Instituto de Física
USP

Física I - 4300111

Informações Gerais
e
Coletânea de Exercícios

Euzi C. Fernandes da Silva
Rafael de Freitas
Roberto V. Ribas
Valmir A. Chitta

2º semestre de 2013

Índice

1 Informações gerais

1.1 Introdução

Este texto contém informações importantes sobre a disciplina de Física I. Nele estão apresentados o programa da disciplina, a bibliografia recomendada, os critérios de avaliação e de aprovação, o calendário das provas, a equipe de professores e estagiários, assim como uma coletânea de exercícios, que foi planejada para auxiliar o aprendizado de todo o conteúdo da disciplina. A maioria dos problemas e exercícios foram selecionados nos livros indicados na bibliografia desta coletânea.

1.2 Resumo do programa

1. Sistemas de partículas e centro de massa
2. Conservação do momento linear
3. Colisões elásticas e inelásticas em uma dimensão
4. Colisões elásticas e inelásticas em duas dimensões
5. Determinação do centro de massa de corpos rígidos
6. Impulso e média temporal de uma força
7. Rotação de um corpo rígido em torno de um eixo fixo
8. Torque e aceleração angular de um corpo rígido
9. Momento angular e energia de sistemas de partículas e corpos rígidos
10. Momento de inércia
11. Rolamento sem deslizamento
12. Oscilador harmônico simples

13. Oscilador amortecido e forçado

14. Ressonância

1.3 Bibliografia

A bibliografia básica do curso engloba os livros:

1. *Física I*, H. D. Young e R. A. Freedman, vol. 1, 10ª edição, Editora Addison Wesley (Sears e Zemansky);

2. *Física*, P. A. Tipler, vol. 1, Editora Guanabara Dois;

3. *Física*, D. Halliday e F. Resnick, vol. 1, 4ª Edição, Editora LTC;

4. *Física 1 - Mecânica e Gravitação*, R. Serway, Editora LTC;

5. *Curso de Física Básica*, H. M. Nussenzveig, vol. 1 e vol. 2, 2ª edição, Editora Blücher Ltda.;

6. *Curso de Física de Berkeley*, vol. 1.

1.4 Critério de avaliação

A avaliação será feita através de **Provas Quinzenais** com duração de 60 minutos.

1. **Provas Quinzenais**: Serão realizadas oito provas quinzenais, P_Q. A nota dessas provas, N_{P_Q}, resulta da média aritmética das sete melhores notas.

2. **Prova Substitutiva:** P_S, é uma prova única, no final do semestre, versando sobre toda a matéria.

3. **Prova de Recuperação:** P_R, é uma prova única, aplicada no período de recuperação, versando sobre toda a matéria.

OBS: Nos dias das Provas e das Provinhas os alunos devem apresentar um documento de identidade.

Outras questões que digam respeito ao bom aproveitamento do curso e que não se enquadram dentro das regras acima deverão ser resolvidas pela equipe de professores de Física I.

1.5 Critério de aprovação

O(A) aluno(a) que obtiver nota maior ou igual a 5,0 (cinco) na nota das provas quinzenais (média aritmética das sete melhores notas) e frequência mínima de 70% nas aulas está aprovado, ou seja:

$$N_{P_Q} \geq 5,0 \quad \Rightarrow \quad \text{aprovado}$$

$$N_{P_Q} < 5,0 \quad \Rightarrow \quad \text{substitutiva}$$

O(A) aluno(a) que fizer a substitutiva terá a sua média calculada da seguinte forma:

$$N_S = 0,5 * (N_{P_Q} + P_S)$$

Dessa forma, se:

$$\begin{aligned} N_S \geq 5,0 \quad & \Rightarrow \quad \text{aprovado} \\ 3,0 \leq N_S < 5,0 \quad & \Rightarrow \quad \text{recuperação} \\ N_S < 3,0 \quad & \Rightarrow \quad \text{reprovado} \end{aligned}$$

O(A) aluno(a) com $3,0 \leq N_S < 5,0$ poderá realizar a prova de recuperação, P_R e sua nota final será calculada da seguinte forma:

$$N_R = (N_S + 2\,P_R)\,/\,3$$

de modo que:

$$N_R \geq 5,0 \quad \Rightarrow \quad \text{aprovado}$$

$$N_R < 5,0 \quad \Rightarrow \quad \text{reprovado}$$

1.6 Calendário dos feriados escolares

- 02-07/setembro - Semana da Pátria
- 12/outubro - Dia da Padroeira do Brasil
- 28/outubro - Dia do funcionário público
- 02/novembro - Finados
- 15 e 16/novembro - Proclamação da República
- 20/novembro - Consciência Negra

1.7 Calendário das provas

1.7.1 Provas quinzenais

Período diurno

1ª prova: 14 de agosto
2ª prova: 28 de agosto
3ª prova: 18 de setembro
4ª prova: 02 de outubro
5ª prova: 16 de outubro
6ª prova: 30 de outubro
7ª prova: 13 de novembro
8ª prova: 27 de novembro

Período noturno

1ª prova: 15 de agosto
2ª prova: 29 de agosto
3ª prova: 19 de setembro
4ª prova: 03 de outubro
5ª prova: 17 de outubro
6ª prova: 31 de outubro
7ª prova: 14 de novembro
8ª prova: 28 de novembro

Todas as provas quinzenais serão realizadas nas respectivas salas de aula.

1.7.2 Prova Susbstitutiva

Período diurno: 04 de dezembro as 10h00
Período noturno: 05 de dezembro as 21h00

As provas substitutivas serão realizadas no Auditório Abrahão de Moraes nos respectivos horários de aula.

1.7.3 Prova de Recuperação

A Prova de Recuperação será realizada no dia **05 de fevereiro de 2014 as 19:00 horas**, para todos os alunos dos períodos **DIURNO** e **NOTURNO**, no Auditório Abrahão de Moraes.

1.8 Equipe de professores da disciplina

Valmir A. Chitta (Turma T1)

Professor associado do Departamento de Física dos Materiais e Mecânica. Desenvolve pesquisa na área de materiais semicondutores, atuando principalmente nos seguintes temas: propriedades ópticas e de transporte, semicondutores magnéticos diluídos, nitretos, heteroestruturas semicondutoras, campos magnéticos intensos e baixas temperaturas.

