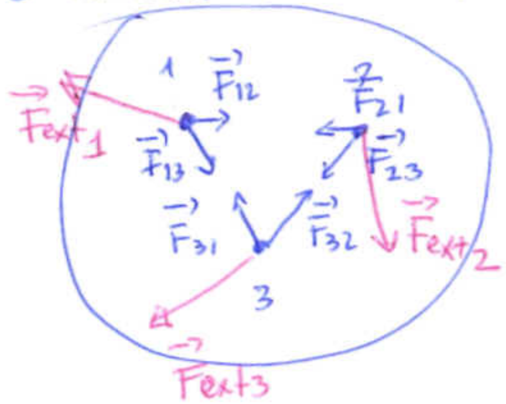
Conservação do Momento Linear - Centro de Massa

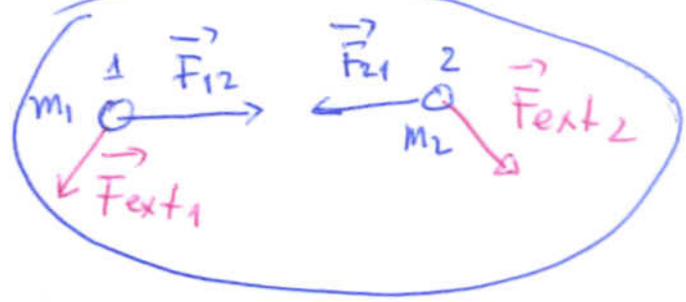
2ª Lei de Newton: (partícula) $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{res.}$

3ª Lei de Newton (2 partículas interagindo) $\overset{1}{\circ} \xrightarrow[\vec{F}_{12}]{} \quad \xleftarrow[\vec{F}_{21}]{} \circ$ $\quad \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

Sistema de Partículas



Caso Particular (2 part.)



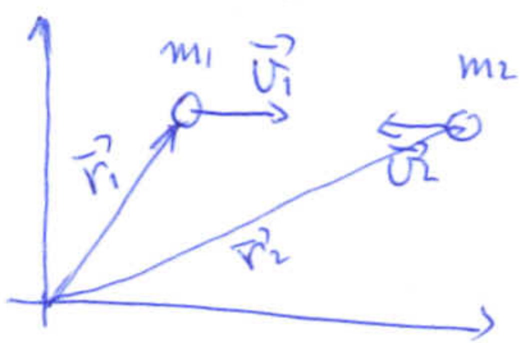
$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{ext_1}$$
$$+$$
$$\frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{ext_2}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}_1+\vec{p}_2) = \frac{d\vec{P}}{dt} = \underbrace{\vec{F}_{12}+\vec{F}_{21}}_{0} + \underbrace{\vec{F}_{ext_1}+\vec{F}_{ext_2}}_{\vec{F}_{ext}}$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext}$$

"Se a resultante das forças externas sobre um sistema de duas partículas for nula, então o momento linear total do sistema ($\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$) se conserva (é constante).

Como $\vec{p} = m\vec{v}$; temos $\vec{p}_1 = m_1\vec{v}_1$ e $\vec{p}_2 = m_2\vec{v}_2$



$$\vec{v}_1 = \frac{d\vec{r}_1}{dt}, \quad \vec{v}_2 = \frac{d\vec{r}_2}{dt}$$

$$\vec{P} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = \frac{d}{dt}(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2)$$

Ou:

$$\vec{P} = \frac{d}{dt}(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2) = M\frac{d}{dt}\left(\frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2}\right)$$

onde $M = m_1 + m_2$ é a massa total do sistema e $\vec{R} = \dfrac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2}$ é chamado <u>centro de massa</u> do sistema!

$$X_{cm} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1+m_2} \; ; \quad Y_{cm} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2}{m_1+m_2}$$

Como já vimos, se a resultante das forças externas em um sistema é nula, $\frac{d\vec{P}}{dt} = 0$ ou então, como $\vec{P} = M\left(\dfrac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2}\right) = M\vec{V}_{cm} = cte.$

Portanto, em um sistema onde a resultante das forças externas é nula, a <u>velocidade</u> do C.M. é constante.

