier de uma função amostrada é uma sequencia *infinita e periódica* de cópias de $F(\mu)$, que é a transformada da função original contínua. O intervalo entre as cópias é determinado pelo valor de $1/\Delta T$.



a
b
c
d

FIGURE 4.6
 (a) Fourier transform of a band-limited function.
 (b)–(d) Transforms of the corresponding sampled function under the conditions of over-sampling, critically-sampling, and under-sampling, respectively.

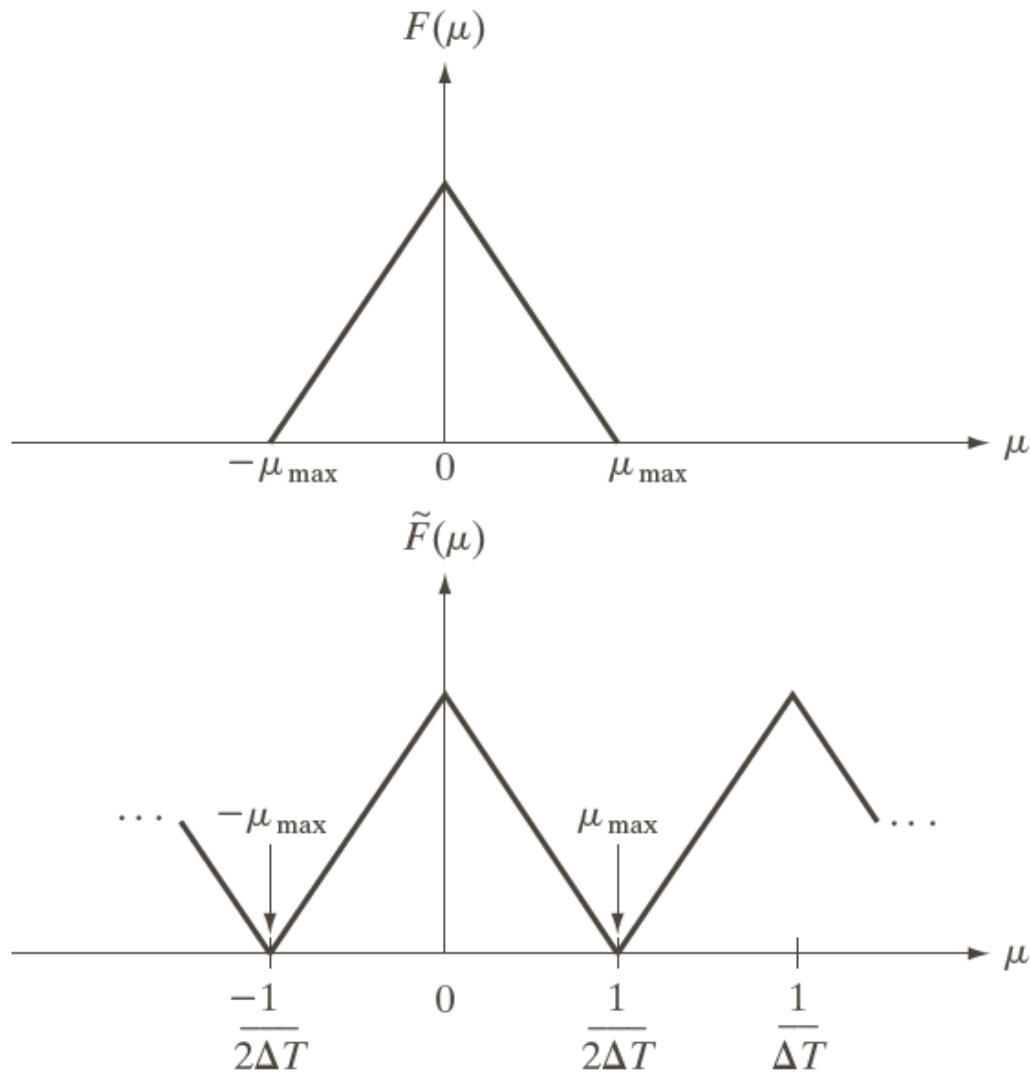
Teorema da amostragem

- É possível recuperar $f(t)$ a partir de sua versão amostrada se pudermos isolar uma cópia de $F(\mu)$ a partir da sequência periódica de cópias contida na transformada da função amostrada
 - basta um período completo para caracterizar toda a transformada $F(\mu)$
 - tendo $F(\mu)$ podemos recuperar $f(t)$ pela transformada inversa

Teorema da amostragem

- Para recuperar um período, deve haver separação suficiente entre as cópias, o que depende da taxa de amostragem...
 - qual a taxa de amostragem mínima?

Teorema da amostragem



a
b

FIGURE 4.7

(a) Transform of a band-limited function.

(b) Transform resulting from critically sampling the same function.

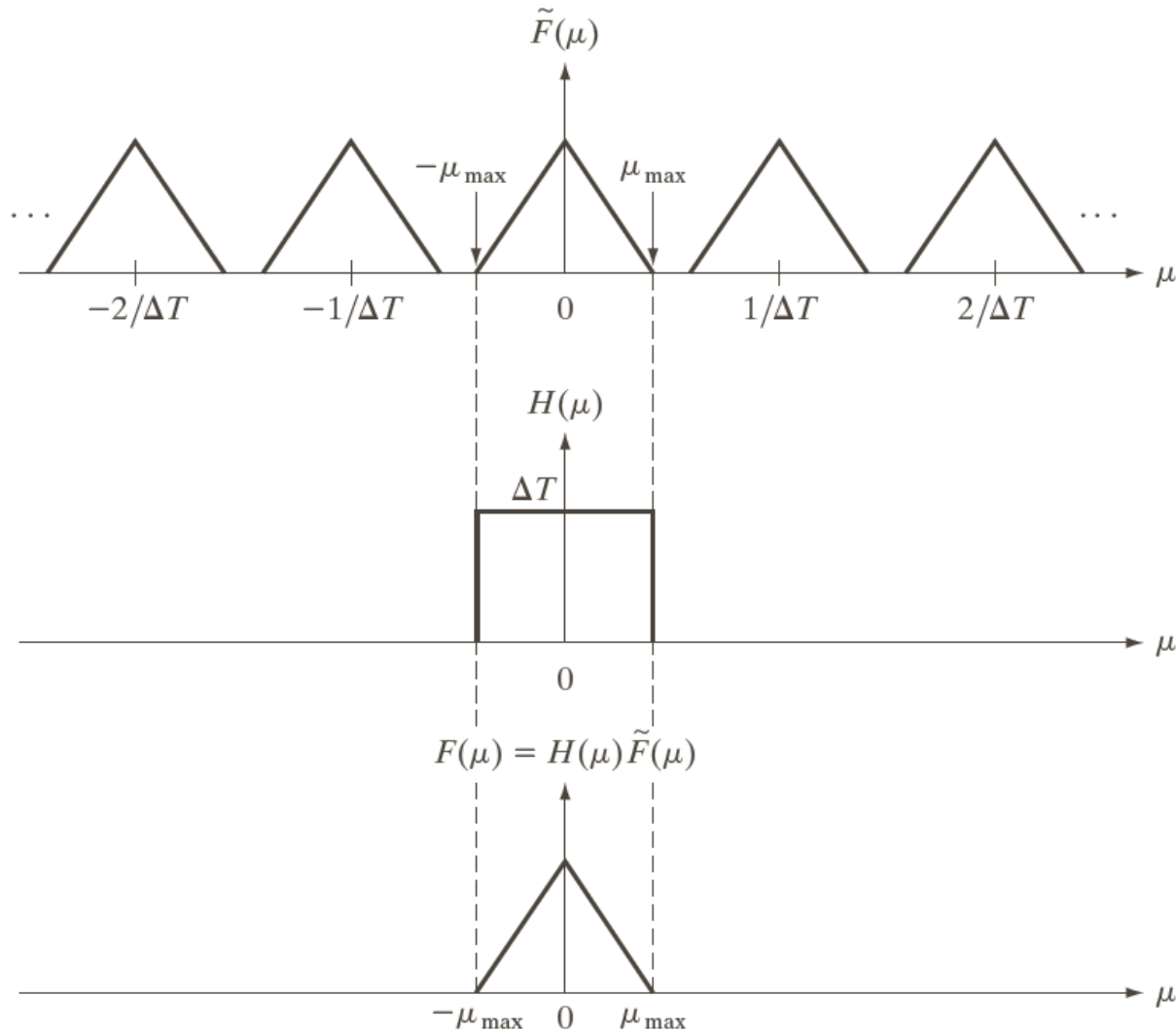
Teorema da amostragem

- Para recuperar um período, deve haver separação suficiente entre as cópias
- Separação suficiente é garantida se

$$1/2\Delta T > \mu_{max} \text{ ou}$$

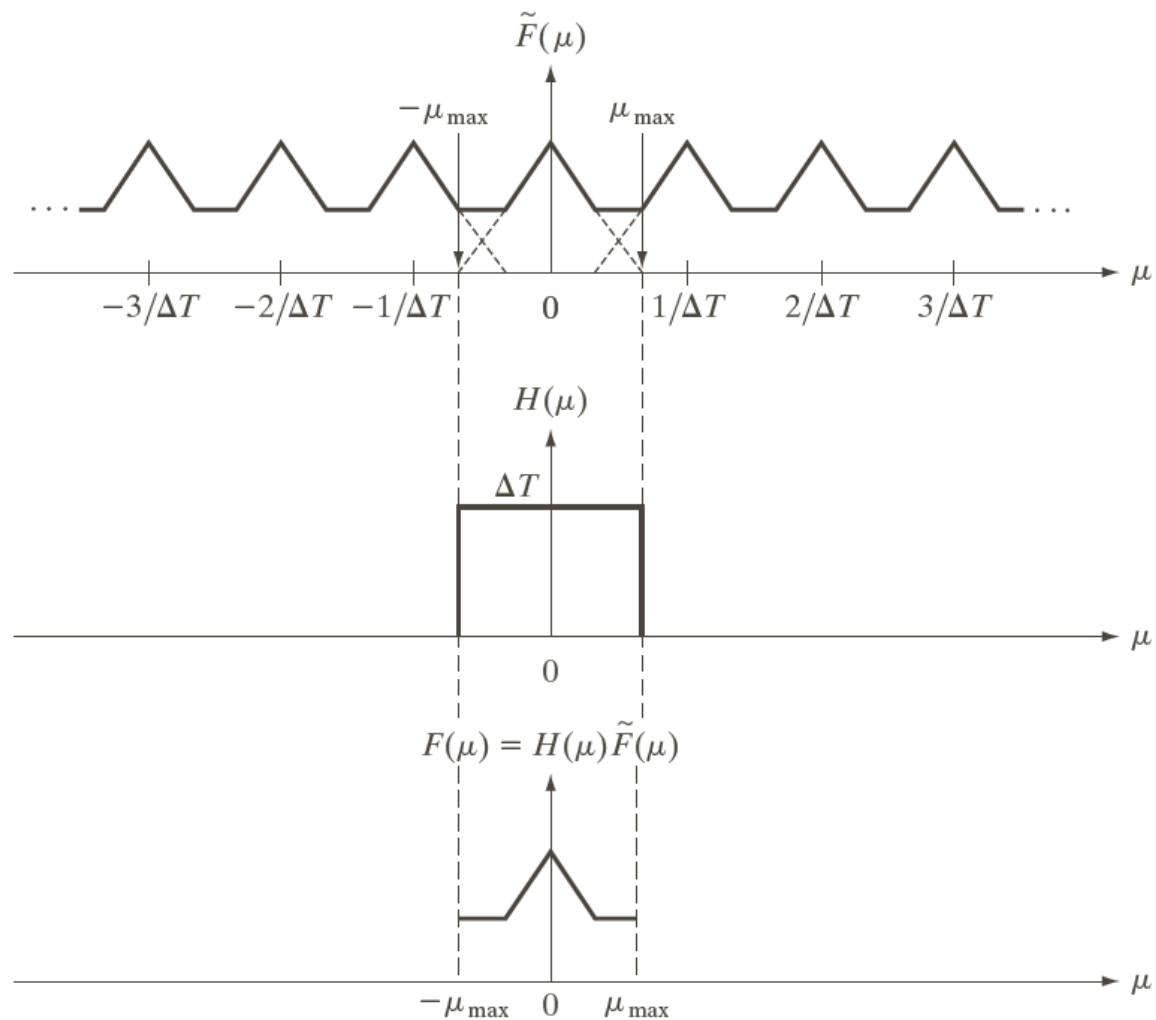
$$\frac{1}{\Delta T} > 2\mu_{max}$$

Reconstrução da função a partir das amostras



a
b
c

FIGURE 4.8
Extracting one period of the transform of a band-limited function using an ideal lowpass filter.



a
b
c

FIGURE 4.9 (a) Fourier transform of an under-sampled, band-limited function. (Interference from adjacent periods is shown dashed in this figure). (b) The same ideal lowpass filter used in Fig. 4.8(b). (c) The product of (a) and (b). The interference from adjacent periods results in aliasing that prevents perfect recovery of $F(\mu)$ and, therefore, of the original, band-limited continuous function. Compare with Fig. 4.8.

Reconstrução da função a partir das amostras

Se uma função de banda limitada é amostrada a uma taxa inferior à mínima os períodos se sobrepõem, e passa a ser impossível isolar um único período da transformada => *aliasing* de frequência.

Reconstrução da função a partir das amostras

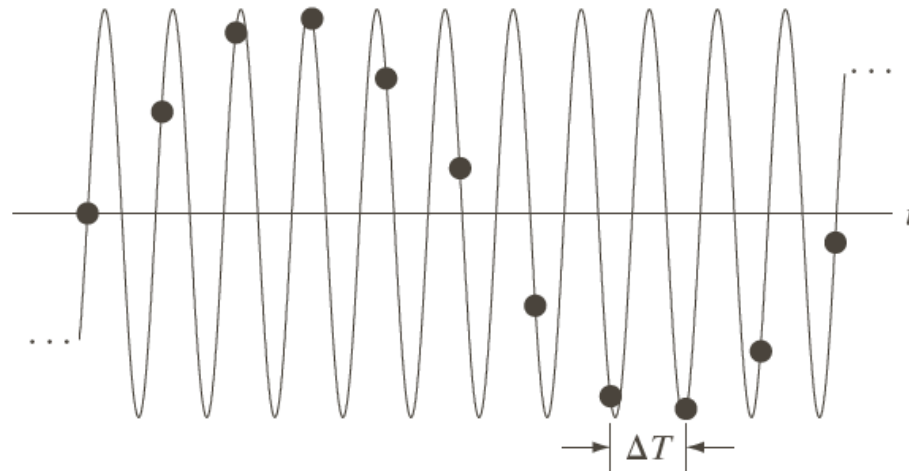


FIGURE 4.10 Illustration of aliasing. The under-sampled function (black dots) looks like a sine wave having a frequency much lower than the frequency of the continuous signal. The period of the sine wave is 2 s, so the zero crossings of the horizontal axis occur every second. ΔT is the separation between samples.