Escritório: Edifício Mário Schenberg, sala 209.
Telefone: 3091-7999 e-mail: vchitta@if.usp.br
home page: http://romeo.if.usp.br/∼vchitta/

Roberto V. Ribas (turma T2)

Professor Titular no Departamento de Física Nuclear, tem graduação, mestrado e doutorado em Física pela Universidade de São Paulo, pós-doutorado no Oak Ridge National Laboratory e nos Laboratori Nazionali Di Legnaro. Desenvolve pesquisa na área de

Física Nuclear, atuando principalmente nos seguintes temas: Estrutura Nuclear, Espectroscopia de Raios Gama, Instrumentação Nuclear.

Escritório: Edifício Oscar Sala, sala 120.
Telefone: 3091-6840 e-mail: rvribas@if.usp.br
home page: http://www.dfn.if.usp.br/~ribas/

Rafael Sá de Freitas (turma T3)

Professor doutor do Departamento de Física dos Materiais e Mecânica. Desenvolve pesquisa na área experimental de sistemas eletrônicos fortemente correlacionados, incluindo propriedades magnéticas e de transporte elétrico de óxidos de metais de transição e materiais magnéticos geometricamente frustrados.

Escritório: Edifício Mário Schenberg, sala 217.
Telefone: 3091-6889 e-mail: freitas@if.usp.br

Euzi C. Fernandes da Silva (turma T4)

Professora associada do Departamento de Física dos Materiais e Mecânica. Desenvolve pesquisa na área de materiais semicondutores com ênfase no estudo de heteroestruturas semicondutoras que servem de base para a fabricação de dispositivos (fotodetectores e laseres) do estado sólido que operam no infravermelho.

Escritório: Edifício Mário Schenberg, sala 210.
Telefone: 3091-6880 e-mail: euzicfs@if.usp.br

1.9 Equipe de estagiários da disciplina

Alberto Silva Pereira

Aluno de doutorado do Departamento de Física Nuclear desenvolvendo pesquisa na área de estados coerentes de sistemas com espectro contínuo.

Escritório: Edifício Principal, Ala II, sala 330.

Telefone: 3091-6736 e-mail: apereira@if.usp.br

André Schraider Maizel

Aluno de mestrado no Departamento de Física Geral desenvolvendo pesquisa na área de física estatística de sociedades baseadas em agentes.

Escritório: Edifício Principal, Ala I, sala 336.
Telefone: 3091-6803 e-mail: maizel@usp.br

Caio Vinicius Costa Lopes

Aluno de mestrado no Departamento de Física Nuclear desenvolvendo pesquisa na área de resposta não linear do vácuo a distribuições de correntes, e suas aplicações a pulsares e estrelas de quarks.

Escritório: Edifício Principal, Ala II, sala 326.
Telefone: 3091-7177 e-mail: caiocostalopes@usp.br

Jeferson Tiago da Silva

Aluno de mestrado no Departamento de Física dos Materiais e Mecânica desenvolvendo pesquisa na área de física dos materiais magnéticos.

Escritório: Edifício Mário Schenberg, sala 203.
Telefone: 3091-6875 e-mail: jeferson.tiago.silva@usp.br

Marcel Philippi Dorta

Aluno de mestrado no Departamento de Física Geral desenvolvendo pesquisa na área de propriedades físicas que desencadeiam alterações mecânicas em células vivas.

Escritório: Edifício Principal, Ala I, sala 240.
Telefone: 3091-0803 e-mail: mphdorta@gmail.com

Vinicius Wilian Dias Cruzeiro

Aluno de mestrado no Departamento de Física Geral desenvolvendo pesquisa na área de física atômica e molecular.

Escritório: Edifício Principal, Ala I, sala 240.
Telefone: 3091-0803 e-mail: vinicius_wilian@hotmail.com

1.10 Horário e local das aulas

Período diurno:

- **Turma T1 - Prof. Valmir A. Chitta**
  - 2$^{\underline{as}}$ e 4$^{\underline{as}}$ das 10h00 às 12h00
  - 6$^{\underline{as}}$ das 14h00 às 16h00
  - Auditório Giuseppe Occhialini (Sul), Edifício Principal, Ala Central
- **Turma T3 - Prof. Rafael Sá de Freitas**
  - 2$^{\underline{as}}$ e 4$^{\underline{as}}$ das 10h00 às 12h00
  - 6$^{\underline{as}}$ das 14h00 às 16h00
  - Sala 206 do Edifício Principal, Ala Central

Período noturno:

- **Turma T2 - Prof. Roberto V. Ribas**
  - 2$^{\underline{as}}$ das 19h00 às 21h00
  - 5$^{\underline{as}}$ e 6$^{\underline{as}}$ das 21h00 às 23h00
  - Auditório Gleb Wataghin (Norte), Edifício Principal, Ala Central

- **Turma T4 - Euzi C. F. da Silva**
  - $2^{\underline{as}}$ e $4^{\underline{as}}$ das 19h00 às 21h00
  - $5^{\underline{as}}$ das 21h00 às 23h00
  - Sala 202 do Edifício Principal, Ala II

1.11 Plantões de dúvidas

Os plantões para resolver dúvidas serão:

Diurno

- Horário: $4^{\underline{as}}$ e $6^{\underline{as}}$ das 13h00 as 14h00
- Local: Edifício Principal, Ala Central, sala 206

Noturno

- Horário: $2^{\underline{as}}$ e $5^{\underline{as}}$ das 18h00 as 19h00
- Local: Edifício Principal, Ala II, sala 202

1.12 Página da disciplina na internet

A disciplina contará com uma página na internet, onde diversas informações, além das contidas neste livreto, serão anunciadas, tais como alterações de datas de provas, notas, gabaritos, etc. Deste modo, é importante consultá-la periodicamente. Para acessá-la entre na página **http://social.stoa.usp.br/** escolha **Moodle do Stoa**, depois **IF**, depois **430** e, finalmente, **Física I**.

