Mais sobre oscilações amortecidos/Forçados

- Vimos que a solução estacionária p/ um oscilador amortecido e forçado, ~~dado~~ descrito pela equação:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = F_0 \cos\omega t \quad \left(\omega_0^2 = \frac{k}{m}\right)$$

é $x_e(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$

onde $A = \dfrac{F_0/m}{\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2\right]^{1/2}}$; $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\gamma}{2(\omega_0-\omega)}$

$A(\omega)$ é máxima quando $\dfrac{dA}{d\omega} = 0$

$$\frac{dA}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} F_0/m\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2\right]^{-1/2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{F_0}{m}\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2\right]^{-3/2}\left[2(\omega_0^2-\omega^2)(-2\omega)+2\gamma^2\omega\right] = 0$$

$$\Rightarrow -4\omega_0^2\omega - 4\omega^3 + 2\gamma^2\omega = 0$$

$$4\omega^2 = 4\omega_0^2 - 2\gamma^2 \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{2}}}$$

- para γ pequeno, $\omega \simeq \omega_0$, mas à medida que γ aumenta, o máximo ocorre p/ ω <u>menor</u> que ω_0. $\varphi \simeq \frac{\pi}{2}$ quando γ é muito pequeno, mas é <u>menor</u> que $\frac{\pi}{2}$ p/ $\omega < \omega_0$.

Com relação ao O.H. amortecido (sub-crítico), há ainda o seguinte detalhe: (2

- A solução geral da equação

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad \left(\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \right)$$

é

$$x(t) = A e^{-\gamma t/2} \cos(\omega t + \varphi) \; ; \; \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$$

a velocidade em função do tempo é então:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A e^{-\frac{\gamma t}{2}} \left[\frac{\gamma}{2} \cos(\omega t + \varphi) + \omega \, \mathrm{sen}(\omega t + \varphi) \right]$$

- No OHS (não amortecido), a velocidade é nula, quando $x = x_{max} = A$ $(x(t) = A\cos(\omega t + \varphi))$

o que não ocorre no O.H. amortecido!

p. ex. se $\varphi = 0 \Rightarrow x(t) = A e^{-\frac{\gamma t}{2}} \cos \omega t$ e

$x(0) = A = x_{max}$ mas $v(0)$ é $\neq 0$!!