Aliasing: componentes de alta frequência de uma função se “mascaram” como frequências mais baixas na função amostrada

Reconstrução da função

a partir dos dados amostrados:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta T) \operatorname{sinc} \left[\frac{t - n\Delta T}{\Delta T} \right]$$

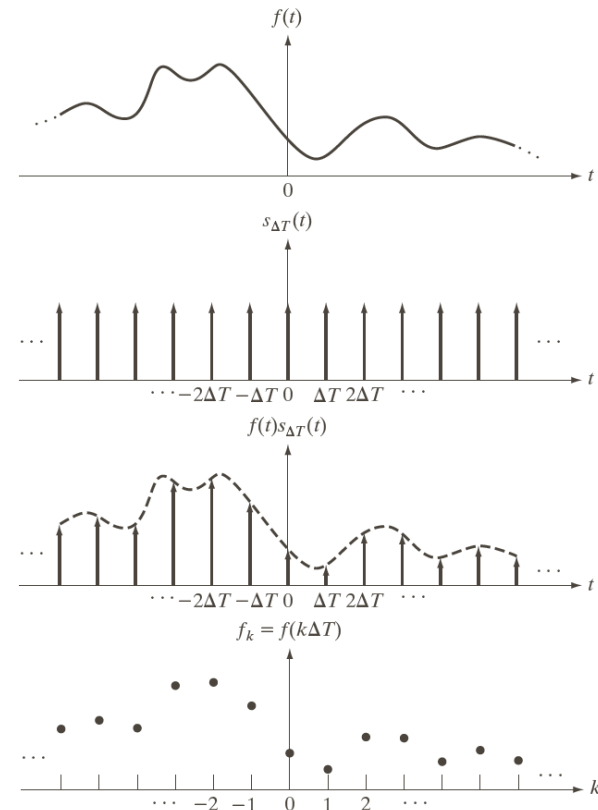
i.e., a função perfeitamente reconstruída é uma soma infinita de funções *sinc* ponderadas pelos valores da amostra

Transformada Discreta de Fourier 1D-DFT

Transformada Discreta de Fourier

A função contínua $f(t)$ é discretizada numa seqüência

$$\{f(t_0), f(t_0 + \Delta T), f(t_0 + 2\Delta T), \dots, f(t_0 + [M - 1]\Delta T)\}$$



Transformada Discreta de Fourier

onde t assume valores discretos $(0,1,2,\dots,M-1)$, então

$$f(t) == f(t_0 + [M - 1]\Delta T)$$

A seqüência $\{f(0), f(1), f(2), \dots, f(M-1)\}$ denota qualquer amostragem de M valores uniformemente espaçados de uma função contínua correspondente

Transformada Discreta de Fourier

- O par de transformadas discretas de Fourier que se aplica a funções amostradas é dado por:

$$F_m = \sum_{n=0}^{M-1} f_n e^{-j\pi mn/M}, m = 0, 1, 2, \dots, M - 1$$

$$f_n = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} F_m e^{j2\pi mn/M}, n = 0, 1, 2, \dots, M - 1$$

Transformada Discreta de Fourier

- as transformadas direta e inversa de Fourier existem para qualquer conjunto de amostras cujos valores são finitos
- não dependem do intervalo de amostragem ΔT , nem dos intervalos de frequência
- Notação: (x,y) para coordenadas (discretas) de imagem (domínio espacial) e (u,v) para variáveis (inteiras) de frequência

Transformada Discreta de Fourier

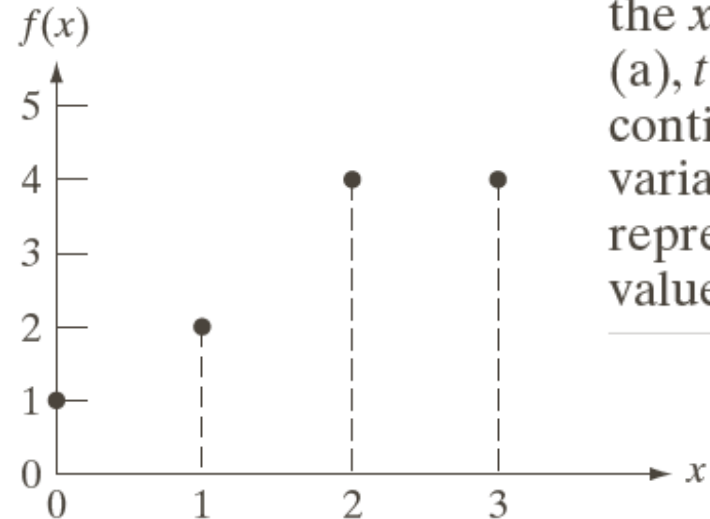
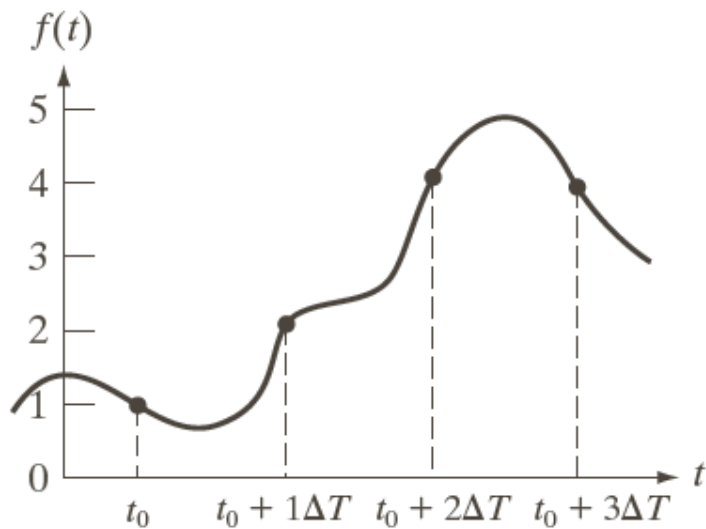
- O par de transformadas discretas de Fourier que se aplica a funções amostradas:

$$F(u) = \sum_{x=0}^{M-1} f(x) e^{-j2\pi ux/M}, u = 0, 1, 2, \dots, M - 1$$

$$f(x) = \frac{1}{M} \sum_{u=0}^{M-1} F(u) e^{j2\pi ux/M}, x = 0, 1, 2, \dots, M - 1$$

Transformada Discreta de Fourier

Gonzales, ex. 4.4



a b

FIGURE 4.11

(a) A function, and (b) samples in the x -domain. In (a), t is a continuous variable; in (b), x represents integer values.

Transformada Discreta de Fourier

- Para calcular $F(u)$, substituímos $u=0$ no termo exponencial e somamos para todos os M valores de x
- Repetimos para todos os M valores de u
- Teremos então $M \times M$ adições e multiplicações, logo a complexidade computacional é $O(M^2)$

Transformada de Fourier (sinal contínuo 2D)

Função impulso 2D

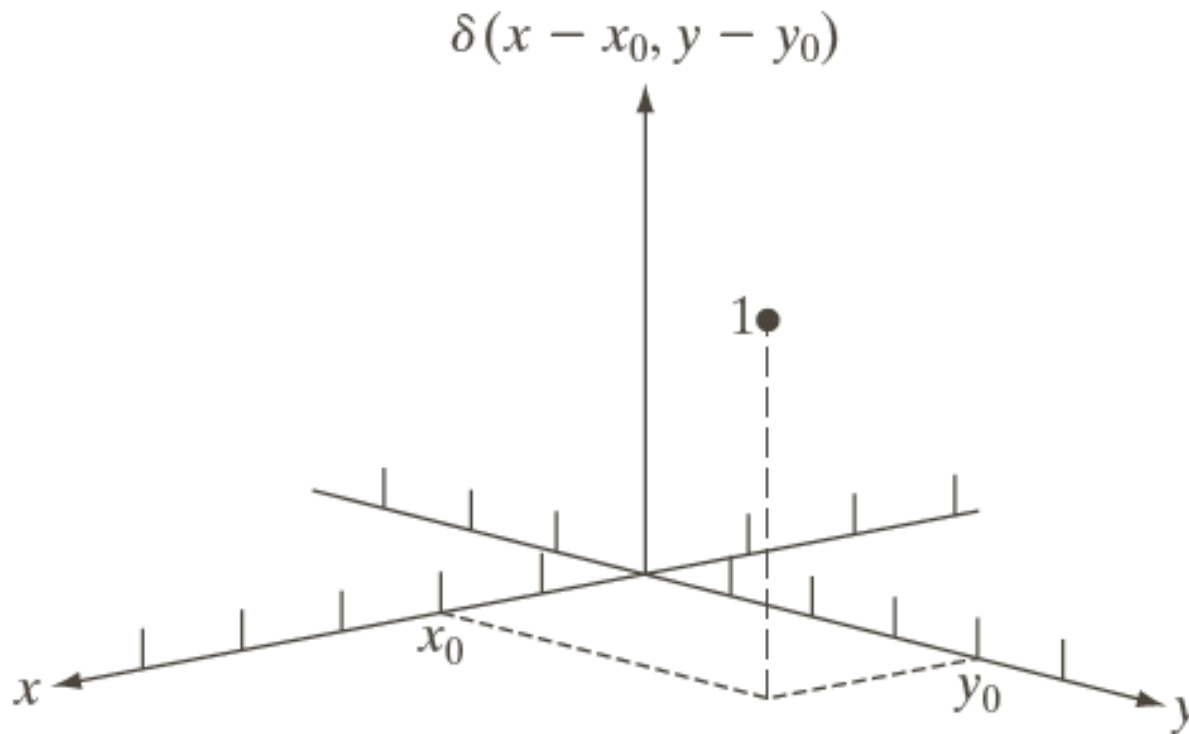


FIGURE 4.12
Two-dimensional unit discrete impulse. Variables x and y are discrete, and δ is zero everywhere except at coordinates (x_0, y_0) .

Transformada de Fourier 2D

O par de transformada de Fourier para função $f(x,y)$ de duas variáveis:

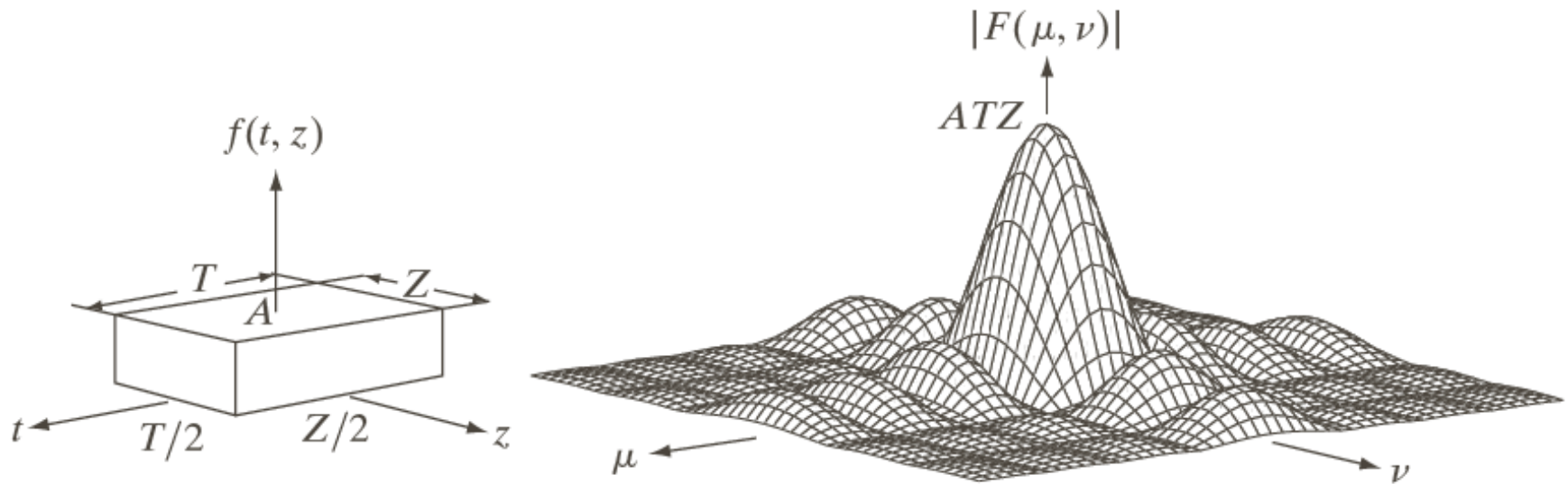
$$F(\mu, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t, z) e^{-j2\pi(\mu t + \nu z)} dt dz$$

e

$$f(t, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu, \nu) e^{j2\pi(\mu t + \nu z)} d\mu d\nu$$

onde μ e ν são variáveis de frequência, t e z são as variáveis espaciais contínuas

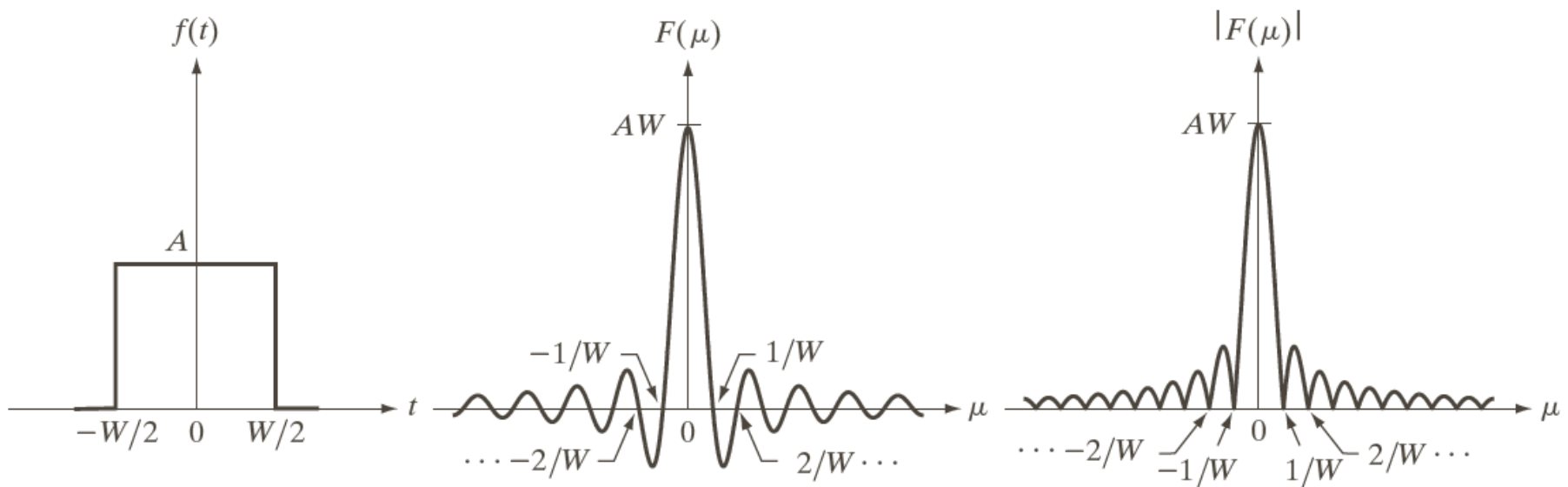
Transformada de Fourier 2D



a b

FIGURE 4.13 (a) A 2-D function, and (b) a section of its spectrum (not to scale). The block is longer along the t -axis, so the spectrum is more “contracted” along the μ -axis. Compare with Fig. 4.4.

Transformada de Fourier 1D



a b c

FIGURE 4.4 (a) A simple function; (b) its Fourier transform; and (c) the spectrum. All functions extend to infinity in both directions.