2 Coletânea de exercícios

2.1 Sistemas de partículas: conservação do momento linear

1. Ache as coordenadas do centro de massa dos sistemas mostrados nas figuras abaixo. Em (a) todas as massas são pontuais, em (b) os fios tem a mesma densidade linear uniforme de massa e em (c) a placa tem densidade superficial uniforme de massa.

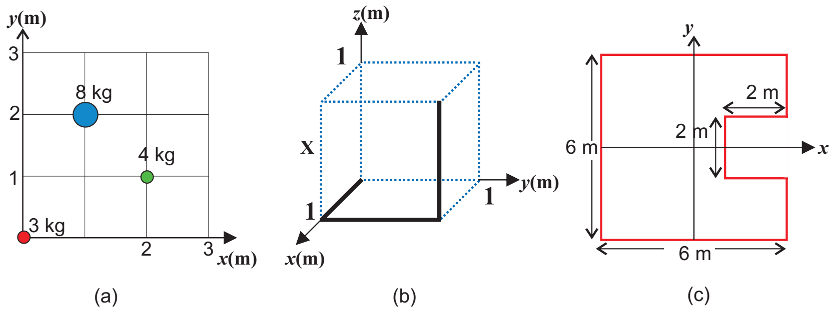


Figura 1: Exercício 1.

2. As massas $m_1 = 10$ kg e $m_2 = 6$ kg estão ligadas por uma barra rígida de massa desprezível. Inicialmente em repouso, elas são submetidas às forças $\vec{F}_1 = 8\,\hat{\imath}$ (N) e $\vec{F}_2 = -6\,\hat{\jmath}$ (N), como indicado na figura.

   (a) Escreva as coordenadas do centro de massa como função do tempo.

   (b) Expresse a quantidade de movimento total como função do tempo.

3. Um avião explode no ar e se divide em três partes, cujas massas e velocidades, imediatamente depois da explosão, são (unidades no SI):

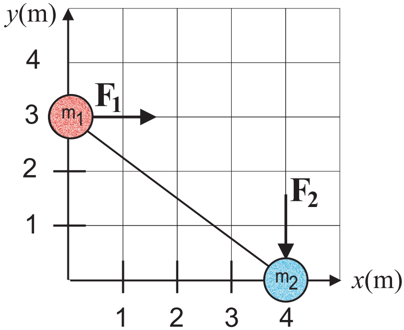


Figura 2: Configuração inicial das massas do exercício 2.

$$m_1 = 4000 \text{ kg}, \quad \vec{v}_1 = 200\ \hat{\imath} + 25\ \hat{k};$$

$$m_2 = 2000 \text{ kg}, \quad \vec{v}_2 = -50\ \hat{\imath} + 50\ \hat{\jmath} - 25\ \hat{k};$$

$$m_3 = 2000 \text{ kg}, \quad \vec{v}_3 = -50\ \hat{\imath} - 25\ \hat{k}.$$

(a) Qual era a velocidade do avião ao explodir?

(b) Qual era o seu momento linear?

4. Um corpo de massa 5 kg desloca-se para a direita com velocidade de 5 m/s, perseguindo outro corpo de 3 kg, que se desloca também para a direita a 1 m/s. Determine:

   (a) A energia cinética dos dois corpos nesse referencial e a velocidade do centro de massa;

   (b) A velocidade de cada um dos corpos em relação ao centro de massa;

   (c) A energia cinética do movimento em relação ao centro de massa;

   (d) A energia cinética do movimento do centro de massa.

5. Um corpo de 3 kg escorrega ao longo de um plano horizontal sem atrito com velocidade $\vec{v} = (4 \text{ m/s})\ \hat{\imath}$. Num certo instante, explode, dividindo-se em duas partes, uma de massa 2 kg e outra de massa 1 kg. Depois da explosão, o pedaço de 1 kg desloca-se com velocidade $\vec{v} = (8 \text{ m/s})\ \hat{\jmath}$.

   (a) Qual a velocidade do pedaço de 2 kg depois da explosão?

   (b) Qual a velocidade do centro de massa depois da explosão?

6. Um projétil de 6 kg é disparado num ângulo $\theta = 30°$ com a horizontal, com velocidade inicial de 40 m/s. No topo da sua trajetória, o projétil explode em dois fragmentos com massas de 2 kg e 4 kg. Os fragmentos deslocam-se na horizontal, imediatamente depois da explosão, e o fragmento de 2 kg cai no lugar do disparo do projétil. Determine:

   (a) O local onde cai o fragmento de 4 kg;

   (b) A energia liberada na explosão.

7. Um homem com 70 kg e um garoto de 35 kg, estão juntos sobre uma superfície gelada, na qual o atrito é desprezível. Um empurra o outro, e o homem se desloca para trás, com velocidade de 0,3 m/s, em relação ao gelo.

   (a) Qual a separação dos dois depois de 5 s?

   (b) A energia mecânica do sistema se conserva?

8. Um remador de 75 kg, sentado na popa de uma canoa de 150 kg e 3 m de comprimento, conseguiu trazê-la para uma posição em que está parada perpendicularmente à margem de um lago, que nesse ponto forma um barranco, com a proa encostada numa estaca, onde o remador quer amarrar a canoa. Ele se levanta e caminha até a proa, o que leva a canoa a afastar-se da margem. Chegando à proa, ele consegue esticando o braço, alcançar até uma distância de 80 cm da proa.

Conseguirá agarrar a estaca? Caso contrário, quanto falta? Despreze a resistência da água e considere o centro de massa da canoa como localizado em seu ponto médio.

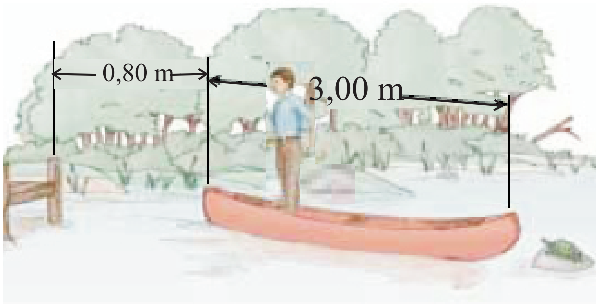


Figura 3: Remador do exercício 8.