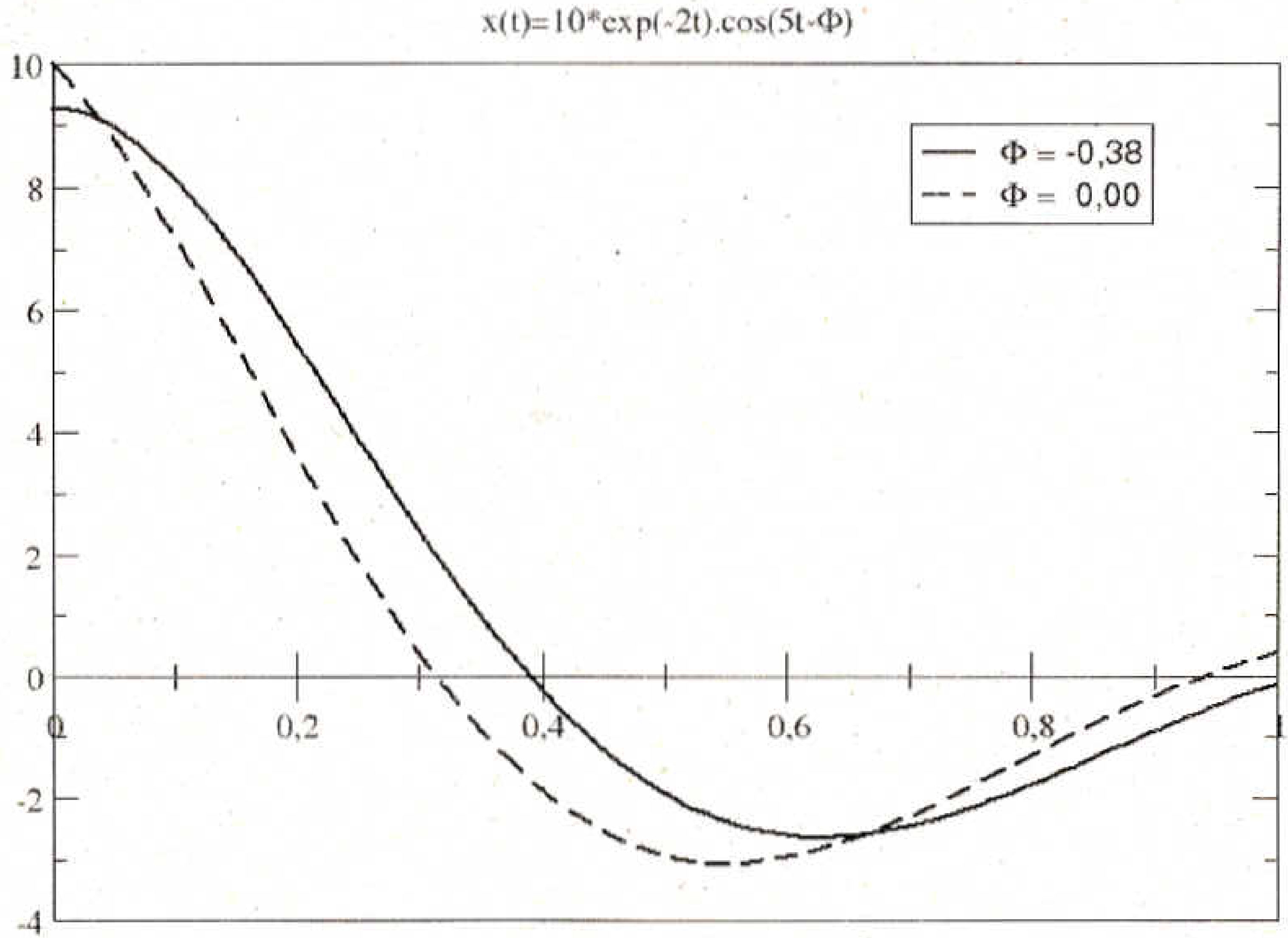
$v(0) = -A \left[\frac{\gamma}{2} \right]$. Se as condições iniciais correspondem a largar a massa da posição $\underline{x_0}$ com $\underline{\text{velocidade}}$ $\underline{\text{nula}}$ então $\varphi \neq 0$ e x_0 não é o x_{max}!!

$x(0) = x_0$, $v(0) = 0 \Rightarrow x_0 = A\cos(\varphi)$

e $v(0) = -A \left[\frac{\gamma}{2} \cos\varphi + \omega \, \mathrm{sen}\,\varphi \right]$

$$\Rightarrow \frac{\gamma}{2} \cos\varphi + \omega \, \mathrm{sen}\,\varphi = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\gamma}{2\omega} = -\mathrm{tg}\,\varphi}$$

2)



Solução Transiente

A solução geral da eq. inomogênea,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = F_0\cos\omega t$$ é dada

