CARRETEL

Carretel de massa m e momento de inércia I rolando sem escorregar em uma superfície horizontal

— quando a força de atrito estático é nula?

Se f_a é nula $\Rightarrow$ $F = m a$

$$F R_1 = I \frac{a}{R_2} = \frac{I F}{R_2 m}$$

$$\Rightarrow \boxed{m = \frac{I}{R_1 R_2}}$$

condição muito difícil de ser satisfeita!

$\Rightarrow$ em geral f_a é não nula, mas qual o seu sentido?

— Vamos resolver supondo que está na direção oposta a F:

$$\begin{cases} F - f_a = m a \\ F R_1 + f_a R_2 = I \dfrac{a}{R_2} \end{cases} \qquad f_a = F - m a$$

$$F R_1 + F R_2 - m a R_2 = \frac{I a}{R_2}$$

$$F(R_1 + R_2) = a\left(m R_2 + I/R_2\right)$$

$$\Rightarrow a = \frac{R_1 + R_2}{m R_2 + I/R_2} \cdot F = \frac{R_1 + R_2}{R_2(m + I/R_2^2)} \cdot F$$

e portanto

$$f_a = F\left(1 - \frac{(R_1 + R_2)\, m}{R_2 (m + I/R_2^2)}\right)$$

note que I é $<$ que mR_2^2 (seria igual se toda a massa $\underline{m}$ estivesse a uma distância R_2 do eixo).

– se $R_1 << R_2$:

neste caso $R_1 + R_2 \simeq R_2$ e $\dfrac{(R_1+R_2)\,m}{R_2\left(m + I/R_2^2\right)} \simeq \dfrac{m}{m + I/R_2^2} < 1$

$\Rightarrow f_a > 0$ como foi suposto inicialmente.

se $R_1 \approx R_2$, $R_1 + R_2 \approx 2R_2$ e

$$\frac{(R_1+R_2)\,m}{R_2\left(m+I/R_2^2\right)} \approx \frac{2R_2\,m}{R_2\left(m+I/R_2^2\right)} = \frac{2m}{\left(m+I/R_2^2\right)}$$

como $I/R_2^2 < m \Rightarrow$ a razão acima é > 1 e f_a é negativo, ou seja na sentido oposto ao sugerido inicialmente.

– Tente iniciar a solução escolhendo f_a no sentido oposto e verá que o resultado é o mesmo.

$\therefore \dfrac{m(R_1+R_2)}{mR_2 + I/R_2} < 1$ se $\boxed{m < I/R_1R_2}$!!

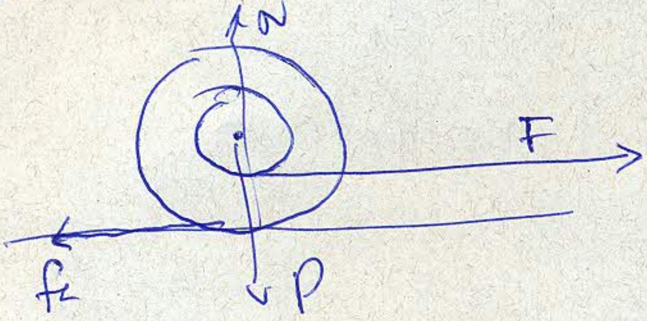
$m < I/R_1R_2 \qquad \xleftarrow{f_a}$

$m > I/R_1R_2 \qquad \longrightarrow f_a$

$m = I/R_1R_2 \qquad f_a = 0$

Carretel - Fio por baixo

Agora, se fizermos o fio sendo puxado pelo lado de baixo do carretel:



$$F - f_a = ma$$

$$f_a R_2 - F R_1 = I\alpha = I\frac{a}{R_2}$$

$$f_a = F - ma$$

$$F R_2 - maR_2 - FR_1 = \frac{Ia}{R_2}$$

$$F(R_2 - R_1) = a\left(mR_2 + \frac{I}{R_2}\right) \Rightarrow a = F\,\frac{R_2 - R_1}{R_2(m + I/R_2^2)}$$

$$\Rightarrow f_a = F\left[1 - \frac{(R_2-R_1)m}{R_2(m + I/R_2^2)}\right]$$

. Note que a razão agora é sempre < 1 portanto f_a é sempre p/ a esquerda

A aceleração a é portanto p/ a direita $\Rightarrow$ o fio enrola no carretel à medida que puxamos.