9. Um garoto de massa 30 kg, correndo a 2,5 m/s, salta sobre um carrinho de massa 10 kg, que estava parado, permanecendo sobre ele.

   (a) Determine a velocidade do conjunto carrinho+garoto depois que ambos estiverem andando juntos.

   (b) Em seguida, o garoto começa a andar sobre o carrinho com a velocidade de 0,5 m/s, relativa ao carrinho, dirigindo-se para frente do mesmo. Qual a nova velocidade do carrinho?

   (c) Quando o garoto chega na extremidade do carrinho, ele pula para frente com velocidade de 1 m/s em relação ao carrinho. Com que velocidade o carrinho fica depois disso?

10. Um atirador, com um rifle de 2 kg apoiado ao ombro, dispara uma bala de 15 g, cuja velocidade na boca da arma é $\vec{v}_0 = 800\,\hat{\imath}$ (m/s).

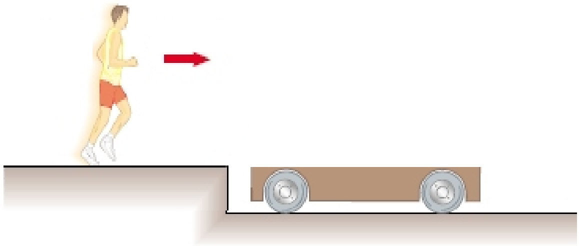


Figura 4: Garoto saltando sobre o carrinho do exercício 9.

(a) Com que velocidade inicial a arma recua?

(b) Que impulso transmite ao ombro do atirador?

(c) Se o impulso é absorvido pelo ombro em 0,05 s, qual e a força média exercida sobre ele?

11. Um canhão montado em uma carreta, apontado numa direção horizontal, atira uma bala de 50 kg, cuja velocidade na boca do canhão é $\vec{v}_0 = 300\,\hat{\imath}$ (m/s). A massa total do canhão e da carreta é de 5 toneladas. Calcule:

    (a) A velocidade inicial de recuo da carreta;

    (b) A distância que a carreta recua, se o coeficiente de atrito cinético é 0,7.

2.2 Sistema de partículas: colisões

12. Uma bala de 10 g é disparada sobre um pêndulo balístico de massa 990 g.

    (a) Se a velocidade inicial da bala é 300 m/s, qual a altura atingida pelo pêndulo (junto com a bala) depois da colisão?

(b) Se a velocidade inicial da bala é 200 m/s, determine a altura máxima atingida pelo pêndulo quando a bala passa através dele e emerge com velocidade de 50 m/s.

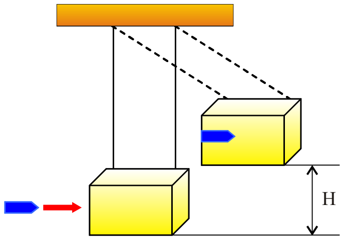


Figura 5: Pêndulo balístico do exercício 12.

13. Um vagão de 20 toneladas está freado no topo de uma descida. Quando o carro é solto, ele rola, descendo 9 m em relação à posição original. Na parte mais baixa da ladeira, ele engata em outro vagão, de 10 toneladas, que está livre nos trilhos. Os dois, engatados, sobem uma ladeira até uma altura H. Calcular H.

14. Um bloco de madeira, de massa 1 kg, está ligado a uma mola de constante de força 200 N/m e repousa sobre uma superfície horizontal lisa, sem atrito. Uma bala de 20 g atinge o bloco e comprime a mola de 13,3 cm. Determine:

    (a) A velocidade da bala antes da colisão;

    (b) A fração da energia mecânica inicial se perde na colisão.

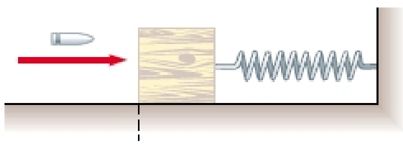


Figura 6: Sistema massa-mola do exercício 14.

15. Um corpo de 4 kg, deslocando-se a 5 m/s, na horizontal, efetua uma colisão perfeitamente elástica com um corpo de 1 kg, inicialmente em repouso. Determine a velocidade final de cada corpo e a energia transferida para o corpo de 1 kg.

16. Considere o espalhamento elástico entre uma partícula alfa de massa $m_1 = 4$ m por um neutron em repouso, de massa $m_2 =$ m como mostra a figura 7.

    (a) Qual é o ângulo máximo θ_1 de espalhamento?

    (b) Neste ângulo, que fração da energia cinética incidente vai para o neutron?

    (c) Qual é o ângulo θ_2 entre a direção de recuo e a de incidência?

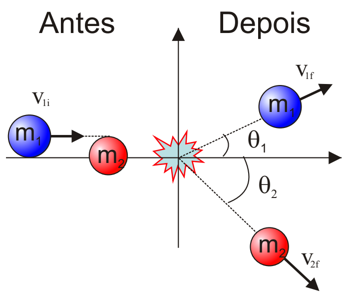


Figura 7: Espalhamento bidimensional do exercício 16.

17. Durante a madrugada, um carro de luxo de massa 2.400 kg, bate na traseira de um carro de massa 1.200 kg, que estava parado. O motorista do carro de luxo alega que o outro estava com as luzes apagadas, e que ele vinha reduzindo a marcha ao aproximar-se do sinal, estando a menos de 10 km/h quando o acidente ocorreu. A perícia constata que o carro de luxo arrastou o outro de uma distância de 10,5 m, e estima que o coeficiente de atrito cinético com a estrada, no local do acidente, era 0,6. Calcule a que velocidade o carro de luxo vinha realmente correndo.

18. Um caminhão carregado, de massa M = 3 ton, viajando para o norte a 60 km/h, colide, num cruzamento, com um carro de massa total m = 1 ton, que vinha trafegando para leste a 90 km/h. Calcule em que direção e de que distância o carro é arrastado pelo caminhão, sabendo que o coeficiente de atrito cinético no local do acidente é 0,5.