Esses conceitos podem ser facilmente extendidos p/ <u>n</u> partículas:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i\frac{d\vec{r}_i}{dt} \quad \text{e tb.}$$

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i = M\left(\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i\right) = M\vec{V}_{cm}\text{, onde}$$

$$\vec{V}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{1}{M}\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i \quad \text{ou}$$

$$\vec{R}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

$$\vec{P} = M\vec{V}_{cm} = M\frac{d\vec{R}_{cm}}{dt} = cte.$$

(se a resultante das forças externas for nula!)

e portanto, como

$$\vec{a}_{CM} = \frac{m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + m_3\vec{a}_3}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots}$$

chamando $M = m_1 + m_2 + m_3 + \ldots$ a massa total do sistema,

$$M\vec{a}_{CM} = \sum \vec{F}_{1i} + \sum \vec{F}_{2i} + \sum \vec{F}_{3i} + \ldots = \vec{F}_R$$

$$= \sum \vec{F}_{ext}$$

ou $\boxed{M\vec{a}_{CM} = \sum \vec{F}_{ext}}$

"O CM de um sistema se move como se fosse uma partícula de massa M igual à soma de todas as massas do sistema, à qual atua uma força igual à soma resultante de todas as forças externas agindo no sistema".

Corolário: se $\sum \vec{F}_{ext} = 0$ então o CM se desloca com velocidade constante.

$$\vec{P}_{CM} = M\vec{V}_{CM}$$

$$\frac{d\vec{P}_{CM}}{dt} = \vec{F}_{R\,ext}$$

cálculo de r_{CM}.

Em geral:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\left(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \dots\right)$$

ou

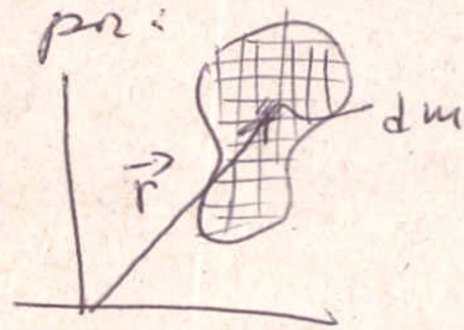
$$x_{CM} = \frac{1}{M}\left(m_1x_1 + m_2x_2 + \dots\right)$$

$$y_{CM} = \frac{1}{M}\left(m_1y_1 + m_2y_2 + \dots\right) \qquad z_{CM} = \frac{1}{M}\left(m_1z_1 + m_2z_2 + \dots\right)$$

- <u>Distribuições contínuas</u>: Corpos rígidos são tb. formado de partículas (átomos) mas são mais fàcilmente descritos como objetos contínuos.

O CM nesses casos é dado por:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\,dm$$



Em muitos casos é possível usar argumentos de simetria para simplificar o cálculo do CM.

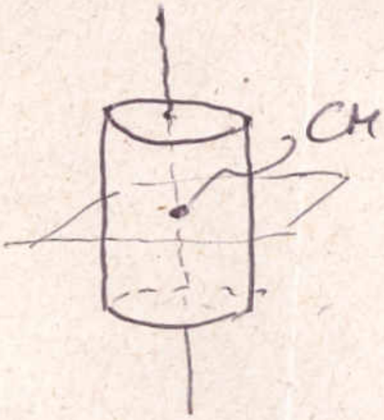
1)- Se uma distribuição de massas apresenta simetria em relação a um plano, então o seu CM está nesse plano.

- Se uma distribuição de massas possui simetria em relação a um eixo, então o seu CM está localizado nesse eixo

Se uma distribuição de massas apresenta simetria em relação a um <u>ponto</u> $\Rightarrow$ o CM está nesse ponto.