Amostragem 2D

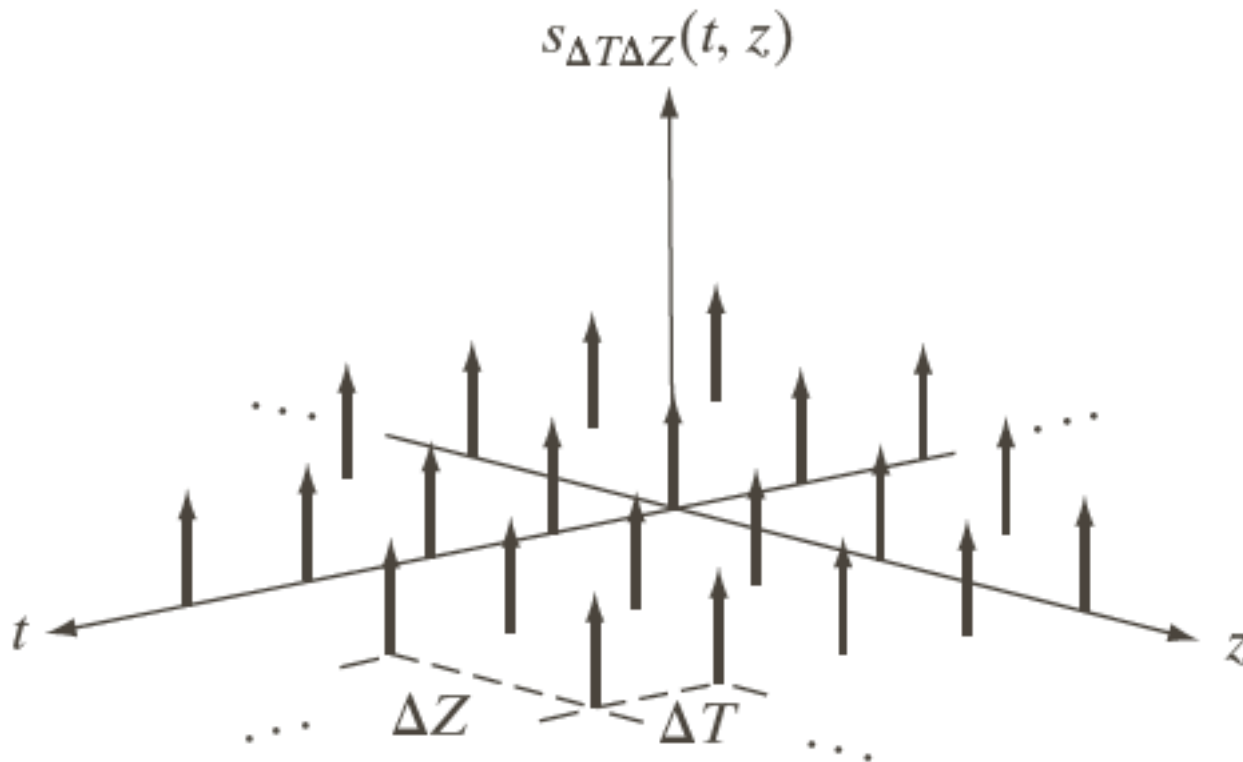
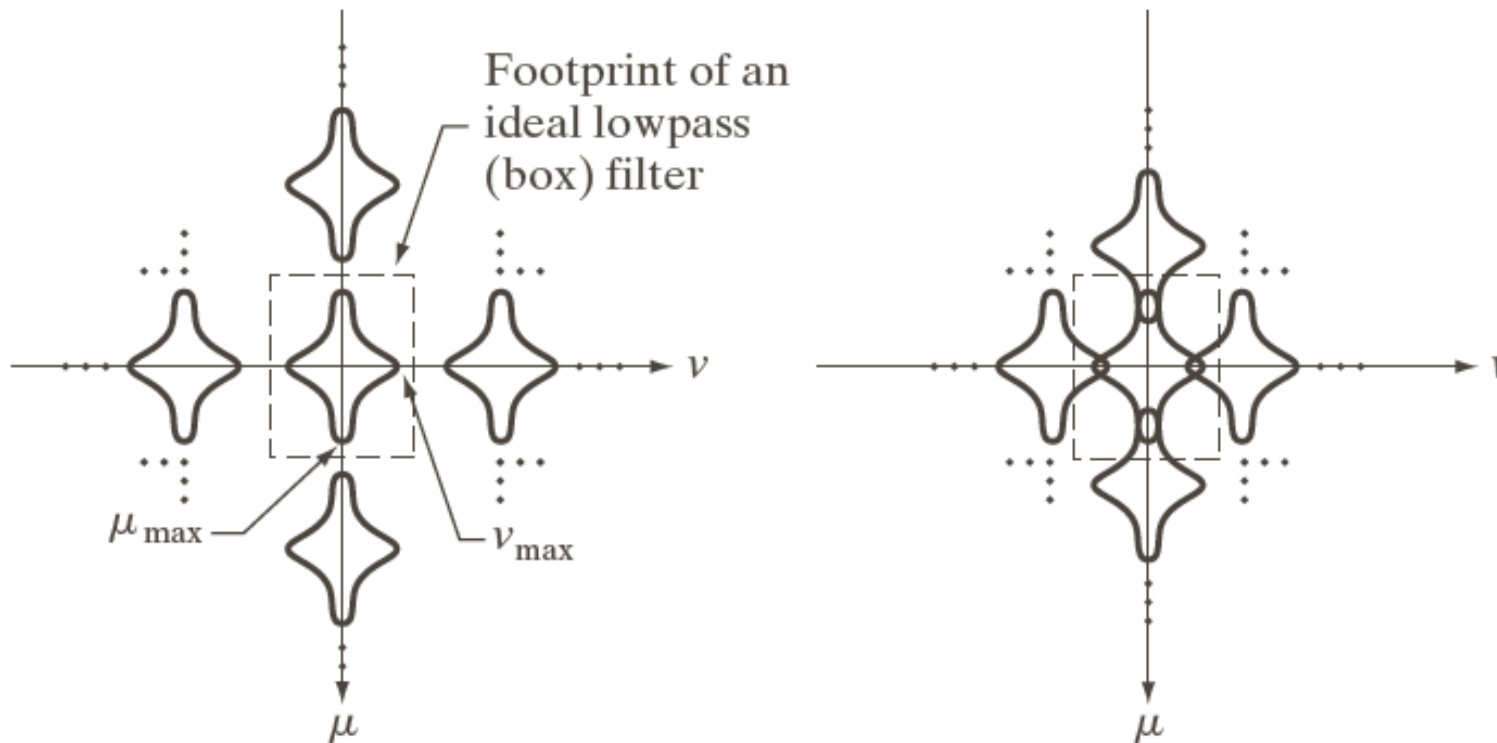


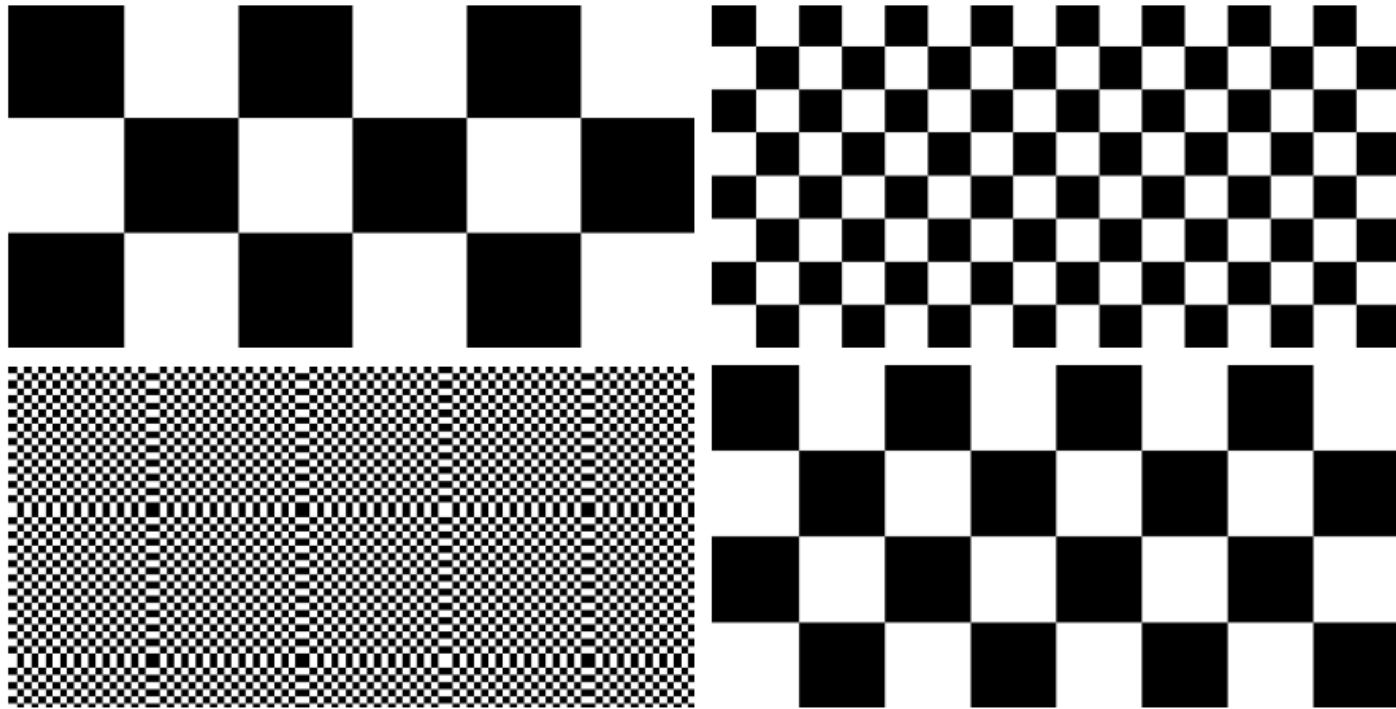
FIGURE 4.14
Two-dimensional
impulse train.

Amostragem 2D



a b
FIGURE 4.15
Two-dimensional
Fourier transforms
of (a) an over-
sampled, and
(b) under-sampled
band-limited
function.

Aliasing em imagens



| | |
|---|---|
| a | b |
| c | d |

FIGURE 4.16 Aliasing in images. In (a) and (b), the lengths of the sides of the squares are 16 and 6 pixels, respectively, and aliasing is visually negligible. In (c) and (d), the sides of the squares are 0.9174 and 0.4798 pixels, respectively, and the results show significant aliasing. Note that (d) masquerades as a “normal” image.

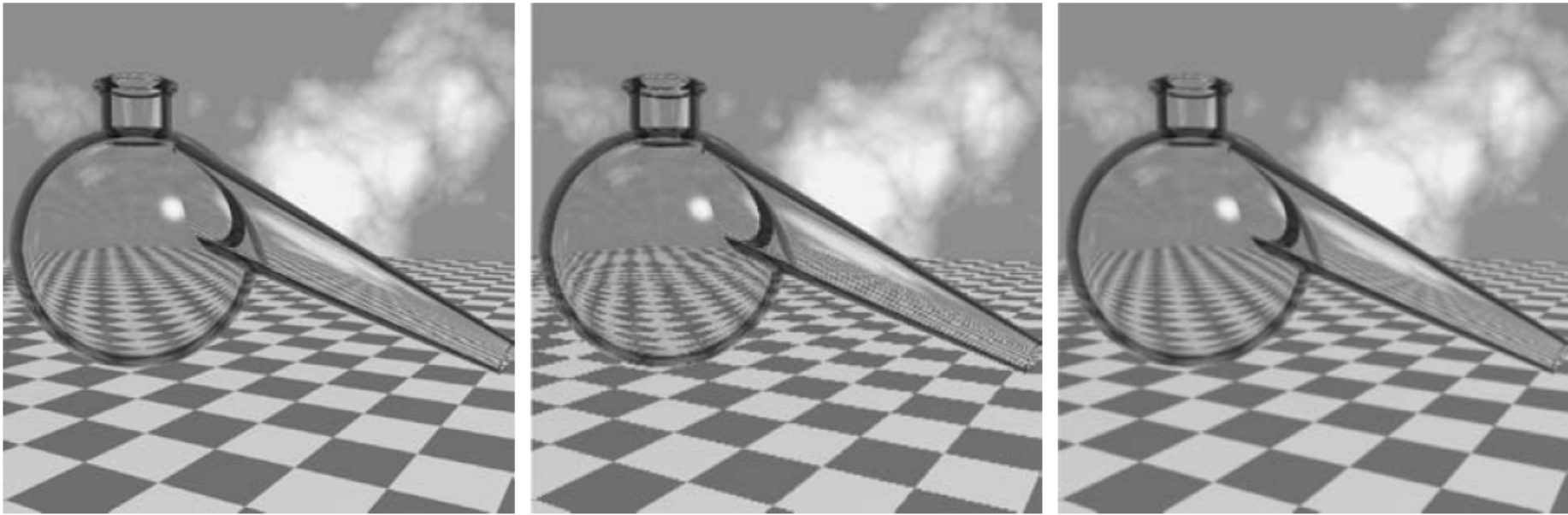
Aliasing em imagens



a b c

FIGURE 4.17 Illustration of aliasing on resampled images. (a) A digital image with negligible visual aliasing. (b) Result of resizing the image to 50% of its original size by pixel deletion. Aliasing is clearly visible. (c) Result of blurring the image in (a) with a 3×3 averaging filter prior to resizing. The image is slightly more blurred than (b), but aliasing is not longer objectionable. (Original image courtesy of the Signal Compression Laboratory, University of California, Santa Barbara.)

Aliasing em imagens



a b c

FIGURE 4.18 Illustration of jaggies. (a) A 1024×1024 digital image of a computer-generated scene with negligible visible aliasing. (b) Result of reducing (a) to 25% of its original size using bilinear interpolation. (c) Result of blurring the image in (a) with a 5×5 averaging filter prior to resizing it to 25% using bilinear interpolation. (Original image courtesy of D. P. Mitchell, Mental Landscape, LLC.)

Transformada Discreta de Fourier 2D-DFT

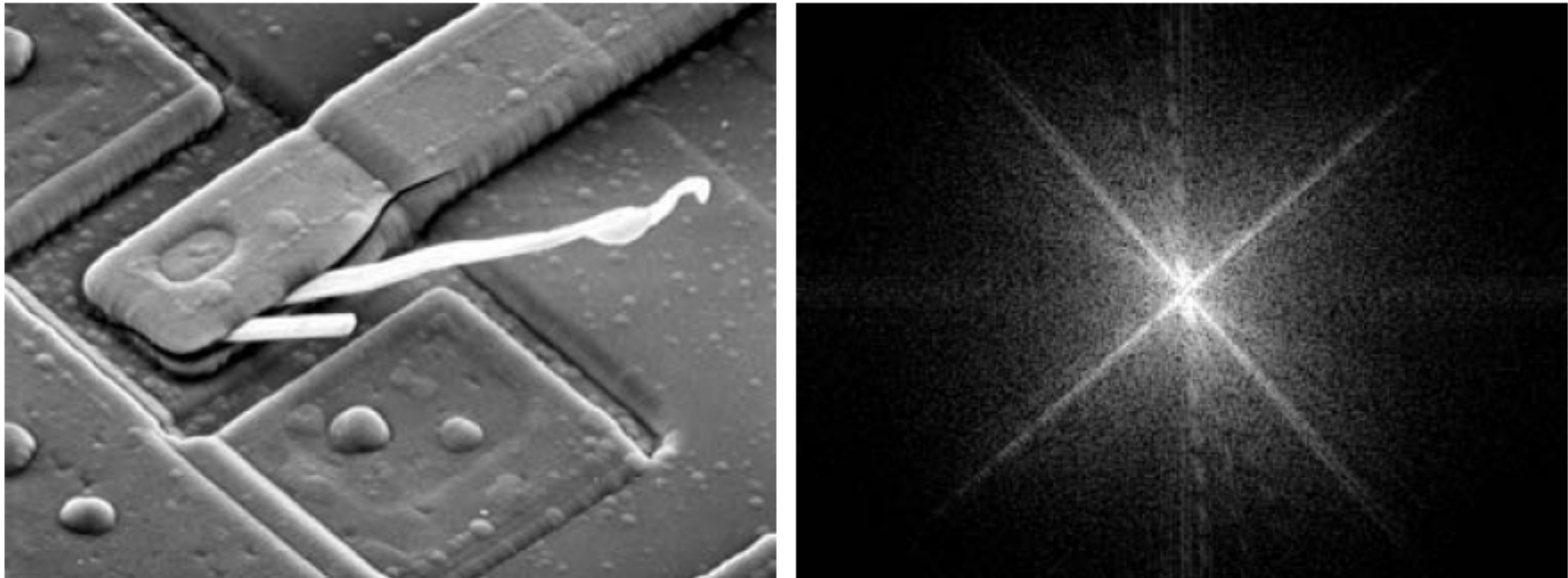
Transformada Discreta de Fourier

- No caso de duas variáveis, o par DFT é:

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)}, u = 0, 1, \dots, M-1; v = 0, 1, \dots, N-1$$

$$f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi(ux/M + vy/N)}, x = 0, 1, \dots, M-1; y = 0, 1, \dots, N-1$$

- onde $f(x, y)$, $F(u, v)$ são imagens digitais de tamanho $M \times N$.



a b

FIGURE 4.29 (a) SEM image of a damaged integrated circuit. (b) Fourier spectrum of (a). (Original image courtesy of Dr. J. M. Hudak, Brockhouse Institute for Materials Research, McMaster University, Hamilton, Ontario, Canada.)