19. Uma bola deslocando-se a 10 m/s, faz um colisão perfeitamente elástica, mas oblíqua, com uma outra bola de mesma massa e em repouso. A bola incidente é desviada de um ângulo $\theta_1 = 30^\circ$ em relação à direção inicial do movimento. Determinar a velocidade de cada bola depois da colisão o ângulo de recuo θ_2.

20. Num choque entre duas partículas de massas $m_1 = 0,8$ kg e $m_2 = 1,2$ kg, o primeiro desvia 90° de sua trajetória original, mantendo inalterada sua energia cinética. Se as velocidades iniciais dos corpos eram, respectivamente,
$\vec{v}_1 = (3,0 \text{ m/s})\ \hat{\imath}$,
$\vec{v}_2 = (2,0 \text{ m/s})\ \hat{\imath} - (1,0 \text{ m/s})\ \hat{\jmath}$:

    (a) Calcule o vetor velocidade de m_2 após a colisão;

    (b) Verifique se o choque foi elástico ou inelástico.

21. Uma bala de massa 4,5 g é disparada horizontalmente num bloco de madeira de massa 2,4 kg, em repouso sobre a superfície horizontal. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a superfície vale 0,20. A bala fica retida no bloco, que sofre um deslocamento de 1,8 m até parar.

    (a) Qual a velocidade do bloco imediatamente após a bala parar em seu interior?

    (b) Qual a velocidade inicial da bala?

22. Uma bola de massa $m = 0,5$ kg é presa a um pino por um fio leve e inextensível de 0,8 m de comprimento. A bola é abandonada quando o fio está na horizontal. Na parte mais baixa

da trajetória a bola atinge um bloco de massa $M = 2,0$ kg, inicialmente em repouso sobre uma superfície áspera. A colisão, entre a bola e o bloco, pode ser considerada como perfeitamente elástica. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a superfície é $\mu_c = 0,16$.

(a) Qual o trabalho realizado pelas forças que atuam sobre a bola?

(b) Quais as velocidades dos corpos após a colisão?

(c) Até que altura sobe a bola após a colisão?

(d) Qual a distância percorrida pelo bloco depois da colisão?

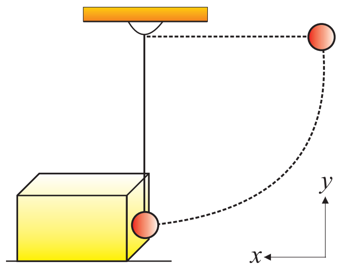


Figura 8: Colisão do exercício 22.

2.3 Cinemática e dinâmica do movimento de corpos rígidos

23. No sistema mostrado na figura 9, os corpos estão ligados por barras muito leves cujos momentos de inércia podem ser desprezados. O sistema gira em torno do eixo y com velocidade angular $\omega = 2$ rad/s.

    (a) Considere que no instante t=0 s, os corpos estejam nas posições indicadas na figura. Determine o vetor velocidade de cada partícula usando o produto vetorial $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$.

(b) Use a velocidade escalar de cada corpo para calcular a energia cinética do sistema.

(c) Determine o momento de inércia do sistema em torno do eixo y e calcule a energia cinética do sistema utilizando a relação $\mathrm{E} = \frac{\mathrm{I}\omega^2}{2}$.

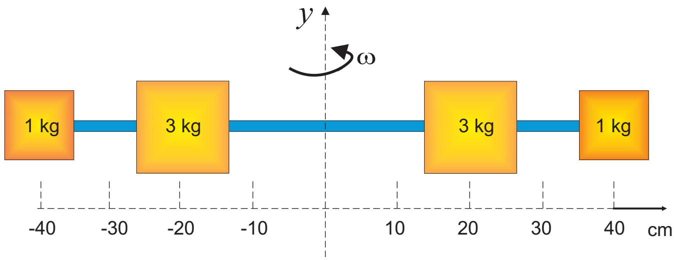


Figura 9: Massas girando em torno do eixo y do exercício 23.

24. Quatro esferas pequenas de massa m estão presas às extremidades de uma estrutura de massa desprezível, no plano xy, como mostrado na figura 10.

    (a) Se a rotação do sistema ocorre ao redor do eixo y com velocidade angular ω, encontre o momento de inércia $\mathrm{I_y}$ ao redor do eixo y e a energia cinética rotacional ao redor desse eixo.

    (b) Supondo que o sistema gire no plano xy, com velocidade angular ω, ao redor de um eixo passando por O (eixo z), calcule o momento de inércia $\mathrm{I_z}$ ao redor do eixo z e a energia rotacional ao redor desse eixo.

25. Uma barra fina, com uma distribuição de massa uniforme, tem massa M e comprimento L. Calcule o seu momento de inércia em relação a um eixo que passa pelo centro da barra (eixo z). Usando o Teorema dos eixos paralelos, determine o momento de inércia em relação ao eixo z'.

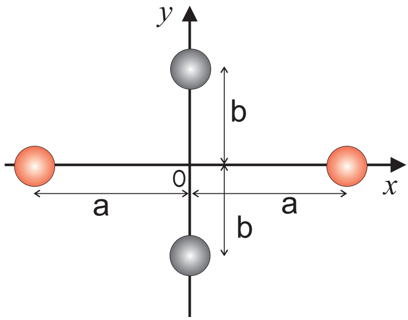


Figura 10: Esferas girando, do exercício 24.

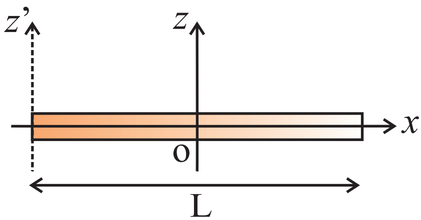


Figura 11: Barra delgada do exercício 25.

26. Um cilindro cheio, com uma distribuição de massa uniforme, tem um raio R, massa M, e comprimento L. Calcule seu momento de inércia em relação ao eixo z central.