Exemplos

- Cilindro homogêneo

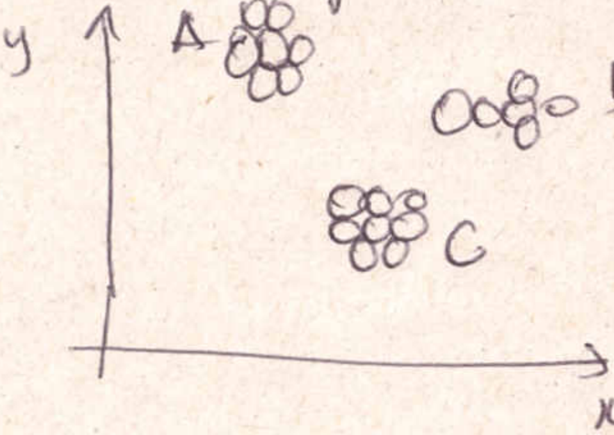


- Simetria em relação a eixo passando pelo centro da base.
- Simetria em relação a plano que corta o cilindro ⊥ ~~ao~~ seu eixo, passando pela 1/2 da altura

⇒ CM é a interseção da reta c/ o plano

- Disco / Esfera ⇒ CM = centro.

- Suponha agora um ~~corpo~~ sistema formado de vários pontos:



$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M} = \frac{1}{M}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i + \sum_{i=n+1}^{m} m_i \vec{r}_i + \sum_{i=m+1}^{N} m_i \vec{r}_i\right)$$

Onde as somas foram ~~...~~ arranjadas de modo que cada uma corresponda às partículas que formam os sub-sistemas A, B e C. Portanto, sabemos que

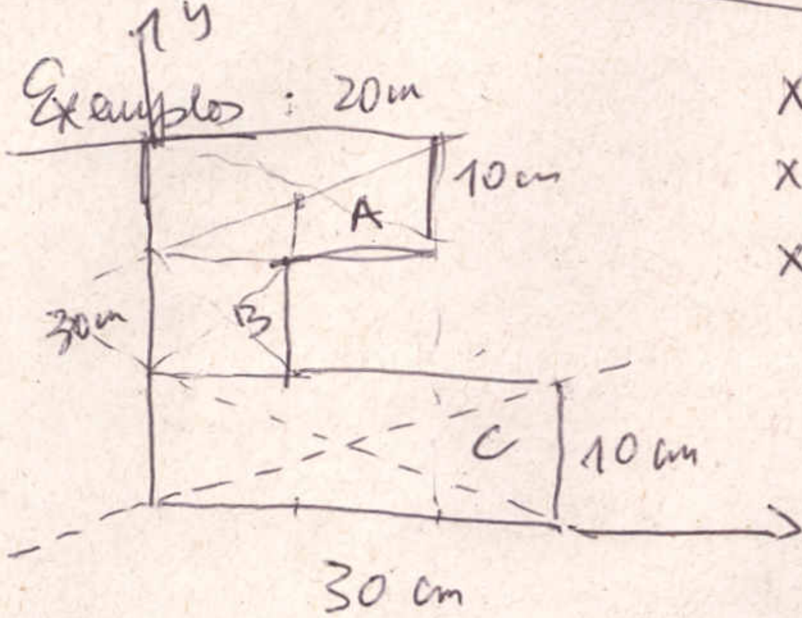
$$\vec{r}_{CMA} = \frac{1}{M_A}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i \qquad \vec{r}_{CMB} = \frac{1}{M_B}\sum_{i=n+1}^{m} m_i \vec{r}_i$$

e $$\vec{r}_{CMC} = \frac{1}{M_C}\sum_{i=m+1}^{N} m_i \vec{r}_i$$

portanto,

$$\boxed{\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\left(M_A \vec{r}_{cmA} + M_B \vec{r}_{cmB} + M_C \vec{r}_{cmC} \right)}$$

Exemplo:



$X_A = 10 \quad Y_A = 25$

$X_B = 5 \quad Y_B = 15$

$X_C = 15 \quad Y_C = 5$

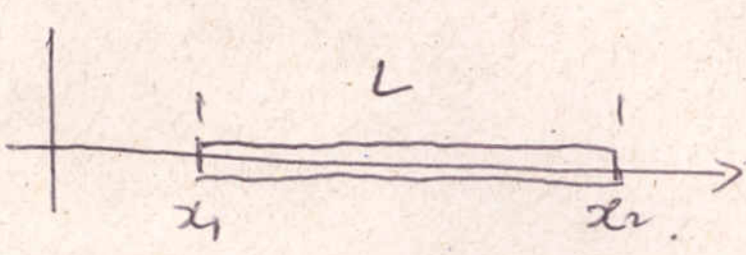
$M_A = \frac{2}{3}M$

$M_B = \frac{1}{6}M$

$M_C = \frac{1}{2}M$

$$X_{cm} = \frac{1}{M}\left(\frac{2}{3}M \cdot 10 + \frac{1}{6}M \cdot 5 + \frac{1}{2}M \cdot 15 \right) = \frac{70}{6}\text{ cm}$$

$$Y_{cm} = \frac{1}{M}\left(\frac{2}{3}M \cdot 25 + \frac{1}{6}M \cdot 15 + \frac{1}{2}M \cdot 5 \right) = \frac{80}{6}\text{ cm}$$



λ = densidade linear

$$X_{cm} = \frac{1}{M}\int x\,dm \qquad \lambda = \frac{dm}{dx}$$

$$X_{cm} = \frac{1}{M}\int_{x_1}^{x_2} x \cdot \lambda\, dx = \frac{\lambda}{M} \cdot \frac{1}{2}\left(x_2^2 - x_1^2\right)$$

$M = \lambda \cdot L \quad , \quad x_2 = x_1 + L$

$$X_{cm} = \frac{1}{2L}\left((x_1+L)^2 - x_1^2 \right) = \frac{1}{2L}\left(\cancel{x_1^2} + 2Lx_1 + L^2 - \cancel{x_1^2} \right)$$

$$= \frac{1}{2L}\left(L^2 + 2Lx_1 \right) = \frac{1}{2}L + x_1$$

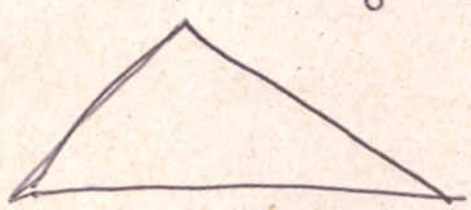
se a barra não for de densidade constante:

P. ex. se $\lambda = 50+20x$ (g/cm)

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\int_{x_1}^{x_2}(50+20x)\,.\,x\,.\,dx = \frac{1}{M}\left(\frac{50}{2}(x_2^2-x_1^2)+\frac{20}{3}(x_2^3-x_1^3)\right)$$

$$M = \int dm = \int_{x_1}^{x_2}\lambda\,dx = \int_{x_1}^{x_2}(50+20x)\,dx = 50(x_2-x_1)+\frac{20}{2}(x_2^2-x_1^2)$$

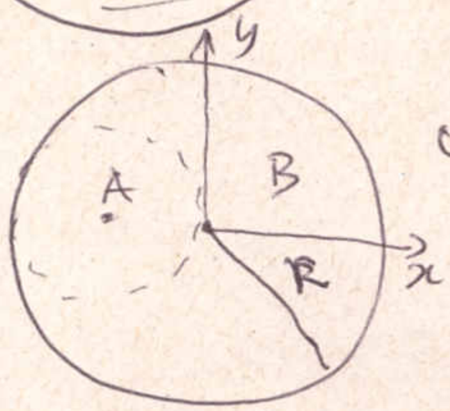
Ex: triângulo irregular



- divide-se em tiras // a um dos lados

- o CM de cada tira é relativamente simples de se calcular / estimar (MEDIANA)
- faz-se o mesmo p/ os outros 2 lados.

ex. disco homogêneo, do qual foi retirado uma parte conforme mostra a figura.