Fio não horizontal

- Para $\theta < \theta_{crit}$ o carretel vai p/ a direita (enrola o fio).
- Para $\theta > \theta_{crit}$ o carretel se move p/ a esquerda (desenrola o fio)

P/ $\theta = \theta_{crit}$. o carretel fica equilibrado ($\vec{a} = 0$) até que a força de atrito max. seja alcançada

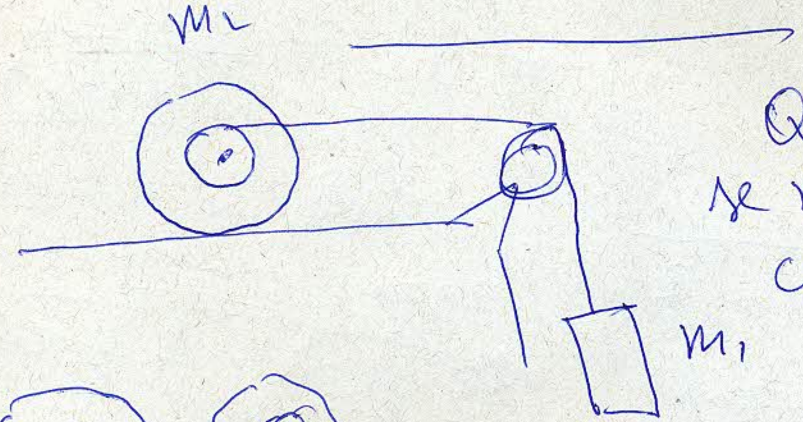
$$F\cos\theta - f_a = ma \Rightarrow f_a = F\cos\theta - ma$$

$$f_a \cdot R_2 - F \cdot R_1 = I\alpha = I\frac{a}{R_2}$$

$$F\cos\theta\, R_2 - m a R_2 - F R_1 = \frac{I a}{R_2}$$

$$\boxed{a = \frac{F(\cos\theta\, R_2 - R_1)}{R_2(m + I/R_2^2)}}$$

Portanto se $R_2\cos\theta - R_1 = 0$, $a = 0! \Rightarrow \boxed{\cos\theta = \frac{R_1}{R_2}}$



Quanto o fio (~~ou~~ m_1) se move, quando o carretel gira de $\Delta\theta$?

O cm do carretel se desloca $\Delta\theta . R_2$ para a direita. O fio se desenrola de um comprimento $\Delta l = R_1 \cdot \Delta\theta$.

Portanto, a massa m_1 desce $\Delta y = \Delta\theta . R_2 + \Delta\theta . R_1 = \Delta\theta(R_2 + R_1)$

$$v_{cm} = \frac{\Delta\theta . R_2}{\Delta t} \qquad v_{m_1} = \frac{\Delta\theta (R_1 + R_2)}{\Delta t}$$

$$v_{cm} = \omega R_2 \;; \quad v_{m_1} = \omega (R_1 + R_2)$$

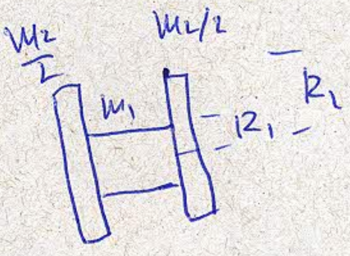
$$a_{cm} = \alpha R_2 \;; \quad a_{m_1} = \alpha (R_1 + R_2)$$

$$\Rightarrow \boxed{a_{m_1} = (R_1 + R_2)\, a_{cm}/R_2}$$

f_a é nula se:

$$m = \frac{I}{R_1 R_2}$$

. Essa condição é satisfeita



se:

considerando $m = m_1 + m_2$

e $R_2 = \alpha \cdot R_1$ ($\alpha > 1$)

$$I = \frac{1}{2} m_2 \alpha^2 R_1^2 + m_1 R_1^2$$

$$m_1 + m_2 = \frac{\left(\frac{1}{2} m_2 \alpha^2 + m_1\right) R_1^2}{\alpha R_1^2}$$

$$\alpha (m_1 + m_2) = \frac{1}{2} m_2 \alpha^2 + m_1$$

$$m_1 (1 - \alpha) = m_2 \left(\alpha - \frac{1}{2}\alpha^2\right)$$

$$m_2 = m_1 \frac{1 - \alpha}{\alpha - \frac{1}{2}\alpha^2}$$

- não há solução p/ $\alpha = 2$
- não há solução p/ $1 < \alpha < 2$
- sempre há solução p/ $\alpha > 2$

p. ex. p/ $R_1 = 3 R_2$

$$m_2 = m_1 \cdot \frac{-2}{3 - \frac{9}{2}} = \frac{-2}{-1{,}5} m_1 = \frac{4}{3} m_1$$

$$\boxed{m_2 = \frac{4}{3} m_1 \, , \; R_2 = 3 R_1}$$