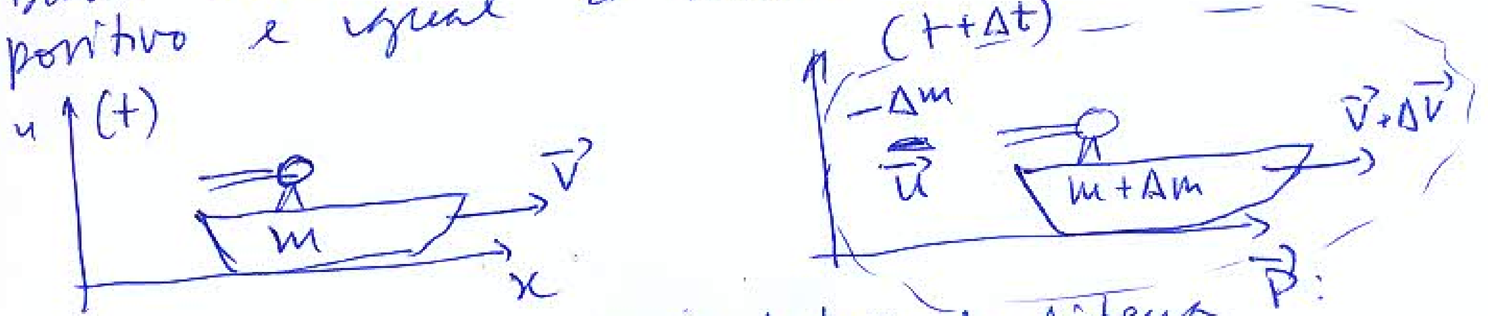
Massa Variável

Vamos agora descrever o movimento de um dispositivo de massa variável, como p. ex. um foguete. Para isso, vamos considerar um caso análogo, o de um barco em um lago, com uma metralhadora disparando continuamente. O barco está com motor desligado e não há atrito entre o barco e a água.

Vamos considerar o sistema formado pelo barco + as balas disparadas. Neste caso, não há forças externas, mas não é difícil incluir o caso em que há forças externas agindo no sistema. A cada disparo de uma bala, a massa do barco varia $\Delta m = m(t+\Delta t) - m(t)$.

Note que Δm é negativo, pois a massa do barco diminui com o tempo. $-\Delta m$ é portanto positivo e igual à massa da bala.



Considerando o momento total do sistema $\vec{P}$:

$$\vec{P}(t) = m\vec{v}$$

$$\vec{P}(t+\Delta t) = (m+\Delta m)(\vec{v}+\Delta\vec{v}) + (-\Delta m)\vec{u}.$$

e $$\Delta\vec{P} = \vec{P}(t+\Delta t) - \vec{P}(t) = (m\vec{v} + m\Delta\vec{v} + \Delta m\,\vec{v} + \Delta m\,\Delta\vec{v} - \Delta m\,\vec{u}) - m\vec{v}$$

$$= (m+\Delta m)\Delta\vec{v} + \Delta m(\vec{v}-\vec{u}).$$

(2)

$$\vec{\Delta P} = (m + \Delta m)\,\Delta\vec{v} + (\vec{v} - \vec{u})\,\Delta m$$

Multiplicando por $\frac{1}{\Delta t}$ e considerando o caso em que a metralhadora dispara balas cada vez menores (e num número cada vez maior), podemos fazer $\Delta t \to 0$ e:

$$\frac{\vec{\Delta P}}{\Delta t} = (m + \Delta m)\,\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} + (\vec{v} - \vec{u})\,\frac{\Delta m}{\Delta t} \qquad \begin{pmatrix} \Delta t \to 0 \\ \Delta m \to 0 \end{pmatrix}$$