O disco completo pode ser considerado como composto das partes A e B

$$M_A = \pi\left(\frac{R}{2}\right)^2\rho$$

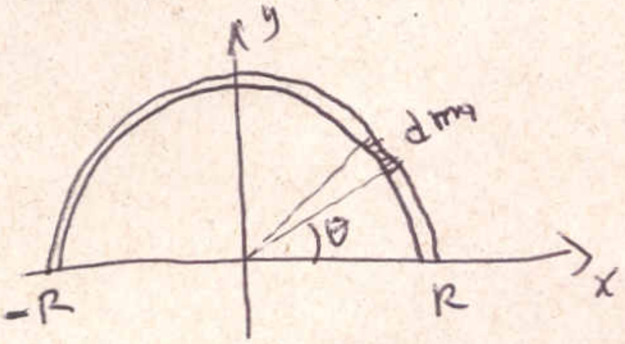
$$M_B = (\pi R^2\rho - M_A)$$

$$X_{cm_{Disco}} = \frac{1}{M_{disco}} \left(M_A X_A + M_B X_B \right)$$ (8)

Sabemos $X_{cm_{Disco}} = 0$ e $X_{cm_A} = -\frac{R}{2}$

$$\Rightarrow 0 = \frac{1}{M_{Disco}} \left(-M_A \frac{R}{2} + M_B X_B \right)$$

$$\Rightarrow M_B X_B = M_A \frac{R}{2} \Rightarrow \boxed{X_B = \frac{M_A}{M_B} \frac{R}{2}}$$



$X_{cm} = 0$

$Y_{cm} = ?$

$\lambda = \frac{dm}{d\ell}$ $dm = \lambda \, d\ell$

$d\ell = R \, d\theta$

$y = R \, \text{sen}\theta$

$$y_{cm} = \frac{1}{M} \int y \, dm$$

$$y_{cm} = \frac{1}{M} \int_0^\pi y R \lambda \, d\theta$$

$$y_{cm} = \frac{1}{M} \int_0^\pi R^2 \lambda \, \text{sen}\theta \, d\theta$$ mas $\boxed{\lambda = \frac{M}{\pi R}}$

$$y_{cm} = \frac{1}{M} \frac{M}{\pi R} \cdot R^2 \int_0^\pi \text{sen}\theta \, d\theta = \frac{R}{\pi} \cdot 2 = \underline{\underline{0{,}64R}}$$

Massa Variável

Como já dissemos, a formulação original e a mais completa da 2ª lei de Newton é escrita como

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{res}$$

Essa forma inclui a descrição de sistemas com massa variável, como por exemplo a propulsão de foguetes. Vamos agora descrever o movimento de sistemas desse tipo. Consideremos inicialmente, uma metralhadora sobre um barco, solto em um lago de águas tranquilas. Vamos ignorar os atritos entre o barco e a água e também entre ele e o

cada tiro, o barco aumenta sua velocidade em ção à água. Chamando de M a massa do barco cluindo as balas não disparadas) e m a massa bala disparada, temos para o sistema S' arco + bala disparada (não há forças externas). Antes desse 1º disparo, o barco estava em repouso em relação à água.

$$MV = mv \Rightarrow \boxed{V = \frac{m}{M} v}$$

$$(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{P} = 0)$$

disparo de uma segunda bala pode ser isto de maneira semelhante.