Transformada Discreta de Fourier

- A amostragem da função contínua agora é feita em uma grade bidimensional, com divisões de largura Δx e Δy nos eixos x e y , respectivamente
- Como no caso unidimensional, a função discreta $f(x,y)$ representa amostras da função

$$f(x_0 + x\Delta x, y_0 + y\Delta y)$$

para $x = 0, 1, 2, \dots, M-1$ e $y = 0, 1, 2, \dots, N-1$

$$\Delta u = \frac{1}{M\Delta x}, \quad \Delta v = \frac{1}{N\Delta y}$$

Amplitude e Fase

As funções complexas podem ser decompostas em suas magnitudes e fases.

$$F(u, v) = |F(u, v)|e^{-j\phi(u, v)}$$

$$|F(u, v)| = [R^2(u, v) + I^2(u, v)]^{1/2}$$

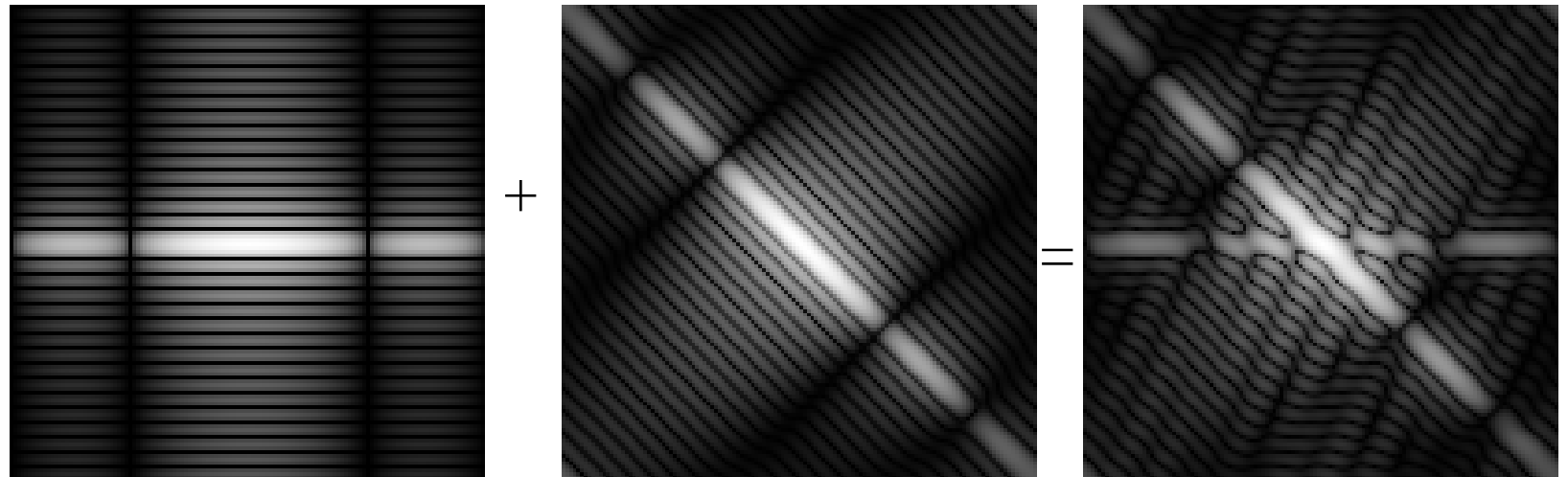
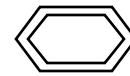
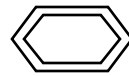
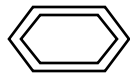
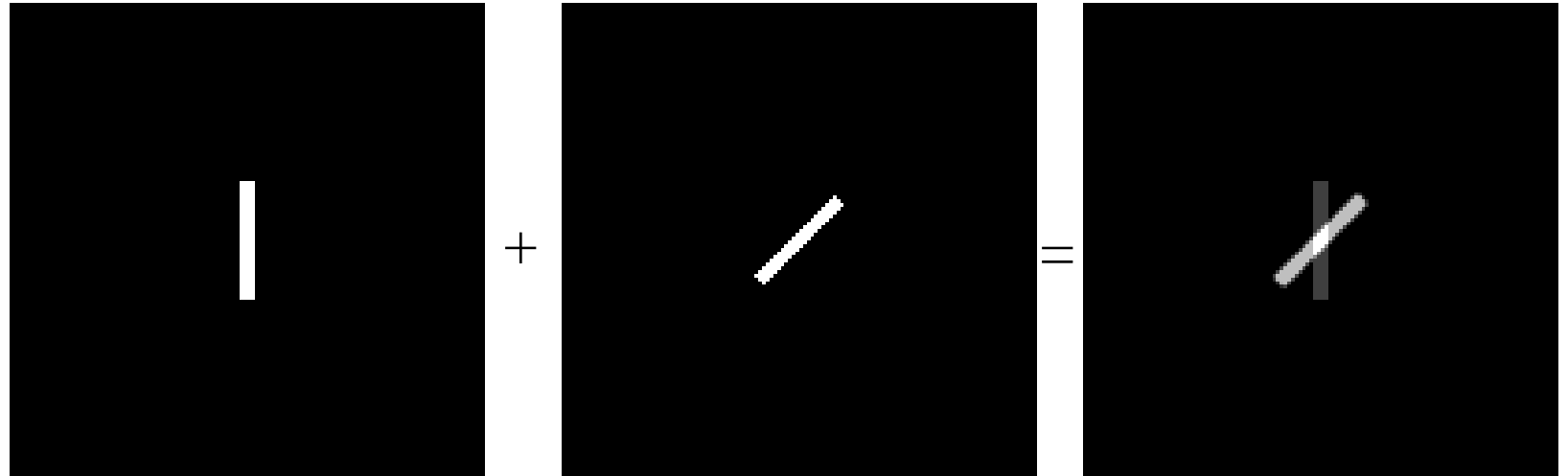
$$\phi(u, v) = \arctan \left[\frac{I(u, v)}{R(u, v)} \right]$$

v. fft demo, HIPR...

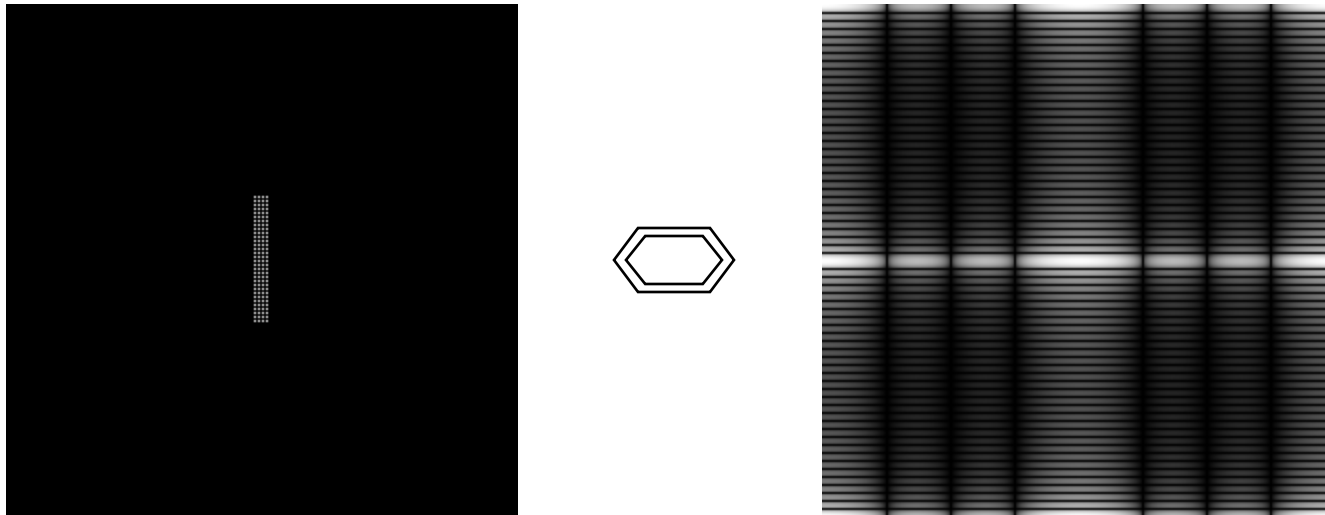
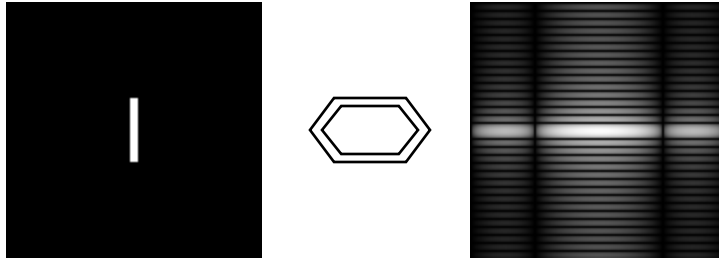
Propriedades DFT

- Linearidade
- Translação e rotação
- Periodicidade
 - Questões de implementação
- Simetria

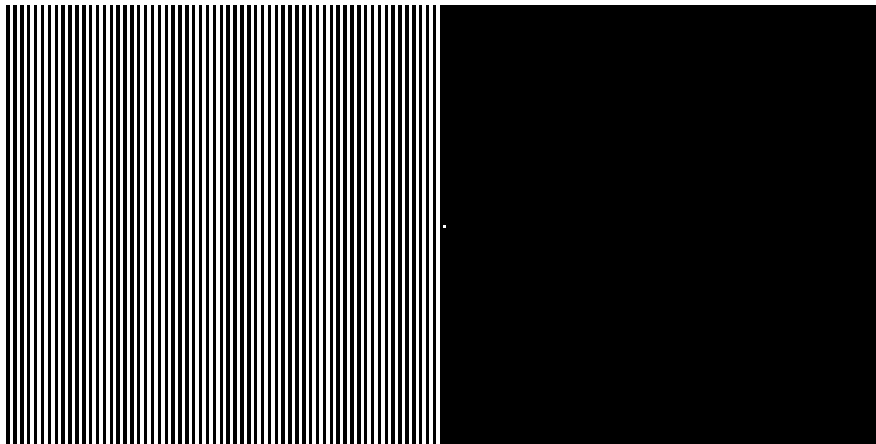
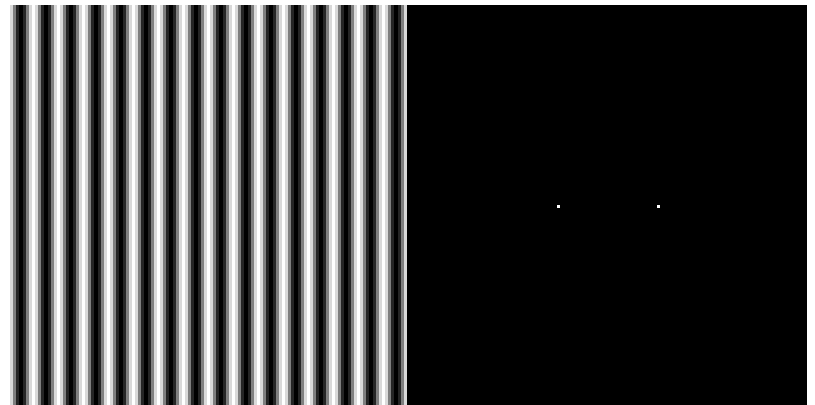
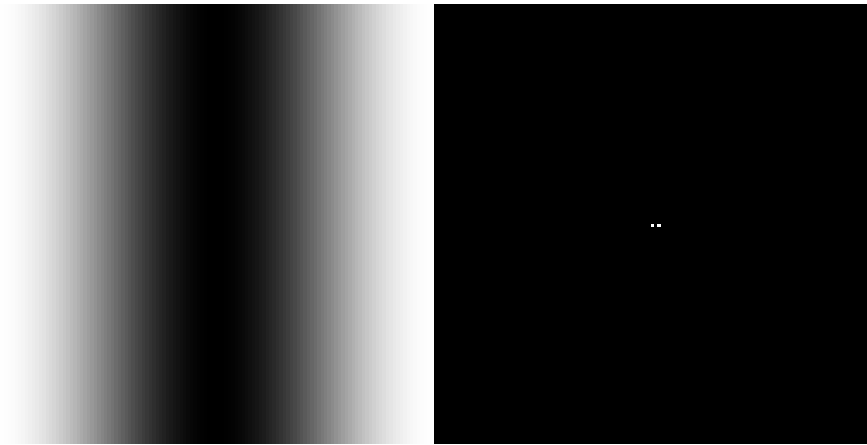
Combinação Linear (soma)



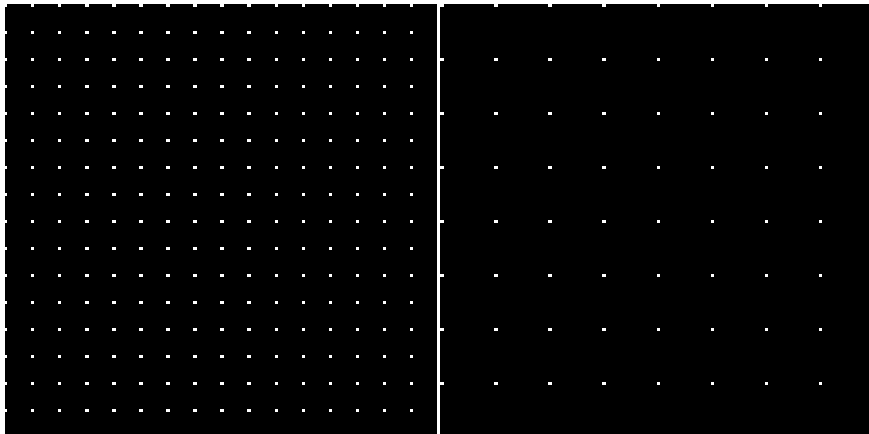
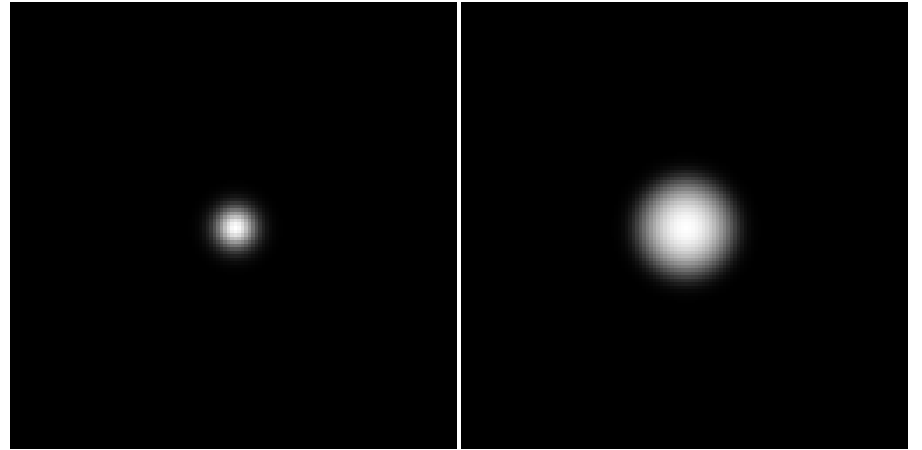
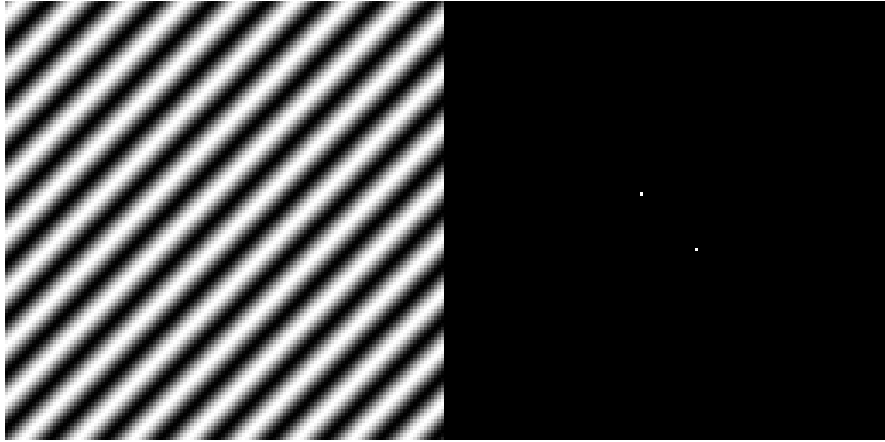
Expansão



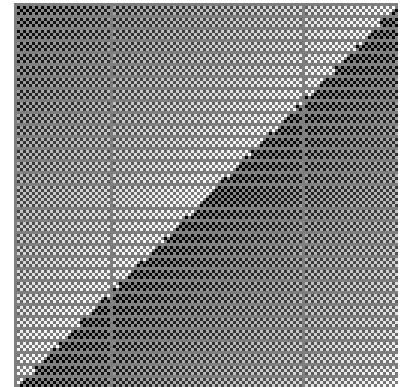
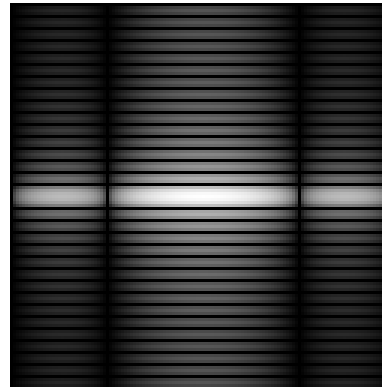
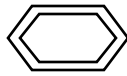
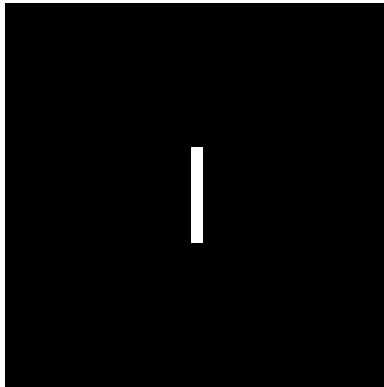
Relação de frequência espaço/espectro



Alguns pares...