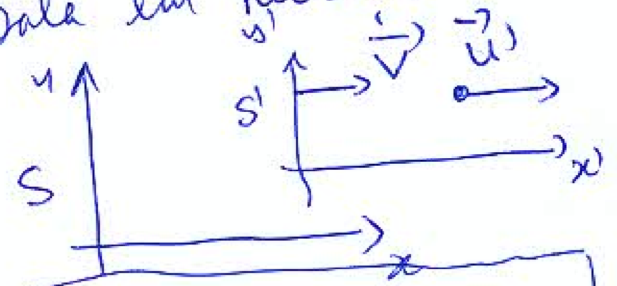
$$\boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} = m\,\frac{d\vec{v}}{dt} + (\vec{v} - \vec{u})\,\frac{dm}{dt}}$$

Mas $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{ext}$ resultante sobre o sistema. Se o sistema é isolado ou se $\vec{F}_{ext\,res} = 0$, então

$$m\,\frac{d\vec{v}}{dt} = -(\vec{v} - \vec{u})\,\frac{dm}{dt}$$

Note que $\vec{u} - \vec{v}$ é a velocidade relativa da bala em relação ao barco:

$$\vec{u} = \vec{u}' + \vec{v} \Rightarrow \vec{u}' = \vec{u} - \vec{v}$$



$$\boxed{m\,\frac{d\vec{v}}{dt} = +\,\vec{u}_{rel}\,\frac{dm}{dt}}$$

. Note que $\frac{dm}{dt}$ é negativo (Δm era negativo!) e $\vec{u}_{rel}$ também é negativo, de modo que $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}$ será positivo!.

Usa-se o termo velocidade de escape (v_e) para o $|\vec{u}_{rel}|$. Portanto a equação obtida pode ser escrita como (em módulo, já que os vetores tem mesma direção)

$$\boxed{m \frac{dv}{dt} = - v_e \frac{dm}{dt}}$$

O termo $- v_e \frac{dm}{dt}$ é conhecido como empuxo (dimensões de FORÇA!)

Essa equação é tb. conhecida como 1ª equação do foguete. A partir dela, podemos encontrar a velocidade do foguete, após ter ejetado uma certa quantidade de massa (as balas da metralhadora). Se quando a massa do foguete é m_i sua velocidade é v_i, quando a massa diminui para m_f sua velocidade será v_f.

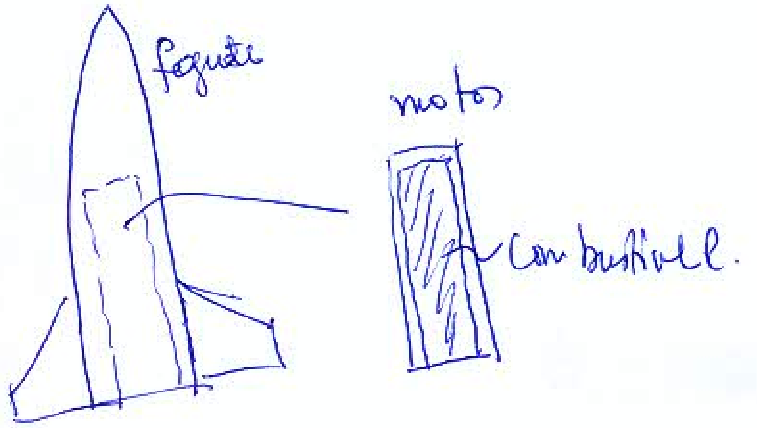
$$m\,dv = - v_e\,dm \Rightarrow \int_{v_i}^{v_f} dv = - v_e \int_{m_i}^{m_f} \frac{dm}{m}$$

$$v_f - v_i = - v_e \ln \frac{m_f}{m_i}, \text{ ou}$$

$$\boxed{v_f = v_i - v_e \ln \frac{m_f}{m_i}}$$

Veja que $\ln \frac{m_f}{m_i} < 0$ já que $m_f < m_i$

Exemplo: Modelos de foguete.



Foguete: $M = 53{,}5\,g$

Motor: $M_o = 25{,}5\,g$

$m_{combust} = 12{,}7\,g$

$\Delta t = 1{,}9\,s$

$Empuxo = 5{,}6\,N$

– Qual a velocidade final do foguete, após queimar todo o combustível? (Partindo do repouso, na ausência de gravidade).