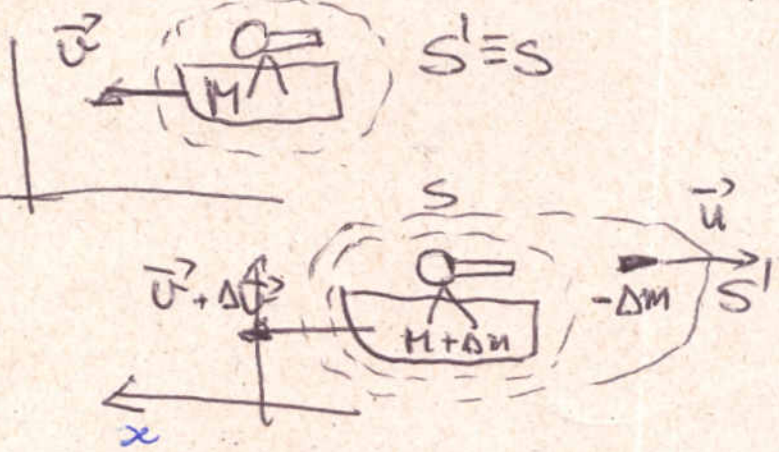
$$P_i = MV \qquad P_f = (M-m)V' - mv$$

$$\boxed{V' = \frac{M}{M-m} V + \frac{m}{M-m} v}$$

No caso de um foguete, uma reação química queimando o combustível (+ oxidante) produz um fluxo de gases em alta velocidade sendo ejetado do foguete. Cada molécula ejetada equivalendo a uma bala atirada. Neste caso, como a massa de cada "projetil" é muito pequena, podemos usar a aproximação de fluxo contínuo. No diagrama, usaremos o barco + metralhadora para facilitar o entendimento, mas sabendo que podemos fazer o limite $\Delta m \to 0$, para o caso do foguete. Para produzir um resultado + geral, vamos supor a existência de uma força externa agindo no sistema S'(barco + bala). Vamos chamar tb de sistema S, o barco + balas ñ disparadas (ou foguete + combustível e oxidante ñ queimados).

Início:

Instante t



A massa da bala é $-\Delta m$. Vamos considerar Δm como uma grandeza negativa (isto é $\frac{dm}{dt} < 0$, ou seja a massa do barco diminui com o tempo.

$$\vec{P}_i = M\vec{v} \; ; \quad \vec{P}_f = (M+\Delta m)(\vec{v}+\Delta\vec{v}) + (-\Delta m\,\vec{u})$$

Para o sistema S', que está sob a ação de uma força externa $\vec{F}_e$,

$$\vec{F}_{ext_{res}} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

mas $\Delta\vec{P} = \vec{P}_f - P_i = (M+\Delta m)(\vec{v}+\Delta\vec{v}) - \Delta m\vec{u} - M\vec{v}$

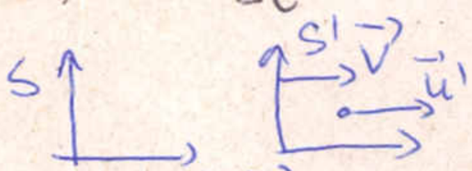
$= \cancel{M\vec{v}} + M\Delta\vec{v} + \Delta m\vec{v} + \Delta m\Delta\vec{v} - \Delta m\vec{u} - \cancel{M\vec{v}} =$

$= \quad M\Delta\vec{v} + \Delta m(\vec{v}-\vec{u}) + \Delta m\Delta v$

$\div$ por Δt e fazendo o limite $\Delta t \to 0$:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm}{dt}(\vec{v}-\vec{u})$$

(note que $\lim\limits_{\Delta t\to 0} \Delta m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t} = 0$, pois $\frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow$ para valor constante ($\vec{a}$) e $\Delta m \to 0$)



$\vec{u} = \vec{u}' + \vec{V}$

$\Rightarrow \vec{u}' = \vec{u} - \vec{V}$

portanto,

$$M\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{ext} + \vec{v}_{rel}\frac{dM}{dt}$$

onde $\vec{v}_{rel} = \vec{u} - \vec{v}$ é a velocidade da bala (dos gases do foguete) <u>em</u> <u>relação</u> ao barco (ao foguete).

Note que estamos considerando $\vec{v}$ e $\frac{dv}{dt}$ como grandezas positivas. Assim $\vec{v}_{rel}$ (que é na direção oposta) será negativo. O mesmo com $\frac{dM}{dt}$, que é <0. Portanto, $\vec{v}_{rel}\frac{dM}{dt} > 0$ e <u>acelera</u> o foguete.