27. (a) Mostre que o momento de inércia de um cilindro vazado de massa M, de raio interno R_1 e externo R_2, em relação ao eixo z que passa pelo seu centro, é dado por:

$$I_z = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2).$$

    (b) Um cilindro maciço de raio R_2 e massa M tem momento de inércia $I_z = \frac{1}{2}MR_2^2$, em relação ao eixo z que passa pelo seu centro. Como você explica que se eu fizer um buraco de raio R_1 em um cilindro maciço, o momento de inércia parece aumentar de uma quantidade $I_z = \frac{1}{2}MR_1^2$?

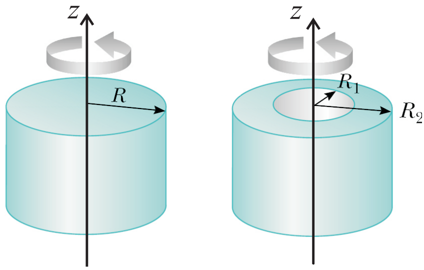


Figura 12: Cilindro maciço e cilindro vazado do exercício 27.

28. Utilizando apenas o resultado do exercício 26, calcule o momento de inércia de um cilindro uniforme vazado de massa M, de raio interno R_1 e externo R_2, em relação ao eixo z (figura do exercício 27).

29. Um disco uniforme, de raio R=0,12 m e massa m = 5 kg, está apoiado de modo a poder girar livremente em torno de seu eixo. Uma corda está enrolada em torno do disco e é puxada com uma força de 20 N, como mostra a figura.

    (a) Qual é o torque exercido sobre o disco?

    (b) Qual é a aceleração angular do disco?

    (c) Se o disco parte do repouso, qual é a sua velocidade angular e sua energia cinética depois de 3 s?

    (d) Determine o deslocamento angular $\Delta\vec{\theta}$ do cilindro nesses 3 s. Verifique que o trabalho efetuado pelo torque ($W = \vec{\tau} \cdot \Delta\vec{\theta}$), neste intervalo de tempo, é igual a variação da energia cinética calculada no item (c).

30. Um cilindro de massa m = 2 kg gira em torno de um eixo que passa pelo seu centro. Sobre ele são aplicadas as forças indicadas na Figura 14 onde $R_a = 5$ cm e $R_b = 12$ cm.

    (a) Qual é o torque resultante exercido sobre o cilindro?

    (b) Qual é o vetor aceleração angular do cilindro?

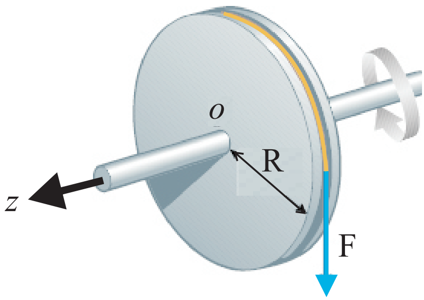


Figura 13: Disco do exercício 29.

(c) Sabendo que a velocidade angular inicial do cilindro era $\vec{\omega}_0 = -4\ \hat{k}$ (rad/s), determine $\vec{\omega}$(t).

(d) Qual é a sua energia cinética depois de 3 s?

(e) Determinar o deslocamento angular $\Delta\vec{\theta}$ do cilindro nesses 3 s. Calcule o trabalho efetuado pelo torque (W $= \vec{\tau} \cdot \Delta\vec{\theta}$), neste intervalo de tempo, e verifique que é igual à variação da energia cinética calculada no item (d).

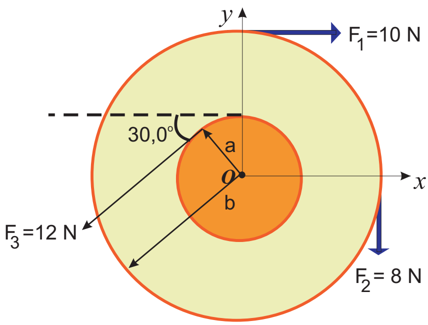


Figura 14: Cilindro sob a ação de forças do exercício 30.

31. Um disco uniforme de 100 kg e raio 0,60 m está sobre uma superfície de gelo lisa. Duas patinadoras gêmeas enrolam cordas em torno do disco, num mesmo sentido. Depois cada

qual puxa a sua corda e se afasta do disco, exercendo sobre ele forças constantes de 40 N e 60 N durante 5 s.

(a) Determine a aceleração, a velocidade e a posição do centro de massa em função do tempo.

(b) Quais são a aceleração angular e a velocidade angular em função do tempo?

(c) Quantas voltas em torno de seu eixo o cilindro faz durante este tempo?

(d) Calcule a energia cinética do cilindro quando t = 5 s.

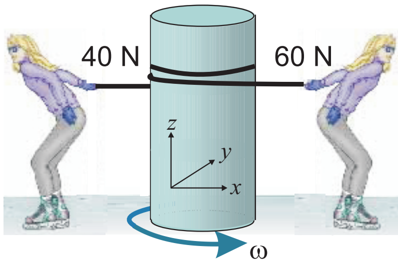


Figura 15: Patinadoras puxando o cilindro do exercício 31.

32. Uma pedra de amolar circular, de massa 2 kg e raio 7 cm, gira a 700 rev/min. Depois de a potência do motor ter sido desligada, uma pessoa continua a afiar o seu machado, contra a pedra, durante 10 segundos, quando então o rebolo pára. Encontre:

(a) A energia cinética de rotação no momento em que o motor é desligado;

(b) A aceleração angular da pedra, admitindo que seja constante;

(c) O torque exercido pelo machado sobre a pedra de amolar;

(d) O trabalho realizado pelo machado.

33. Dois corpos de massas m_1 e m_2, estão ligados a cordas que passam por polias montadas num eixo comum. O momento de inércia total das duas polias é de 40 kg.m^2 e os raios são $R_1 = 0,4$ m e $R_2 = 1,2$ m.

    (a) Se $m_1 = 24$ kg, determine m_2 de modo que o sistema fique em equilíbrio.

    (b) Se ao corpo m_1 for adicionado outro de 12 kg, qual será a aceleração angular das polias e qual será a tensão nas cordas?