$\Delta m = -12{,}7\,g \quad \Delta t = 1{,}9\,s \quad \frac{dm}{dt} \approx \frac{\Delta m}{\Delta t} = -\frac{12{,}7\times10^{-3}}{1{,}9} = -6{,}7\times10^{-3}\,kg/s$

$-v_e \frac{dm}{dt} = 5.6\,N \qquad v_e = \frac{5{,}6}{6{,}7\times10^{-3}} \cong 790\,m/s.$

$m_i = 53{,}5 + 25{,}5 = 79\,g$

$v_f = -790 \ln \frac{66{,}3}{79} \qquad m_f = 79 - 12{,}7 = 66{,}3\,g$

$$\boxed{v_f = 142\,m/s}$$

Se o foguete for lançado da superfície da Terra (na vertical) então temos uma força externa agindo sobre o sistema, pode verificar que; p/ $m = m_i - \alpha t$ ($dm/dt = -\alpha = cte$)

$m\frac{dv}{dt} = -v_e\frac{dm}{dt} - mg$ e

$v_f = v_i + \left(\frac{m_i g}{\alpha} - v_e\right) \ln \frac{m_f}{m_i}$

Gota de chuva dentro da nuvem

O problema de uma pequena gota de chuva, que ao cair dentro da nuvem vai agregando massa é similar ao problema da esteira de cereais que discutimos anteriormente, Ou seja a massa agregada tem momento inicial $= 0$ ($u = 0$)
A força externa sobre a gota (desprezando-se efeito de atrito) é $= mg$:

$$mg = m\frac{dv}{dt} + v\frac{dm}{dt}$$ onde v é a velocidade

da gota (ver problema da esteira).

Supondo que a massa da gota seja proporcional à distância percorrida dentro da nuvem:
$m = kx$. Portanto $\frac{dm}{dt} = kv$ a eq. do movimento da gota é então:

$$mg = m\frac{dv}{dt} + v.kv \quad (\div k) \quad (\text{e com } \frac{m}{k} = x)$$

$$x.g = x\frac{dv}{dt} + v^2$$

essa equação diferencial ñ é simples de resolver, mas pode-se mostrar que admite uma solução bastante simples:

$$v(t) = at, \text{ com } a = \text{cte}.$$

Como $\frac{dx}{dt} = v \Rightarrow x(t) = \frac{1}{2}at^2$. Subst. na eq. vemos que:

$$\frac{1}{2}at^2 g = \frac{1}{2}at^2.a + a^2t^2$$

ou

$$g = a + 2a = 3a$$

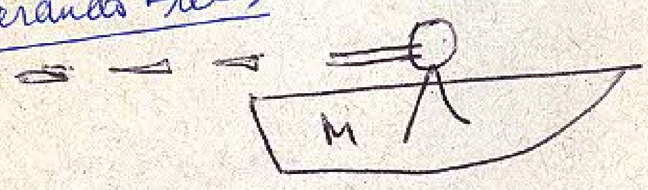
$$\Rightarrow a = g/3 = 3{,}3\,m/s^2$$

~~dep~~ Supondo que a gota permaneça por 3 segundos dentro da nuvem, ~~...~~ ela percorrerá uma distância

$$x = \frac{1}{2} \cdot 3{,}3 \times 9 \simeq 15\,m \quad \text{dentro da nuvem}$$

p/ $k = 2\,g/m$, a gota terá $m \simeq 30\,g$ ao deixar a nuvem.