por

$$x(t) = x_t(t) + x_e(t)$$

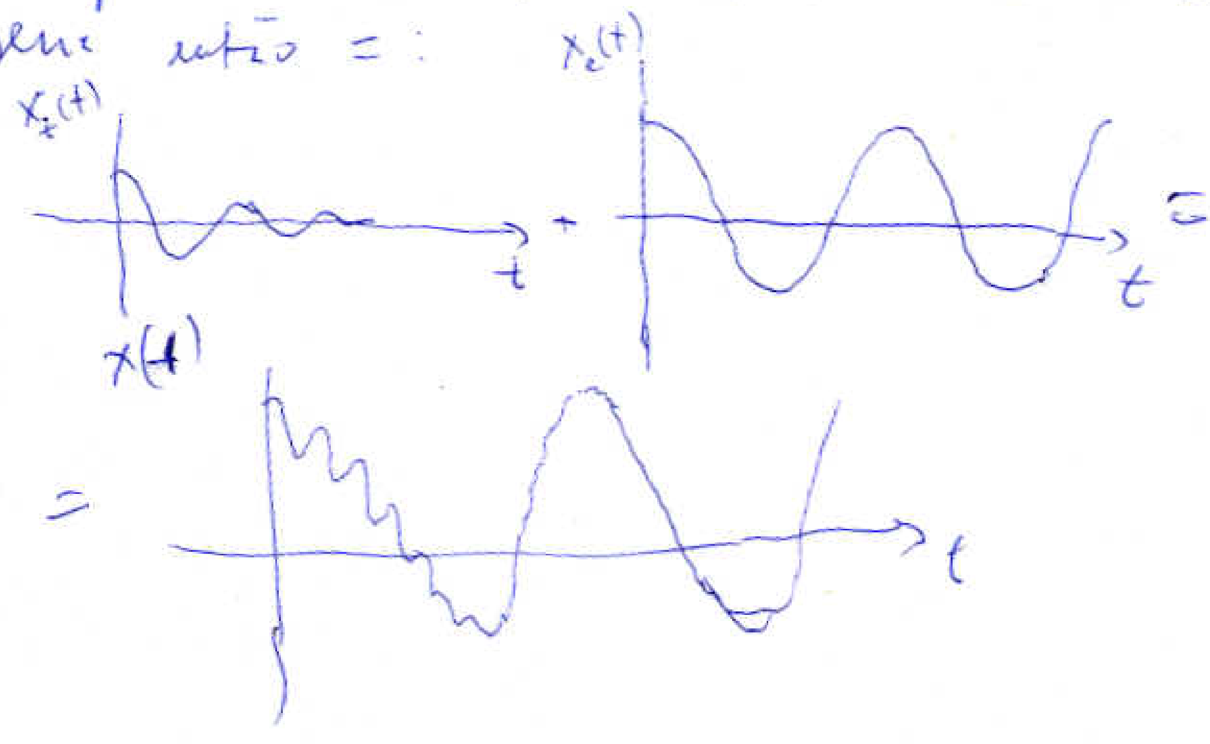
onde $x_e(t)$, a solução estacionária, é, como vimos:

$$x_e(t) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}}\cos(\omega t+\varphi)$$

A solução transiente, corresponde à solução geral da eq. homogênea associada, isto é com o segundo membro igual a 0. $(F(t)=0)$.
Isso corresponde aos 3 casos do OH amortecido:

$$x_t(t) = Ae^{-\gamma t/2}\cos(\omega_0 t+\varphi)$$

p/ $t \gg \frac{1}{\gamma}$, $e^{-\gamma t/2} \simeq 0$ e resta somente o correspondente ao termo estacionário. O resultado será então:



Energia no OH Amortecido.

A energia do oscilador no instante t é dada por (vamos considerar somente o caso sub-crítico):

$$E(t) = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

Como $x(t) = A e^{-\gamma t/2} \cos(\omega t + \varphi)$

e $v(t) = \frac{dx}{dt} = -A e^{-\gamma t/2}\left[\frac{\gamma}{2}\,\mathrm{sen}(\omega t+\varphi) + \omega\cos(\omega t+\varphi)\right]$

e $k = m\omega_0^2$;

$$E(t) = \frac{1}{2} m A^2 e^{-\gamma t}\left[\left(\frac{\gamma}{2}\cos(\omega t+\varphi) + \omega\,\mathrm{sen}(\omega t+\varphi)\right)^2\right] + \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 e^{-\gamma t}\cos^2(\omega t+\varphi)$$

$$E(t) = \frac{1}{2} m A^2 e^{-\gamma t}\left[\frac{\gamma^2}{4}\cos^2(\omega t+\varphi) + \omega^2\,\mathrm{sen}^2(\omega t+\varphi) + 2\,\frac{\gamma\omega}{2}\cos(\omega t+\varphi)\,\mathrm{sen}(\omega t+\varphi) + \omega_0^2\cos^2(\omega t+\varphi)\right]$$

$$E(t) = \frac{1}{2} m A^2 e^{-\gamma t}\left[\left(\omega_0^2 + \frac{\gamma^2}{4}\right)\cos^2(\omega t+\varphi) + \omega^2\,\mathrm{sen}^2(\omega t+\varphi) + \frac{\gamma\omega}{2}\,\mathrm{sen}\,2(\omega t+\varphi)\right]$$

Vamos considerar o caso em que o amortecimento (γ) é pequeno ($\gamma \ll \omega$) e portanto que a energia decresce muito pouco em um ciclo completo.