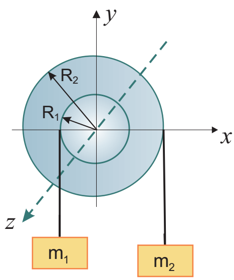


Figura 16: Cilindro sob a ação de forças exercício 33.

34. Dois blocos estão ligados por um fio de massa desprezível através de uma polia de raio 0,25 m e momento de inércia I. O bloco sobre o plano inclinado, sem atrito, está subindo com uma aceleração constante de $2,00$ m/s^2. Determine:

    (a) As tensões T_1 e T_2 nas duas partes do fio;

    (b) O momento de inércia da polia.

35. Calcule o efeito da massa M da polia, de raio R, sobre o sistema mostrado na figura 18, onde a massa m_1, que desliza sem atrito, está ligada à massa suspensa m_2, pelo fio que passa sobre a polia, determinando:

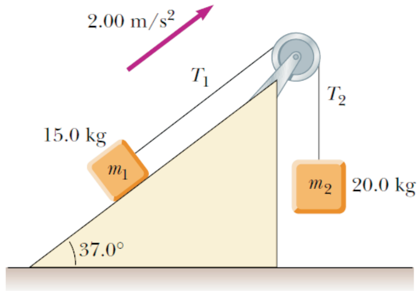


Figura 17: Esquema de massas e polia do exercício 34.

(a) A aceleração do sistema e as tensões T_1 e T_2 nos fios ligados a m_1 e m_2, respectivamente, utilizando a segunda lei de Newton;

(b) O torque externo resultante que atua sobre o sistema (os dois corpos e a polia) em relação ao centro da polia;

(c) O momento angular total do sistema em relação ao centro da polia quando as massas deslocam-se com a velocidade escalar v;

(d) A aceleração do sistema a partir dos resultados dos itens (b) e (c), fazendo o torque resultante igual à taxa de variação do momento angular do sistema.

36. O sistema da Figura 19 principia a movimentar-se do repouso. O corpo de massa $m_2 = 30$ kg está dois metros acima do solo. O corpo apoiado no solo tem massa $m_1 = 20$ kg e a polia é um disco uniforme com um raio $R = 10$ cm e massa $M = 5$ kg. Determinar:

(a) A velocidade escalar do corpo de massa m_2 imediatamente antes de atingir o solo e a velocidade escalar angular da polia neste instante;

(b) As tensões nos cabos;

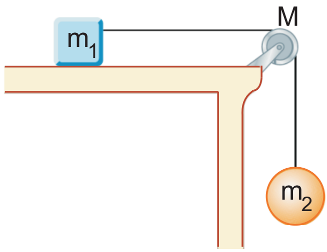


Figura 18: Esquema de massas e polia do exercício 35.

(c) O tempo que o corpo de massa m_2 leva para atingir o nível do solo.

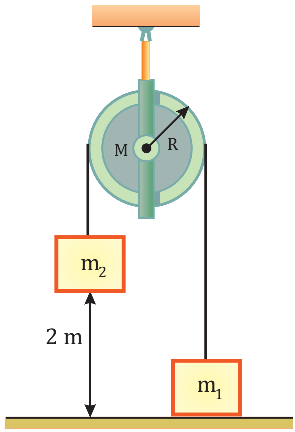


Figura 19: Esquema de massas e polia do exercício 36.

2.4 Momento angular, sua conservação e aplicações

37. Uma partícula de massa m move-se com velocidade constante em uma trajetória retilínea. De acordo com a figura 20, qual é o momento angular dessa partícula em relação ao ponto O? E em relação ao ponto O'?

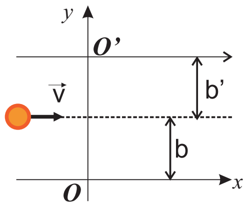


Figura 20: Partícula em MRU do exercício 37.

38. Uma partícula de massa m move-se num círculo de raio R com velocidade angular ω, como mostra a figura 21. Calcule:

    (a) O torque que atua sobre essa partícula em relação à origem O;

    (b) O vetor momento angular em relação à origem O.

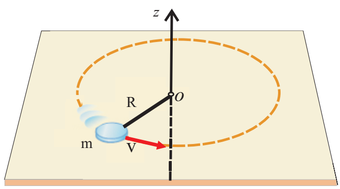


Figura 21: Partícula em movimento circular do exercício 38.

39. Uma bolinha presa a um fio de massa desprezível gira em torno de um eixo vertical com velocidade escalar constante,

formando um ângulo $\theta_0 = 30°$ com a vertical e mantendo-se a uma distância $\mathrm{d} = 0,5$ m do eixo. O fio passa, sem atrito, através de um orifício O numa placa e é puxado lentamente para cima até que o ângulo com a vertical passe a ser $\theta = 60°$.

(a) Que comprimento $\delta\ell$ do fio foi puxado?

(b) Qual é a razão entre as velocidades de rotação final e inicial $(\omega_\mathrm{f}/\omega_\mathrm{i})$?

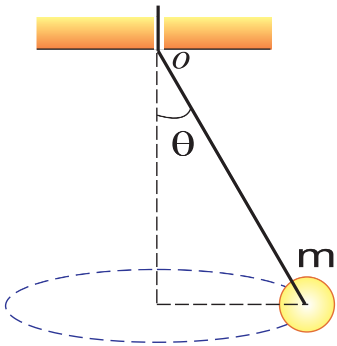


Figura 22: Pêndulo cônico do exercício 39.

40. Dois patinadores, cada um de massa $\mathrm{m} = 60$ kg, deslizando sobre uma pista de gelo, com atrito desprezível, aproximam-se com velocidades iguais e opostas de módulo $\mathrm{v} = 5$ m/s, segundo retas paralelas, na direção x as quais estão separadas por uma distância $\mathrm{d} = 1,40$ m.

    (a) Calcule o vetor momento angular do sistema e mostre que é o mesmo em relação a qualquer ponto e se conserva.

    (b) Quando os dois patinadores chegam a uma distância $\mathrm{d} = 1,40$ m um do outro, estendem os braços e dão-se as mãos, passando a girar em torno do centro de massa do sistema. Calcule a velocidade angular.