Barco disparando Balas



$m_0 = 300\,kg$

$120/s$ bala $= 10\,g$

$v_{bala} = 1000\,m/s$

$$m \frac{dv}{dt} = -v_e \frac{dm}{dt}$$

$$\frac{dm}{dt} = \frac{1{,}2\,kg}{60\,s} = 0{,}02\,kg/s$$

$3\,min$: $\Delta m = 3{,}6\,kg$

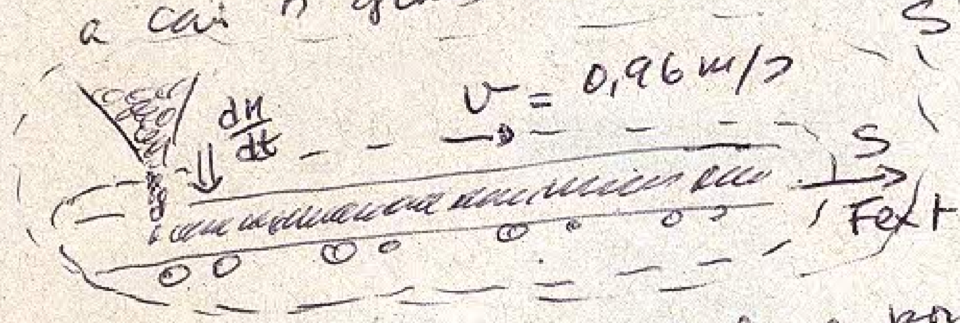
$$v_f = v_i - v_e \ln \frac{m_f}{m_i}$$

$$v_f = -1000 \ln \frac{300 - 3{,}6}{300} = -1000 \ln 0{,}988 = 12\,m/s$$

$$v_f = 43\,km/h$$

Exemplos

Esteira transportando grãos:
- grãos caem c/ fluxo constante de 0,31 kg/s
- esteira é longa. O cálculo se refere a ~~tempo~~ um intervalo de tempo menor que o p/ começar a cair os grãos do outro lado da esteira



- O sistema S' inclui o silo e portanto nesse sistema a massa é constante (≡ foguete + gases de escape)
- como os grãos caem verticalmente, $u_x = 0$ e portanto $v_{relat} = -v$ (se vc estivesse sentado na esteira, veria a areia caindo se afastar)
- neste caso, $\frac{dM}{dt} > 0$ pois a massa da esteira (foguete) aumenta com o tempo.

S': ΔM, Mv $\longrightarrow$ Fext $\quad P_i = Mv + \Delta M \cdot 0$

$(M+\Delta M)v \qquad P_f = (M+\Delta M)v$

$$\Delta P = P_f - P_i = \Delta M v \implies \frac{dP}{dt} = v\frac{dM}{dt}$$

$$\frac{dP}{dt} = F_{ext} \implies F_{ex} = 0{,}31 \times 0{,}96 \cong 0{,}3\,N$$

(Essa força serve p/ acelerar ΔM de 0 a 0,96 m/s ~~e depois prossegue com v~~.)

Equação do Foguete (Massa Variável)

Vamos considerar um sistema formado, no instante t, por um foguete de massa m e velocidade v e o total da massa do gás ejetado desde $t = 0$, m_g. A massa total do sistema é constante, $m_i = m + m_g$. Considerando o sistema isolado, o seu momento total é conservado:

$$P = P_f + P_g = cte.;\ P_f = mv;\ P_g = \int_o^t u(t')dm_g = \int_o^t u(t')(\frac{dm_g}{dt'})dt'$$

onde $u(t')$ é a velocidade da massa dm ejetada entre t' e $t' + dt'$. Veja que cada porção dm do gás tem velocidade diferente. Com $dP/dt = 0 = dP_f/dt + dP_g/dt$ temos,

$$\frac{dP_f}{dt} = m\frac{dv}{dt} + v\frac{dm}{dt} \quad e \quad \frac{dP_g}{dt} = u\frac{dm_g}{dt}$$