Para um foguete se movimentando no espaço, na ausência de forças externas,

$$M\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{V}_{rel}\frac{dM}{dt} = -v_e\frac{dm}{dt} \quad (v_e = |V_{rel}|)$$

$$\vec{V}_{rel}\frac{dM}{dt} \left[\text{unidade } \frac{m}{s}\cdot\frac{kg}{s} = kg\cdot m/s^2 \equiv N\right]$$

é chamada <u>empuxo</u>. $|V_{rel}|$ é também chamada <u>velocidade de escape</u> (v_e) dos gases do foguete e em geral é aproximadamente constante. Também, a velocidade de reação química de queima de combustível (dM/dt) é $\sim$ constante e portanto o empuxo de um foguete é $\simeq$ constante. Porém, note que ~~não~~ mesmo assim a <u>aceleração</u> do foguete não será constante, pois M <u>diminui</u> com o tempo. Na ausência de forças externas,

$$M\,dv = V_{rel}\,dM \Rightarrow \frac{1}{V_{rel}}\int_{v_0}^{v} dv = \int_{M_0}^{M}\frac{dM}{M}$$

$$\frac{1}{V_{rel}}(v - v_0) = \ln\frac{M}{M_0}$$

$$v = v_0 + V_{rel}\ln\frac{M}{M_0}$$ (lembre-se de que V_{rel} é < 0!)

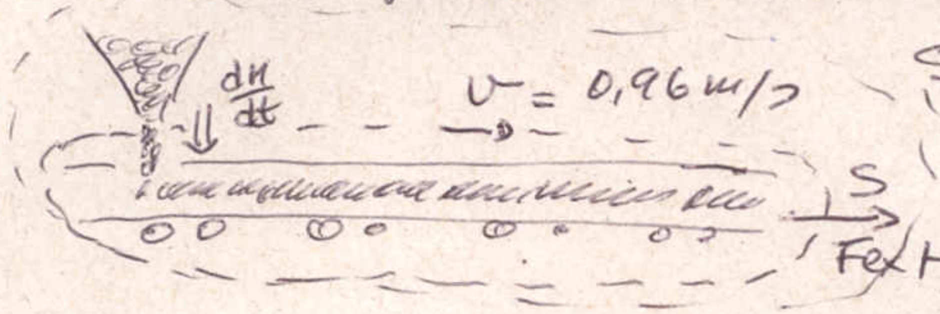
e portanto

$$V_{rel}\ln\frac{M}{M_0} > 0 \quad (M < M_0!)$$

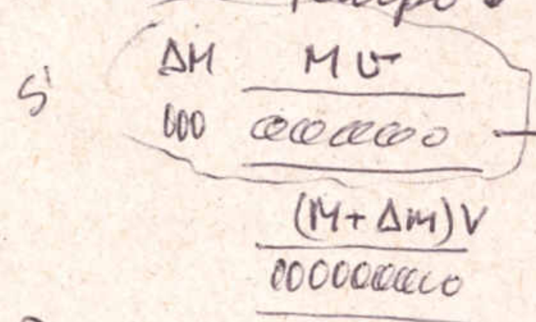
Exemplo

Esteira transportando grãos. (13)

- grãos caem c/ fluxo constante de 0,31 kg/s
- esteira é longa. O cálculo se refere a ~~tempos~~ um intervalo de tempo menor que o p/ começar a cair os grãos do outro lado da esteira



- O sistema S' inclui o silo e portanto nesse sistema a massa é constante (≡ foguete + gases de escape)
- como os grãos caem verticalmente, $u_x = 0$ e portanto $V_{relat} = -v$ (se vc estivesse sentado na esteira, veria a areia camada se afastar)
- Neste caso, $\frac{dM}{dt} > 0$ pois a massa da esteira (foguete) aumenta com o tempo.



$$P_i = Mv + \Delta M \cdot 0$$

$$P_f = (M + \Delta M)v$$

$$\Delta P = P_f - P_i = \Delta M v \Rightarrow \frac{dP}{dt} = v\frac{dM}{dt}$$

$$\frac{dP}{dt} = F_{ext} \Rightarrow F_{ex} = 0,31 \times 0,96 \cong 0,3\ N$$

(Essa força serve p/ acelerar ΔM de 0 a 0,96 m/s) ~~e depois prosseguir com v~~.

Modelos de foguete!