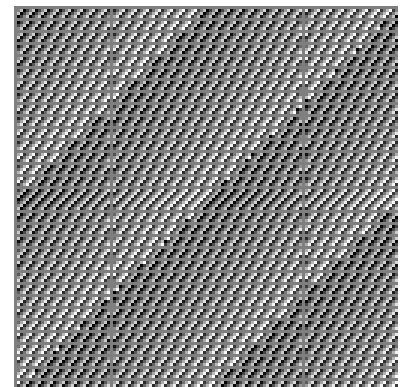
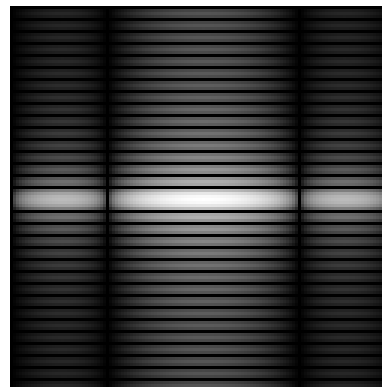
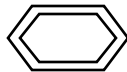


Propriedades DFT - Translação

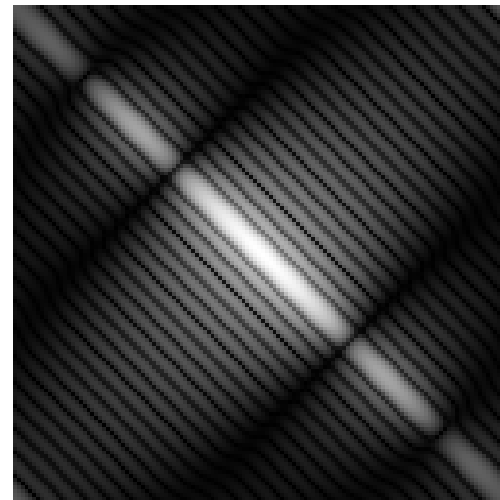
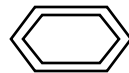
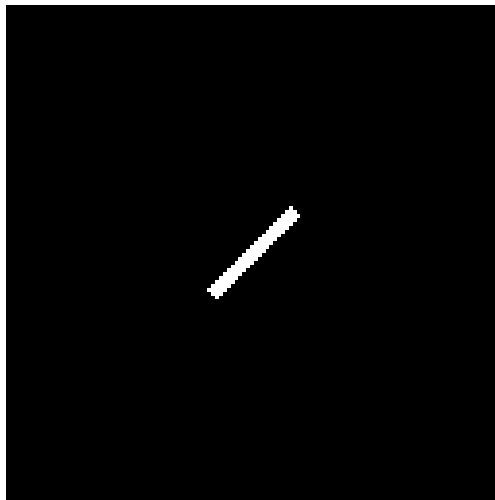
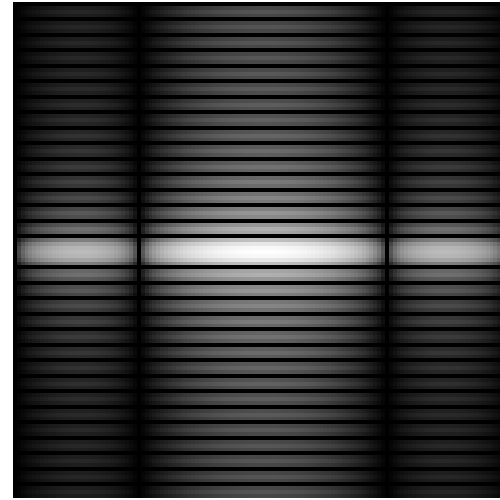
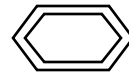
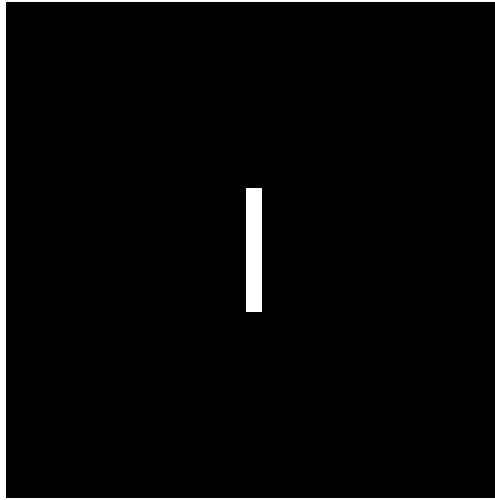


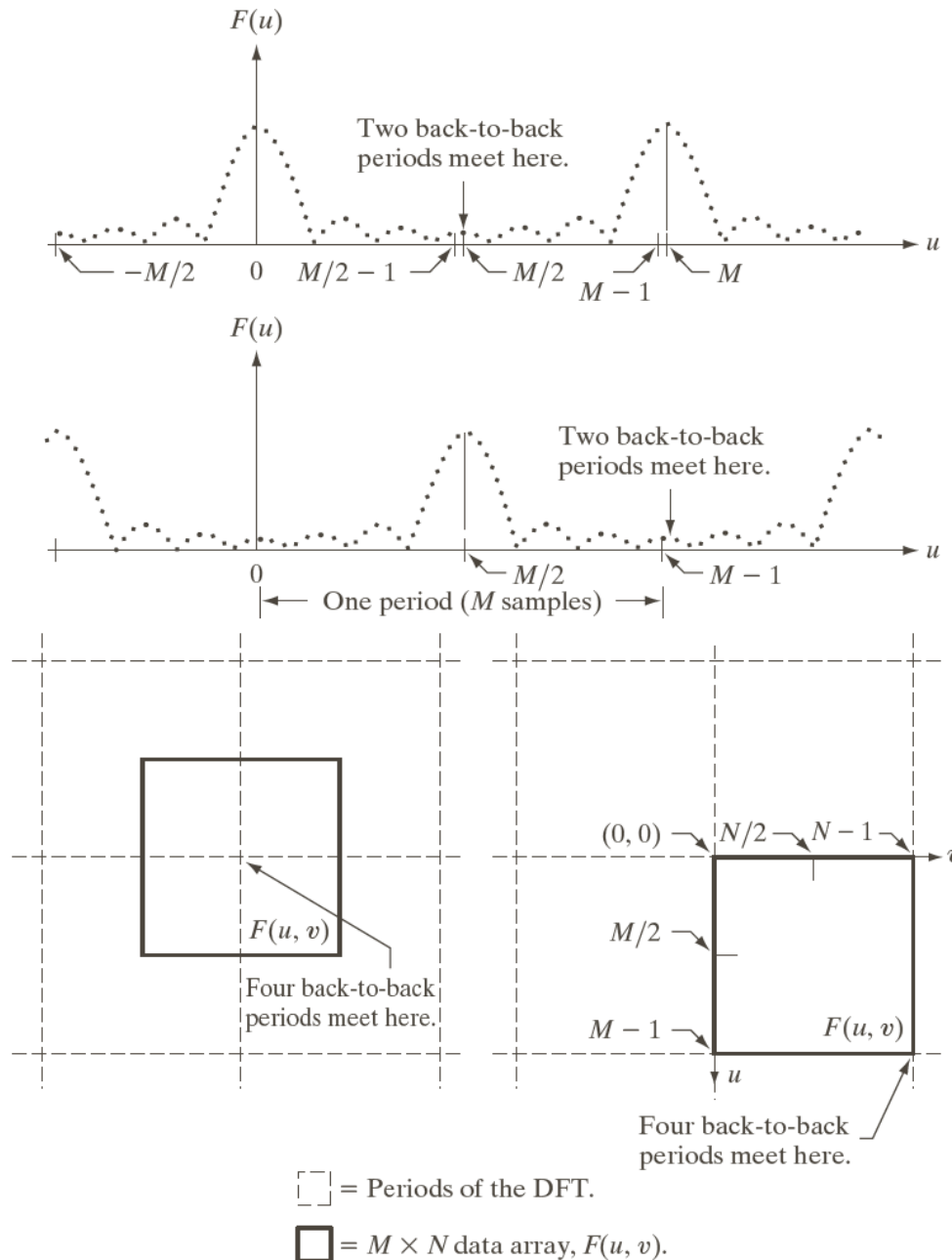
$|F(u,v)|$

$\phi F(u,v)$



Rotação





a
b
c d

FIGURE 4.23

Centering the Fourier transform.

(a) A 1-D DFT showing an infinite number of periods.

(b) Shifted DFT obtained by multiplying $f(x)$ by $(-1)^x$ before computing $F(u)$.

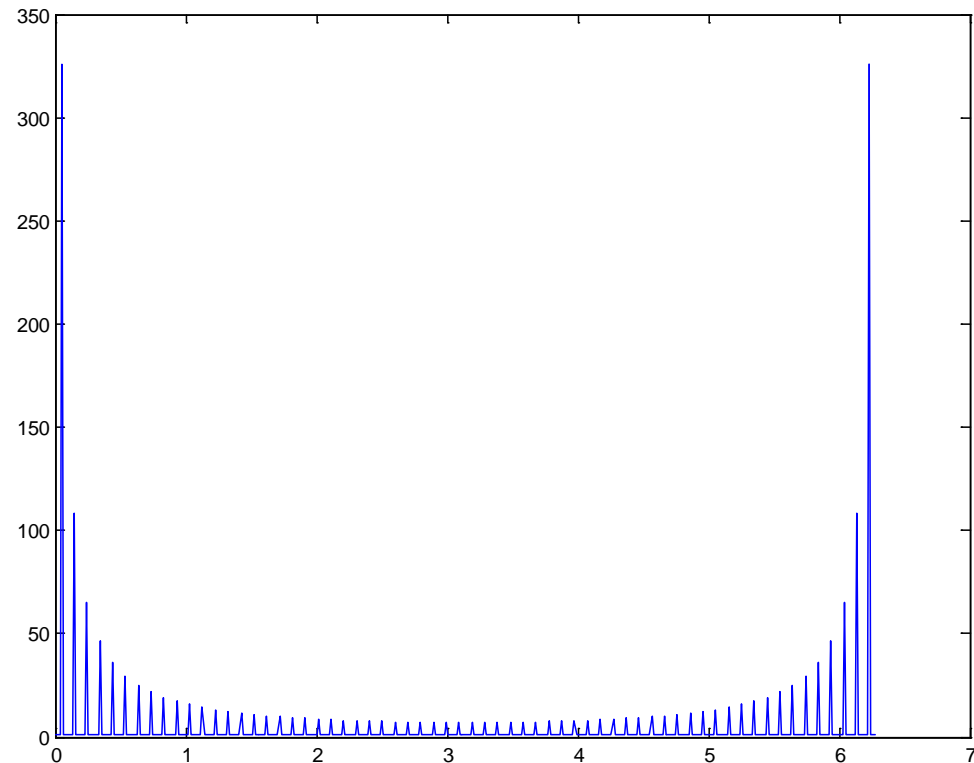
(c) A 2-D DFT showing an infinite number of periods.

The solid area is the $M \times N$ data array, $F(u, v)$, obtained with Eq. (4.5-15). This array consists of four quarter periods.

(d) A Shifted DFT obtained by multiplying $f(x, y)$ by $(-1)^{x+y}$ before computing $F(u, v)$. The data now contains one complete, centered period, as in (b).

DFT - shifting

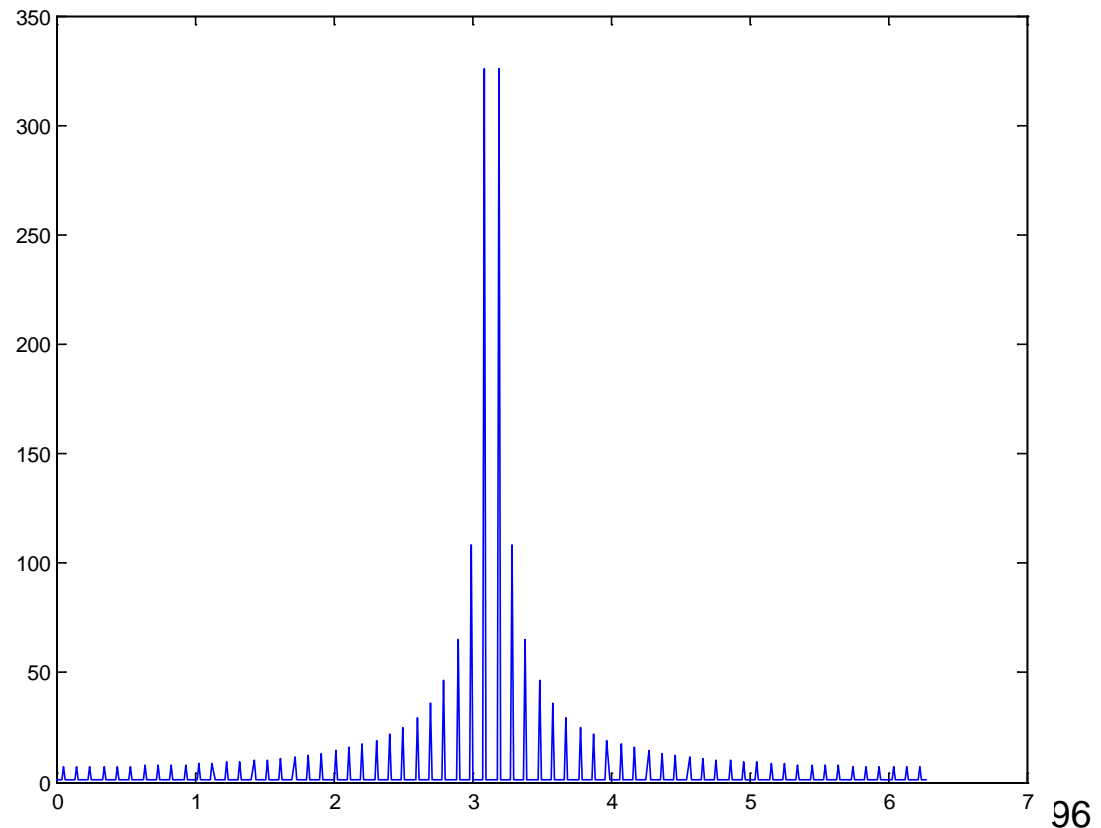
- Quando realizado a DFT de uma onda quadrada obtemos:



Observe houve um deslocamento

DFT – shifting, (fftshift-matlab)

- A FT é centralizada na origem, mas
- a DFT é centralizada em $N/2$
- É necessário realizar um deslocamento para corrigir o resultado.