Como $\frac{dm_g}{dt} = -\frac{dm}{dt}$, temos então a conhecida equação do foguete:

$$m\frac{dv}{dt} + (v - u)\frac{dm}{dt} = 0$$

ou, com $u_{rel} = -(v - u) = -v_e$ onde $v_e = |u_{rel}|$ é a velocidade de escape dos gases,

$$m\frac{dv}{dt} = -v_e\frac{dm}{dt}$$

Lançamento de Foguetes na superfície da Terra

R.V. Ribas

No lançamento de um foguete discutido na sala de aula, considerou-se a resultante das forças externas igual a zero, o que é apropriado para descrever o movimento de um foguete no espaço vazio. No caso do lançamento de um foguete verticalmente na superfície da Terra, deve-se considerar ainda uma força externa, igual ao peso do foguete. Pode ser facilmente demonstrado que a equação do foguete nesse caso é:

$$m\frac{dv}{dt} = -v_e\frac{dm}{dt} - m_i g$$

onde m é a massa do foguete no instante t. A solução desta equação, pode ser facilmente obtida tomando-se $m = m_i - \alpha t$, com $\alpha = \left|\frac{dm}{dt}\right|$:

$$v_f - v_i = -v_e \ln\frac{m_f}{m_i} + \frac{m_i g}{\alpha}\ln\frac{m_f}{m_i}$$

$$v(t) = (\frac{m_i g}{\alpha} - v_e)\ln\frac{m_i - \alpha t}{m_i}$$

O gráfico de $v(t)$, considerando-se os dados do foguete modelo descrito no exercício 7 da lista 6 ($m_i = 79$g, $\alpha = 6.7$g/s, $v_e = 790$m/s é visto na Fig. 1. Note que o resultado acima é válido somente para $t < 1,9$s, enquanto dura o combustível. De maneira similar pode-se obter $x(t)$, definindo-se $v_r = -(\frac{m_i g}{\alpha} - v_e)$ (note que $v_r > 0$) e resolvendo-se a equação:

$$\frac{dx}{dt} = v(t) = -v_r \ln\frac{m_i - \alpha t}{m_i}$$

o resultado não é difícil de ser obtido, lembrando que$\int \ln x dx = x(\ln x - 1)$:

$$x(t) = \frac{v_r m_i}{\alpha}\left[\frac{m_i - \alpha t}{m_i}\left(\ln\frac{m_i - \alpha t}{m_i} - 1\right) + 1\right]$$

O gráfico de $x(t)$ para o foguete modelo também é mostrado na figura.

A solução do problema do lançamento de um foguete de grande porte, capaz de colocar um satélite em órbita é bem mais complicada, pois nesse caso a aceleração da gravidade não pode mais ser considerada constante, além de haver mecanismos de orientação da direção do vôo, com os quais o foguete muda a direção vertical inicial. O efeito da resistência do ar deve ser ainda incluido numa descrição mais realista. Nesses casos, uma solução numérica do problema, como a que empregaremos no exercício de órbitas elípticas é em geral utilizada.

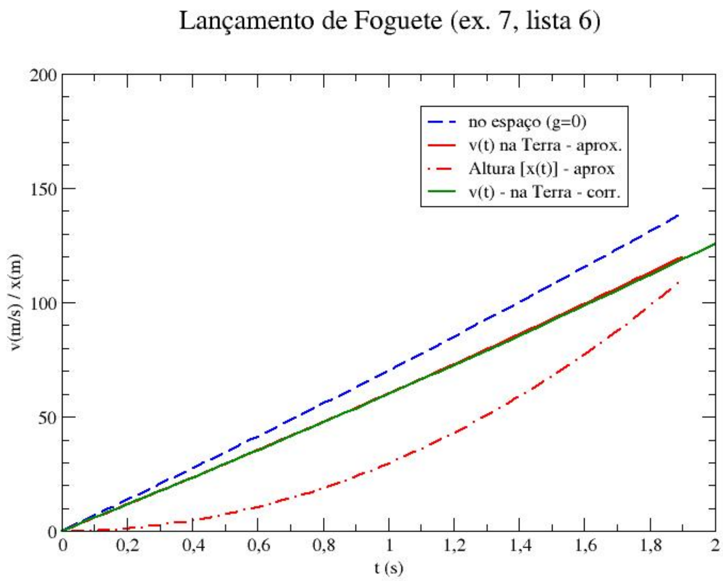


Figura 1: Gráfico de v(t) e x(t) para o foguete-modelo lançado da superfície da Terra. A curva tracejada mostra v(t) na ausência da força gravitacional.