Por definição, o valor médio de $E(t)$ em 1 ciclo, com início num instante arbitrário t é dado por (τ = período = $\frac{2\pi}{\omega}$)

$$\bar{E}(t) = \frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} E(t')\,dt' = \frac{1}{\tau}\cdot\frac{1}{2}mA^2\int_t^{t+\tau} e^{-\gamma t'}\left[\left(\omega_0^2+\frac{\gamma^2}{4}\right)\cos^2(\omega t'+\varphi) + \omega^2\,\mathrm{sen}^2(\omega t'+\varphi) + \frac{\gamma\omega}{2}\,\mathrm{sen}\,2(\omega t'+\varphi)\right]dt'$$

Como neste caso $e^{-\gamma t'}$ varia muito pouco entre t e $t+\tau$, podemos aproximar $e^{-\gamma t'} \approx e^{-\gamma t}$ p/ $t \le t' \le t+\tau$ e assim colocar esse termo para fora da integral. Sabemos tb. que

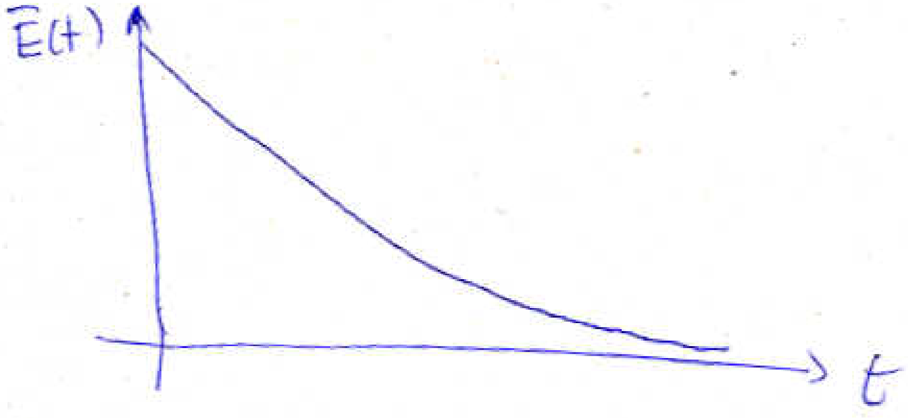
$$\frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} \cos^2(\omega t'+\varphi)\,dt' = \frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} \mathrm{sen}^2(\omega t'+\varphi)\,dt' = \frac{1}{2}$$

e

$$\int_t^{t+\tau} \mathrm{sen}\,2(\omega t'+\varphi)\,dt' = 0$$

Portanto, temos:

$$\boxed{\bar{E}(t) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 e^{-\gamma t}}$$



Energia no OHA e Forçado

Se uma massa m tem velocidade $\underline{v}$ e sobre ela atua uma força F, sabemos que a <u>potência incidente</u> sobre a massa é dada por $P = v.F$ (caso 1.0, v e F paralelos).

Portanto, no OHA e Forçado temos uma potência incidente $P(t) = v.F(t)$. Mas há também a <u>potência sendo dissipada</u> pela força resistiva,

$$P_{diss} = -v.bv = -bv^2 = -\gamma m v^2$$

Após atingir o <u>estado estacionário</u>, a <u>potência incidente</u> é igual à Pdissipada:

$$P(t) + P_{diss}(t) = 0 \quad \text{ou}$$

$$\boxed{P(t) = m\gamma v^2}$$

e portanto a potência média incidente (após o transiente inicial) é

$$\boxed{\bar{P} = m\gamma \overline{v^2}}$$

mas como $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, $v(t) = -\omega A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$

$v^2(t) = \omega^2 A^2 \operatorname{sen}^2_{t+\tau}(\omega t + \varphi)$ e portanto,

$$\overline{v^2} = \frac{\omega^2 A^2}{\tau} \int_t^{t+\tau} \operatorname{sen}^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2}\omega^2 A^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{P} = \frac{1}{2} m\gamma \omega^2 A^2 = \frac{\gamma F_0^2 \omega^2}{2m[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2\omega^2]}}$$