DFT – shifting, (fftshift-matlab)

- Lembrando que: $h(t) e^{j2\pi u_0 t} \Leftrightarrow H(f - u_0)$
e fazendo

$$u_0 = N / 2$$

$$\begin{aligned} e^{j2\pi u_0 t / N} &= e^{j2\pi (N/2) t / N} = e^{j\pi t} \\ &= (e^{j\pi})^t = [\cos \pi + j \sin \pi]^t = (-1)^t \end{aligned}$$

$$f(x, y) (-1)^{x+y} \Leftrightarrow F(u - M / 2, v - N / 2)$$

A multiplicação desloca o sinal tal que $F(0,0)$ fique no centro do retângulo de frequência definido pelos intervalos $[0, M-1]$ e $[0, N-1]$.

Propriedades DFT - Translação

a b
c d

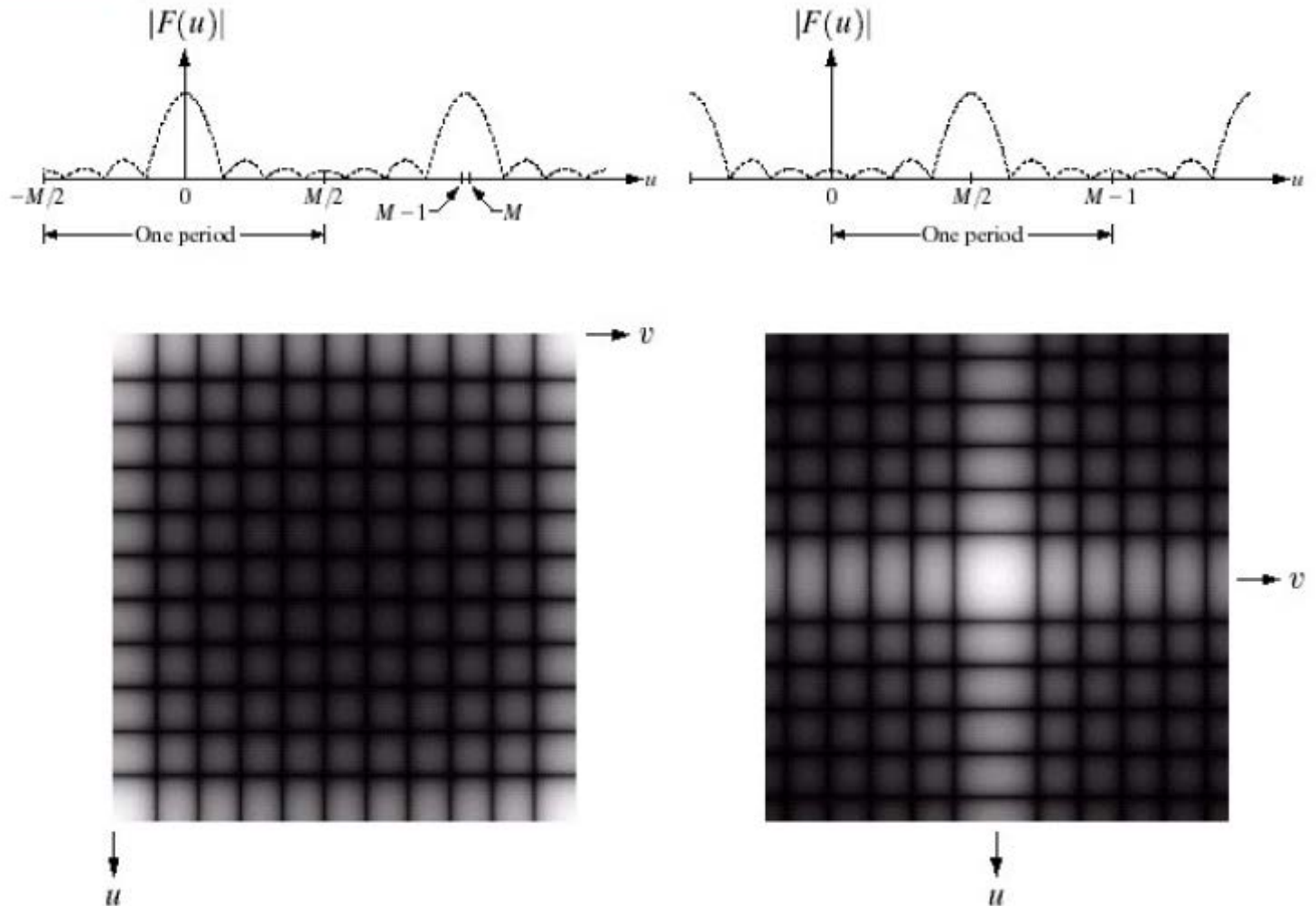
FIGURE 4.34

(a) Fourier spectrum showing back-to-back half periods in the interval $[0, M - 1]$.

(b) Shifted spectrum showing a full period in the same interval.

(c) Fourier spectrum of an image, showing the same back-to-back properties as (a), but in two dimensions.

(d) Centered Fourier spectrum.



Espectro de Fourier 2D

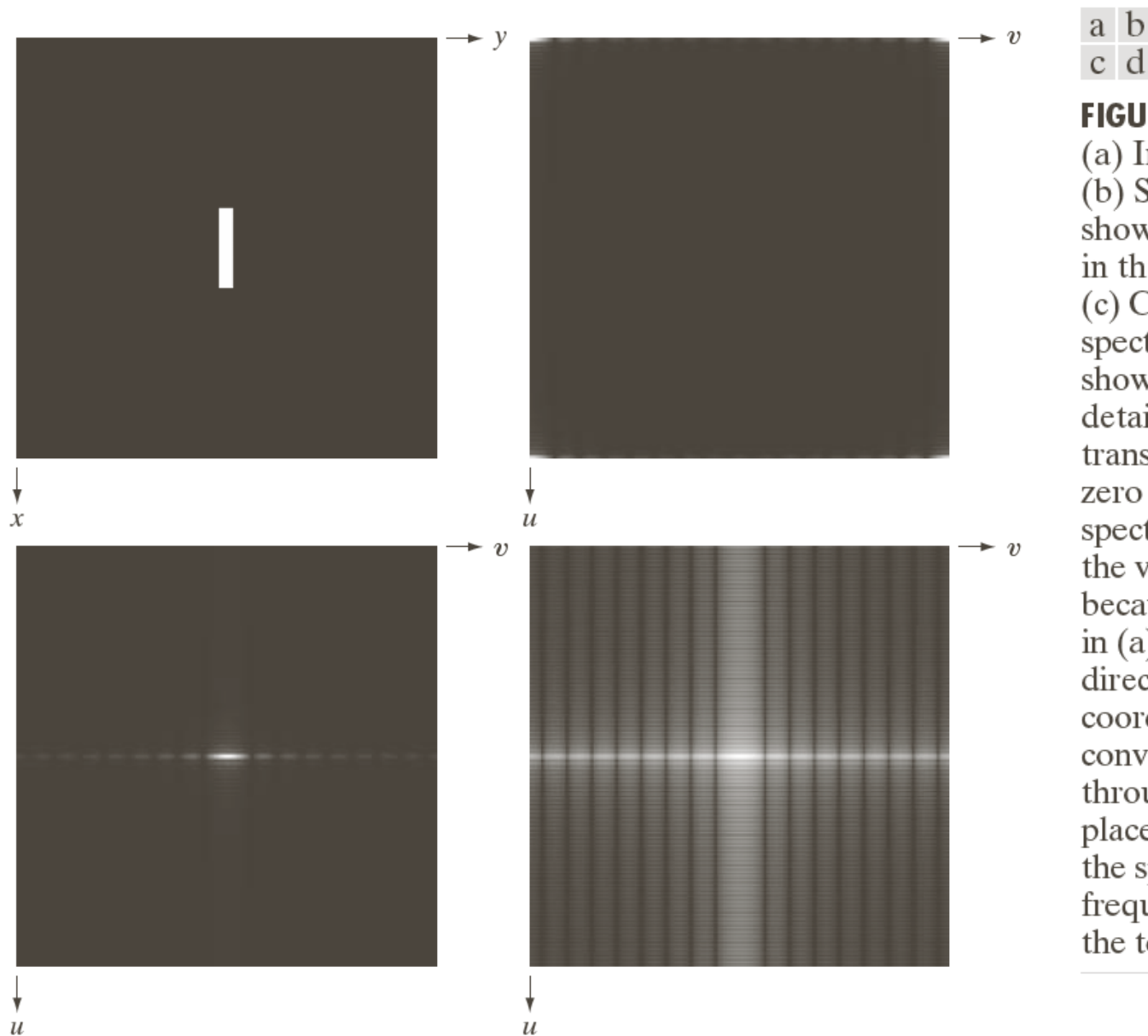
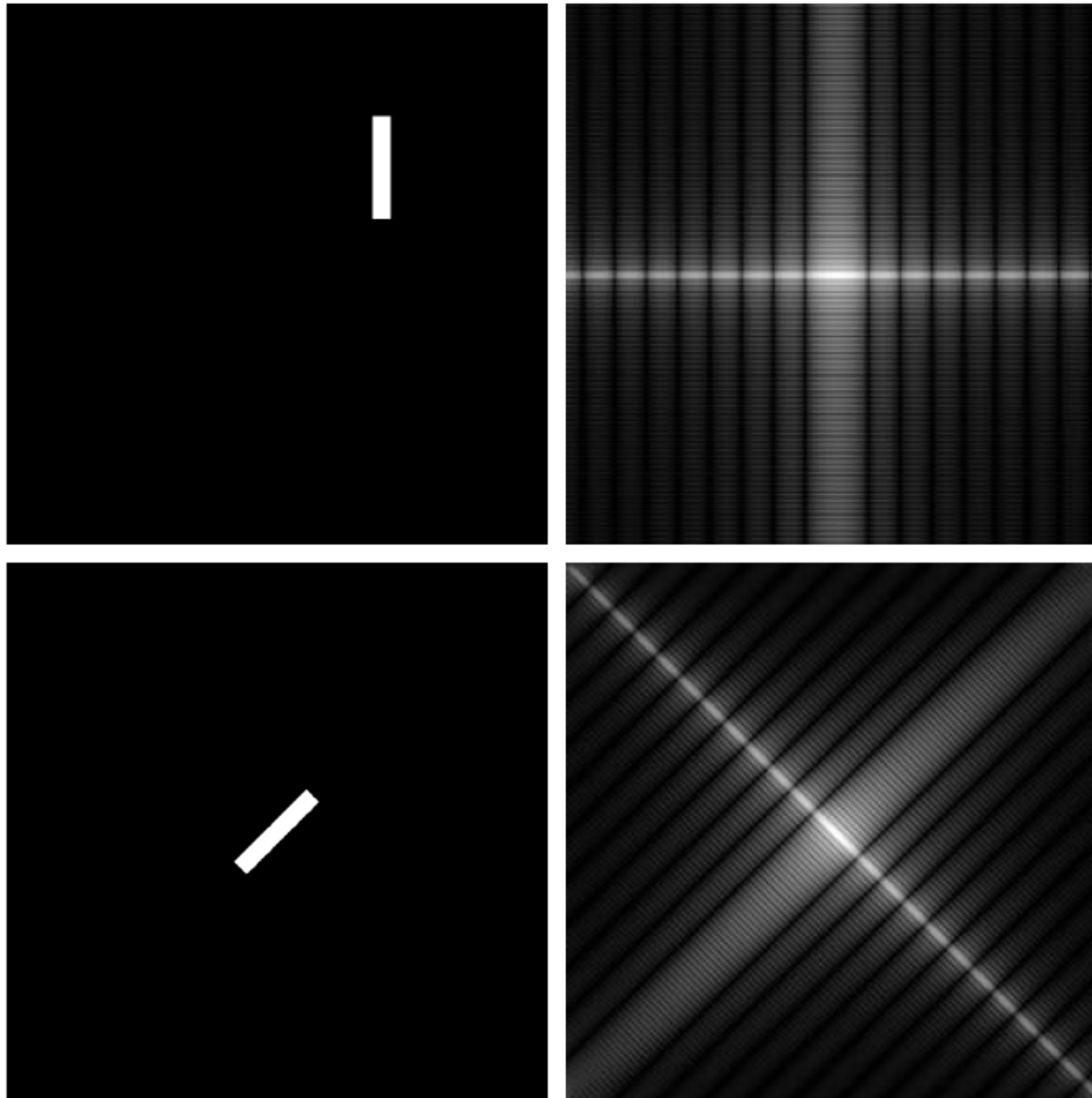


FIGURE 4.24

(a) Image.
(b) Spectrum showing bright spots in the four corners.
(c) Centered spectrum.
(d) Result showing increased detail after a log transformation. The zero crossings of the spectrum are closer in the vertical direction because the rectangle in (a) is longer in that direction. The coordinate convention used throughout the book places the origin of the spatial and frequency domains at the top left.

Após translação/rotação



| | |
|---|---|
| a | b |
| c | d |

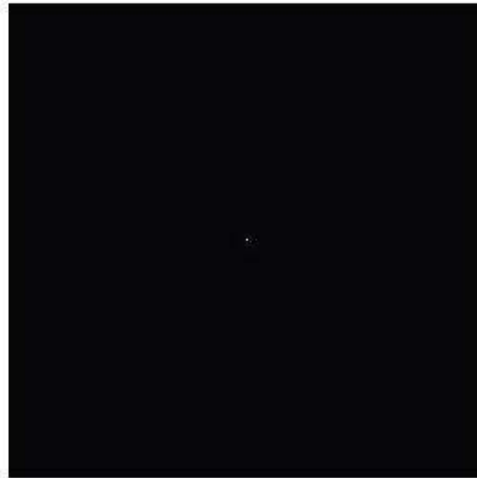
FIGURE 4.25

(a) The rectangle in Fig. 4.24(a) translated, and (b) the corresponding spectrum. (c) Rotated rectangle, and (d) the corresponding spectrum. The spectrum corresponding to the translated rectangle is identical to the spectrum corresponding to the original image in Fig. 4.24(a).

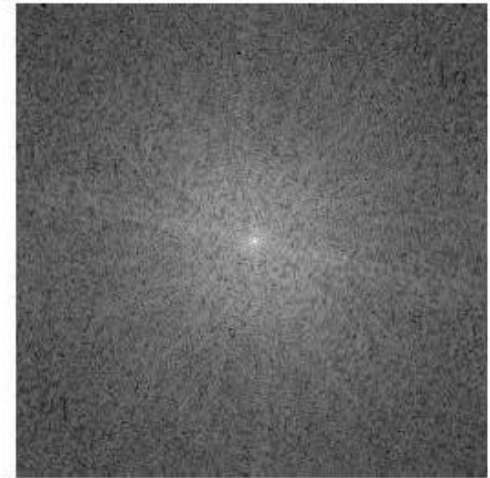
Ajuste da escala dinâmica do espectro de Fourier



Imagem Original



Transformada de Fourier
mapeado linearmente



Transformada de Fourier
mapeado logaritmicamente

Combinando Amplitude e Fase

As funções complexas podem ser decompostas em suas magnitudes e fases.