Motor C-5

propulsão (empuxo) : 5.6 N | 12,7 g de combustível
$m_0 = 25,5$ g
$\Delta t = 1,9$ s

Foguete + motor : $M_i = 53,5 + 25,5 = 79$ g

? $v_e = ?$ $v_f = ?$

$v_{rel} \frac{dm}{dt} = 5.6$ N $\quad \frac{dm}{dt} = \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{-12,7 \times 10^{-3}}{1,9} = -6,7 \times 10^{-3}$ kg/s

$v_{rel} = -\frac{5.6}{6,7} \times 10^{3} \cong 790$ m/s

$v_f = v_i + v_e \ln \frac{M_f}{M_i} = 0 + 790 \ln \frac{\overbrace{79-12,7}^{66,3}}{79}$

$v_f = 142$ m/s

(supondo o modelo ser lançado do espaço!)

veja em minhas páginas pessoais de internet (em download, a solução do problema p/ esse foguete, sob a ação da gravidade)

Foguete SATURNO V (missão à lua)

$M_0 = 3000$ t

Empuxo: (1º estágio): 32×10^{6} N (150 s)

Carga útil (missão à lua): 47 t

$\frac{47}{3000} = 1,5\%$ | 15 foguetes – 7 US\$ bilhões (1970)
1 foguete = 0,5 bilhões
= ≃ 3 bilhões US\$ atuais

Gota de chuva dentro da nuvem

O problema de uma pequena gota de chuva, que ao cair dentro da nuvem vai agregando massa é similar ao problema da esteira de cereais que discutimos anteriormente, ou seja a massa agregada tem momento inicial = 0 ($u=0$) A força externa sobre a gota (desprezando-se efeitos de atrito) é $= mg$:

$$mg = m\frac{dv}{dt} + v\frac{dm}{dt}$$ onde v é a velocidade da gota (ver problema da esteira).

Supondo que a massa da gota seja proporcional à distância percorrida dentro da nuvem: $m = kx$. Portanto $\frac{dm}{dt} = kv$ a eq. do movimento da gota é então:

$$mg = m\frac{dv}{dt} + v.kv \quad (\div k) \quad (e \text{ com } \frac{m}{k} = x)$$

$$x.g = x\frac{dv}{dt} + v^2$$

essa equação diferencial ñ é simples de resolver, mas pode-se mostrar que admite uma solução bastante simples:

$v(t) = at$, com $a = cte$.

Como $\frac{dx}{dt} = v \Rightarrow x(t) = \frac{1}{2}at^2$. Subst. na eq. vemos que:

$$\frac{1}{2}at^2 g = \frac{1}{2}at^2 . a + a^2t^2$$

Ou

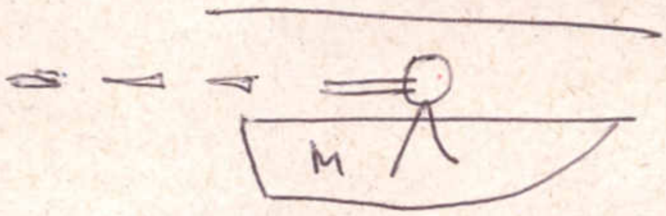
$$g = a + 2a = 3a$$

$$\Rightarrow a = g/3 = 3{,}3\ m/s^2$$

~~dep~~ Supondo que a gota permaneça por 3 segundos dentro da nuvem, ela percorrerá uma distância

$$x = \frac{1}{2}\cdot 3{,}3 \times 9 \simeq 15\ m$$ dentro da nuvem

p/ $k = 2g/m$, a gota terá $m \simeq 30g$ ao deixar a nuvem.



$M_0 = 300\ kg$

120/s bala = 10 g

$v_{bala} = 1000\ m/s$

$$m\frac{dv}{dt} = -v_e \frac{dm}{dt}$$

$$\frac{dm}{dt} = \frac{1{,}2\ kg}{60\ s} = 0{,}02\ kg/s$$

$$v_f = v_i - v_e \ln \frac{m_f}{m_i}$$

3 min: $\Delta m = 3{,}6\ kg$

$$v_f = -1000 \ln \frac{300-3{,}6}{300} = -1000 \ln 0{,}988 = 12\ m/s$$

$$\underline{v_f = 43\ km/h}$$