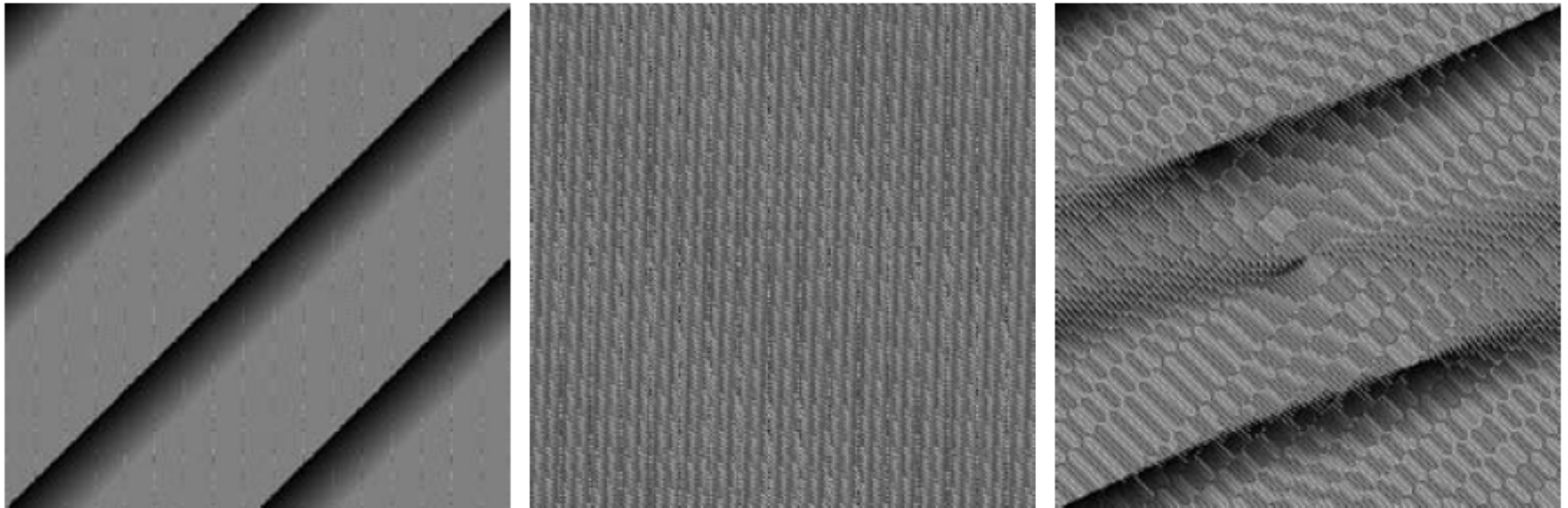
$$F(u, v) = |F(u, v)|e^{-j\phi(u,v)}$$

$$|F(u, v)| = [R^2(u, v) + I^2(u, v)]^{1/2}$$

$$\phi(u, v) = \arctan \left[\frac{I(u, v)}{R(u, v)} \right]$$

Com estas propriedades podemos combinar a amplitude e a fase em imagens.

Ângulos de fase são distintos...



a b c

FIGURE 4.26 Phase angle array corresponding (a) to the image of the centered rectangle in Fig. 4.24(a), (b) to the translated image in Fig. 4.25(a), and (c) to the rotated image in Fig. 4.25(c).

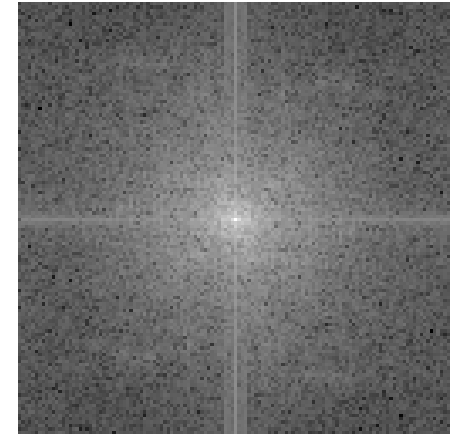
Amplitude e Fase



original

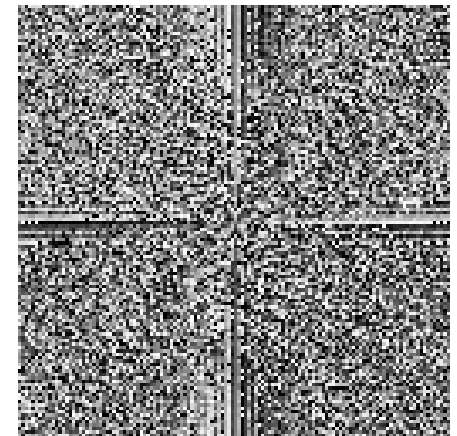
$$|F(u,v)|$$

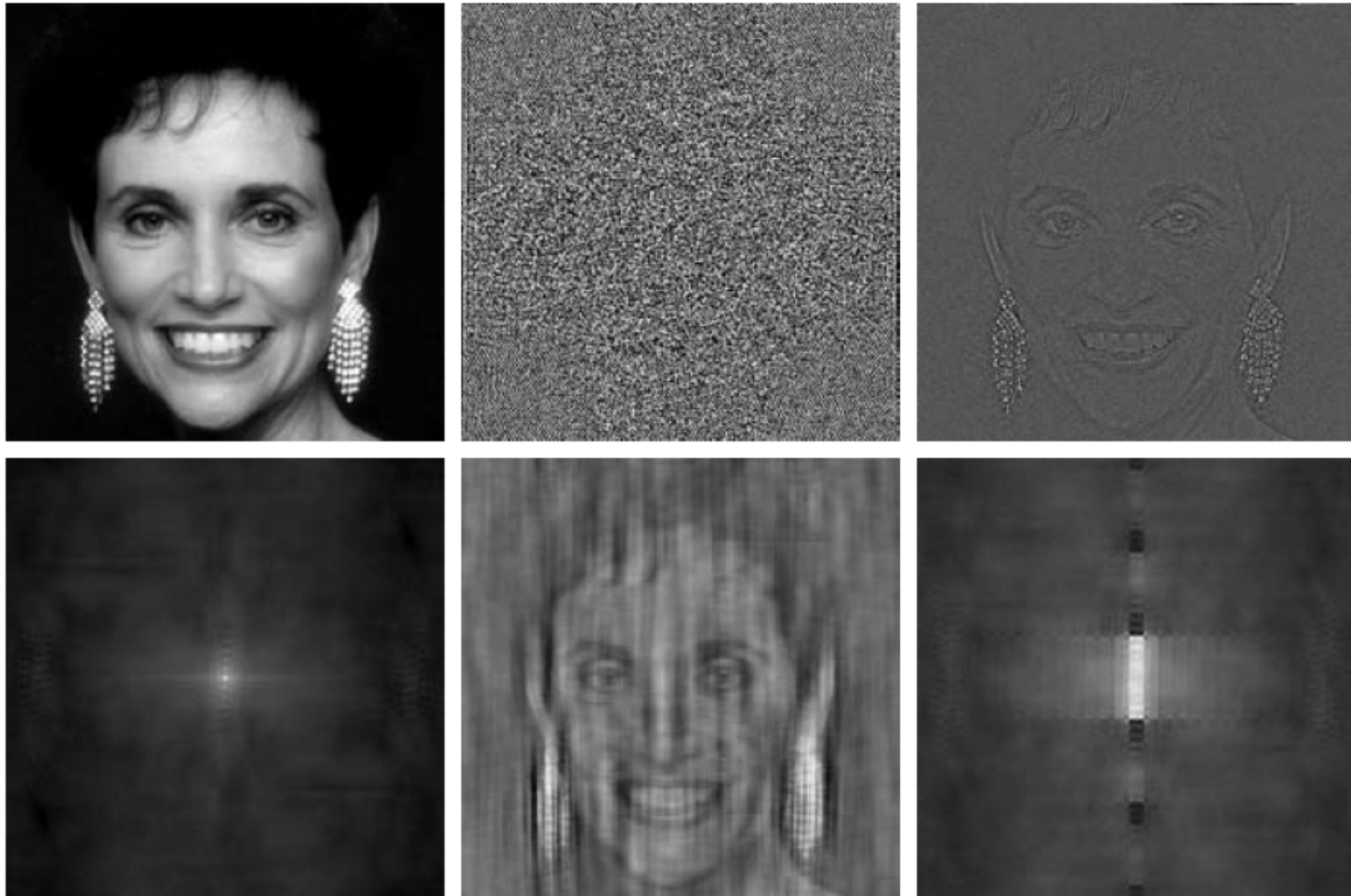
amplitude



fase

$$\phi F(u,v)$$



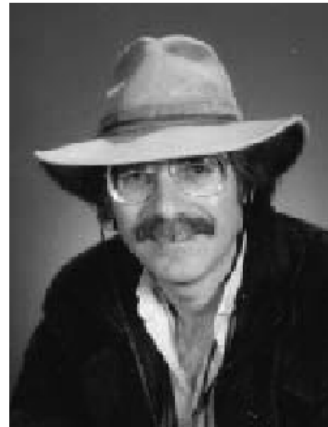


| | | |
|---|---|---|
| a | b | c |
| d | e | f |

FIGURE 4.27 (a) Woman. (b) Phase angle. (c) Woman reconstructed using only the phase angle. (d) Woman reconstructed using only the spectrum. (e) Reconstruction using the phase angle corresponding to the woman and the spectrum corresponding to the rectangle in Fig. 4.24(a). (f) Reconstruction using the phase of the rectangle and the spectrum of the woman.

Combinando Amplitude e Fase

Rick



Linda



Pictures reconstructed
using the Fourier phase
of another picture

Mag{Linda}
Phase{Rick}

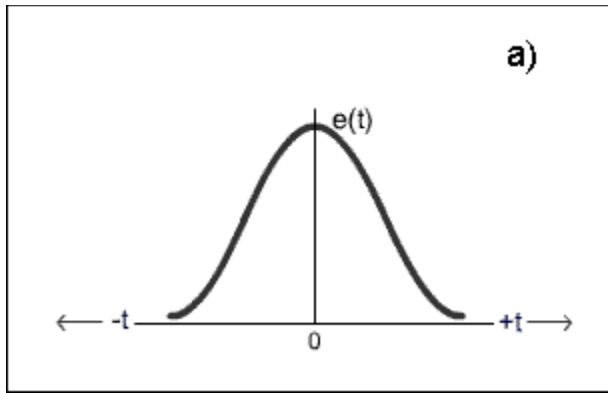


Mag{Rick}
Phase{Linda}



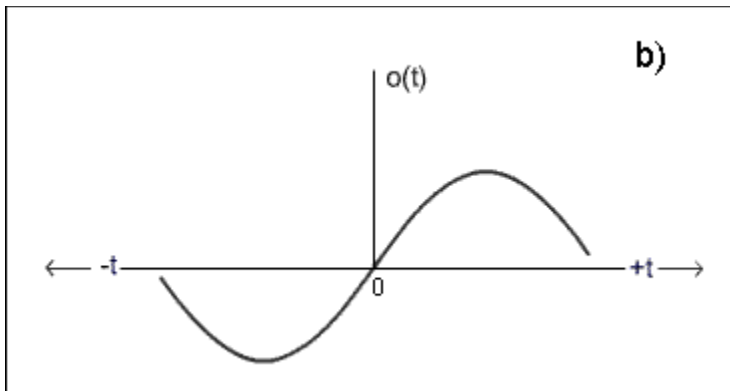
The phase of the Fourier transform is much more important than the magnitude in reconstructing an image.

Simetria



função par (simétrica)

$$f(t) = f(-t)$$



função ímpar (antissimétrica)

$$f(t) = -f(-t)$$

Simetria

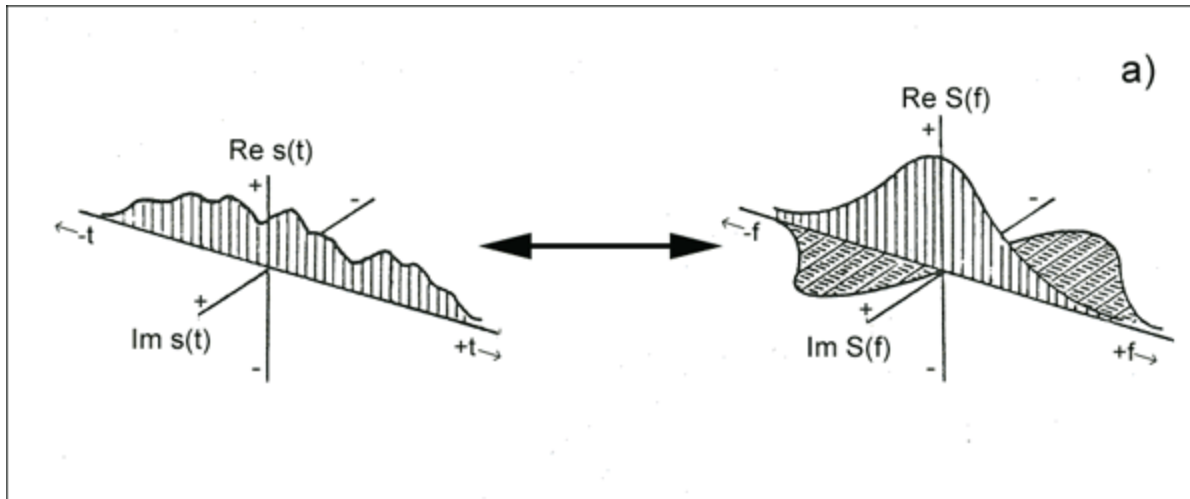


Figure 3.4a. Symmetry properties of Fourier transform pairs when a real signal, $s(t)$ is arbitrary, neither even nor odd. The Fourier transforms are: Hermitian. Double-ended arrows indicate Fourier transform pairs.

Fonte: <http://dagsaw.sdsu.edu/3.3.html>

Simetria

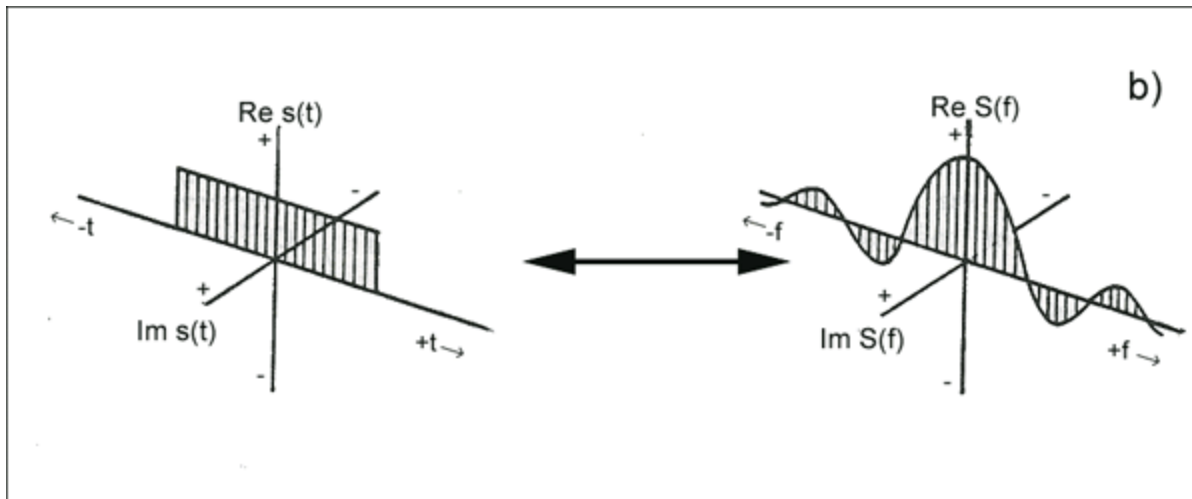


Figure 3.4b. Symmetry properties of Fourier transform pairs when a real signal, $s(t)$ is an even function. The Fourier transforms are: real, even. Double-ended arrows indicate Fourier transform pairs.

Simetria

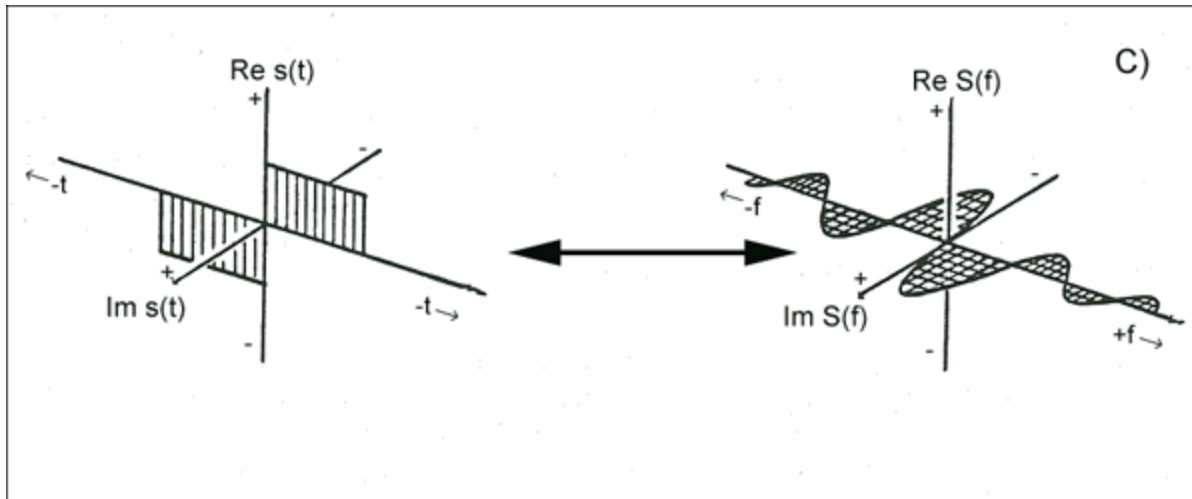


Figure 3.4c. Symmetry properties of Fourier transform pairs when a real signal, $s(t)$ is an odd function. The Fourier transforms are: imaginary, odd; respectively. Double-ended arrows indicate Fourier transform pairs.

Teorema da convolução 2D

A expressão para convolução circular 2-D é dada por

$$f(x, y) * h(x, y) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n)h(x - m, y - n)$$

que fornece um período de uma sequência periódica 2-D.

O teorema da convolução 2-D é dado por

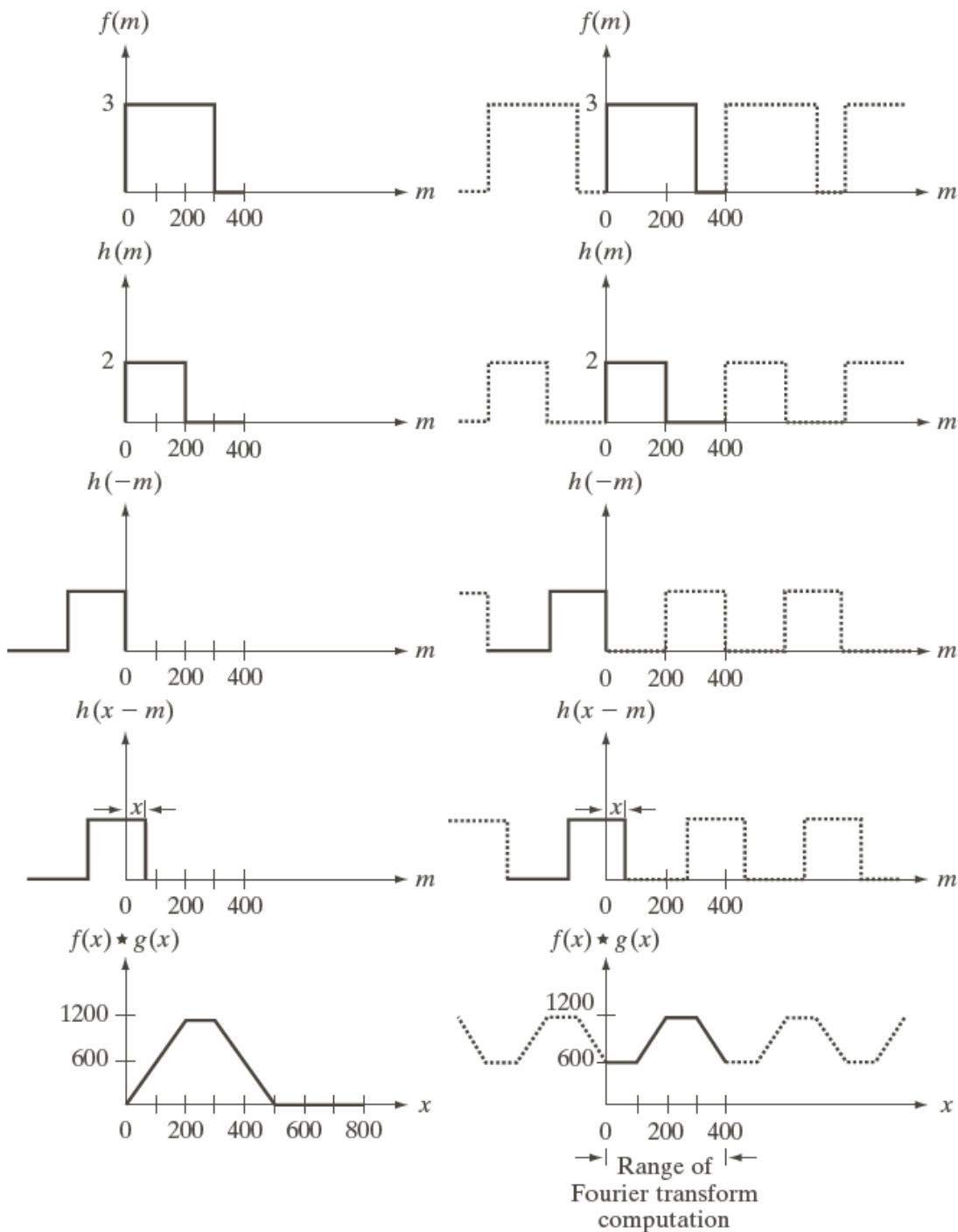
$$f(x, y) * h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v)H(u, v)$$

$$f(x, y)h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) * H(u, v)$$

Teorema da convolução 2D

Natureza periódica do sinal e erro de 'wrap-around' (ex. 1D)

Solução: preenchimento com zeros (*zero-padding*)



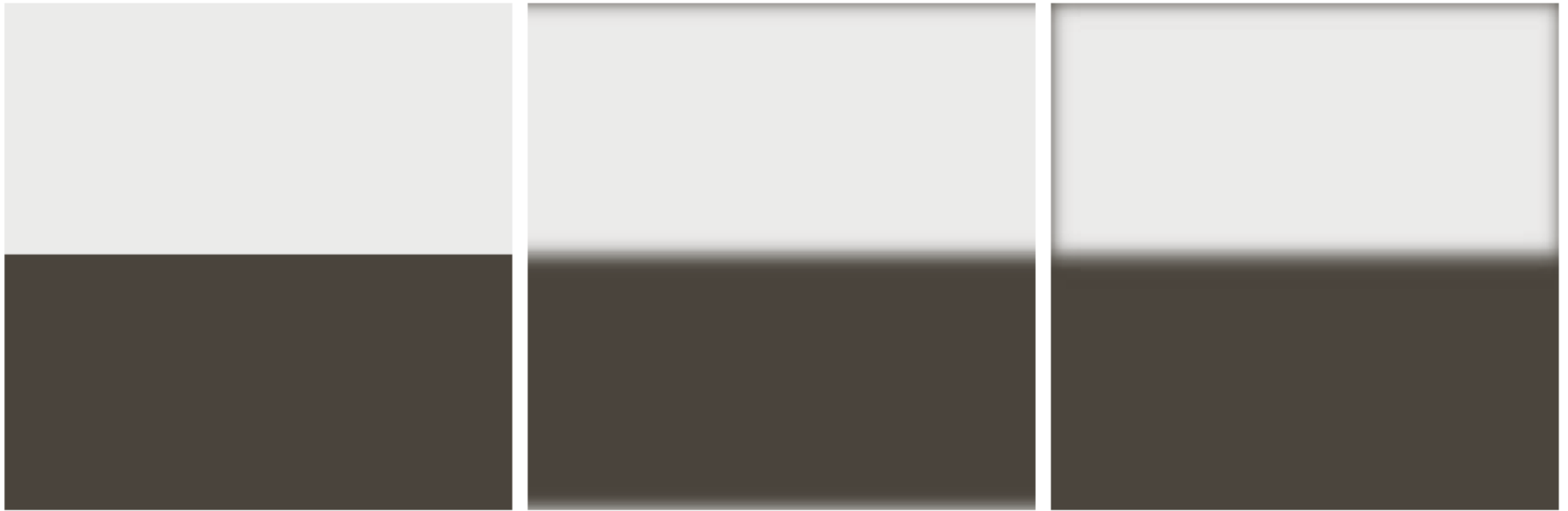
| | |
|---|---|
| a | f |
| b | g |
| c | h |
| d | i |
| e | j |

FIGURE 4.28 Left column: convolution of two discrete functions obtained using the approach discussed in Section 3.4.2. The result in (e) is correct. Right column: Convolution of the same functions, but taking into account the periodicity implied by the DFT. Note in (j) how data from adjacent periods produce wraparound error, yielding an incorrect convolution result. To obtain the correct result, function padding must be used.

Efeito *wrap-around*

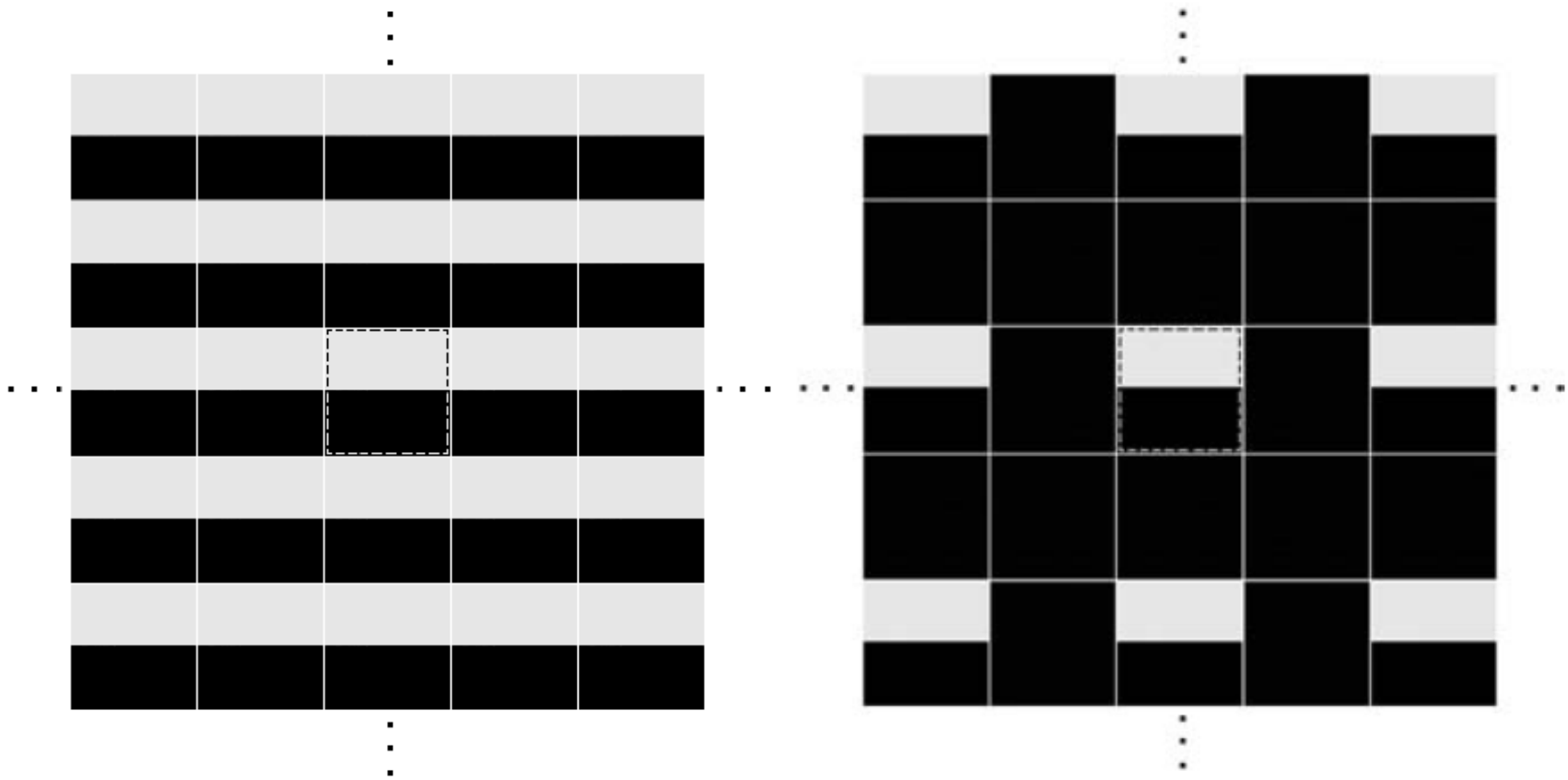
- A Fig.4.28 mostra um exemplo 1-D onde a convolução resulta em erro (*wraparound error*) devido á periodicidade das funções no DFT. A solução para esse problema é fazer o *padding* com zeros em ambas as funções $f(x)$ e $h(x)$ compostas por A e B amostras respectivamente, de tal forma que as funções tenham o mesmo comprimento P , tal que

$$P \geq A + B - 1$$



a b c

FIGURE 4.32 (a) A simple image. (b) Result of blurring with a Gaussian lowpass filter without padding. (c) Result of lowpass filtering with padding. Compare the light area of the vertical edges in (b) and (c).



a b

FIGURE 4.33 2-D image periodicity inherent in using the DFT. (a) Periodicity without image padding. (b) Periodicity after padding with 0s (black). The dashed areas in the center correspond to the image in Fig. 4.32(a). (The thin white lines in both images are superimposed for clarity; they are not part of the data.)

Próxima aula: Filtragem no domínio da frequência

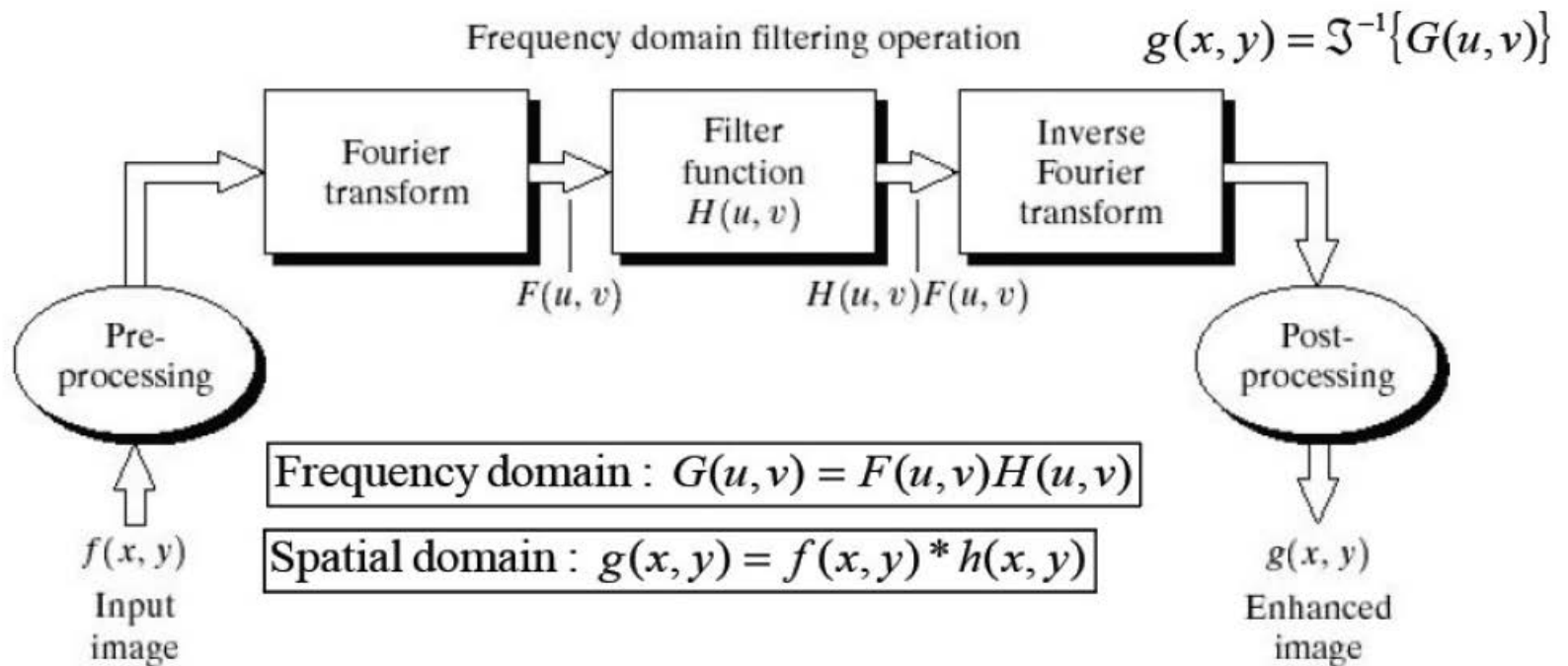


FIGURE 4.5 Basic steps for filtering in the frequency domain.

Bibliografia

- Digital Image Processing, 3rd. Edition, Rafael C. Gonzalez, Richard E. Woods, 2008