(c) Calcule a energia cinética do sistema antes e depois dos patinadores se unirem. Explique o resultado.

41. Um disco com momento de inércia I_1 está girando com velocidade angular inicial ω_1, em torno de um eixo central sem atrito. Num certo instante, este disco cai sobre outro disco, de momento de inércia I_2, que está inicialmente em repouso, no mesmo eixo. Em virtude do atrito entre as superfícies, os dois discos terminam por atingir uma velocidade angular constante ω_f, comum a ambos.

    (a) Determine ω_f.

    (b) A energia cinética do sistema se conserva?

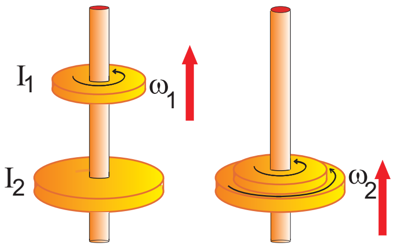
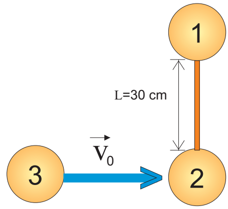


Figura 23: Discos girando do exercício 41.

42. Uma porta de 15 kg e 70 cm de largura, suspensa por dobradiças bem azeitadas, está aberta de 90°, ou seja, com seu plano perpendicular ao plano do batente. Ela leva um empurrão na beirada aberta, com impacto equivalente ao de uma massa de 1 kg com velocidade de 2,5 m/s. Quanto tempo ela leva para fechar-se?

43. Um haltere é formado por dois discos iguais, cada um massa m, rotulados por 1 e 2, unidos por uma barra rígida de massa desprezível e comprimento L=30 cm. O haltere repousa sobre uma mesa de ar horizontal. Um terceiro disco, rotulado por

3, de mesma massa m, desloca-se sobre a mesa com atrito desprezível e velocidade $v_0 = 3$ m/s, perpendicularmente ao haltere. Ele colide frontalmente com o disco 2 e fica colado a ele. Desprezando o raio dos discos, determine:



(a) O vetor posição do centro de massa em função do tempo;

(b) O vetor velocidade do centro de massa;

(c) A velocidade angular do sistema depois da colisão;

(d) Determine a fração da energia mecânica inicial que é perdida no impacto.

44. Uma mesa de coquetel tem um tampo giratório, que é uma tábua circular de raio R e massa M, capaz de girar com atrito desprezível em torno de um eixo vertical da mesa. Uma bala de massa $m << M$ e velocidade v, disparada por um convidado, numa direção horizontal, vai encravar-se na periferia da tábua.

    (a) Qual é a velocidade angular de rotação adquirida pela tábua?

    (b) Que fração da energia cinética inicial é perdida no impacto?

45. Um alçapão quadrado de lado L e massa M está levantado verticalmente, em equilíbrio sobre as dobradiças, quando é levado a cair por uma ligeira trepidação. Desprezando o atrito, que velocidade angular terá adquirido ao bater no chão?

46. Um bloco de massa m_1, que pode deslizar com atrito desprezível sobre um plano inclinado de inclinação θ em relação à horizontal, está ligado por um fio, que passa sobre uma polia de raio R e massa M, a uma massa suspensa m_2 ($m_2 > m_1$). O sistema é solto em repouso. Calcule, por conservação da energia, a velocidade v de m_2 após cair de uma altura h.

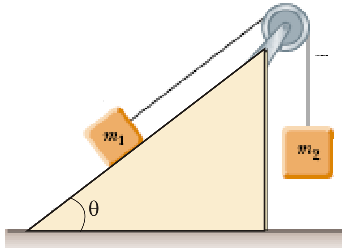


Figura 24: Esquema de massas e polia do exercício 46.

47. Um cilindro uniforme de raio R e massa M tem um fio enrolado sobre a sua superfície. O disco é solto do repouso com o fio vertical e com sua extremidade superior presa a uma barra fixa.

    (a) Qual é a tensão no fio?

    (b) Qual é o módulo da aceleração do centro de massa?

    (c) Qual é a velocidade do centro de massa depois que o disco desce uma distância vertical h?

    (d) Verifique a resposta anterior utilizando o enfoque da energia.

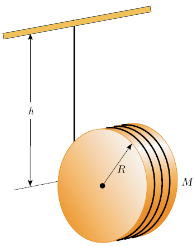


Figura 25: Cilindro do exercício 47.

48. Uma roda cilíndrica, de raio R e massa M, rola sem deslizar sobre um plano horizontal, deslocando-se com velocidade v,

e sobe sobre um plano inclinado de inclinação θ, continuando a rolar sem deslizamento.

(a) Até que altura h o centro da roda subirá sobre o plano inclinado?

(b) Calcule a força de atrito entre o corpo e o plano inclinado para garantir que o movimento seja de rolamento sem deslizamento.

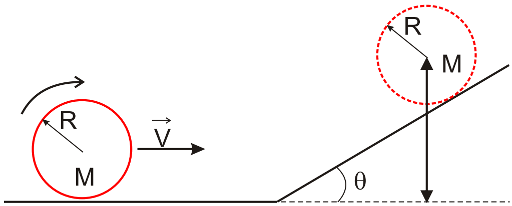


Figura 26: Roda cilíndrica subindo a rampa do exercício 48.

49. Uma bola de boliche esférica e uniforme, de massa M e raio R, é lançada com velocidade inicial v = 5 m/s e com velocidade angular inicial nula. O coeficiente de atrito cinético entre a bola e a pista é $\mu_c = 0,3$. Determinar:

(a) O tempo que a bola escorrega até atingir a condição de rolamento sem deslizamento;

(b) A distância que a bola percorre antes de principiar a rolar sem escorregar.

50. Uma bola de futebol, de massa m = 400 g e com diâmetro D = 24 cm, rola sem deslizar sobre um plano inclinado. Ela parte do repouso e, depois de 5 s e tendo completado exatamente 10 rotações, escapa pela borda do plano inclinado. Considerando que $\mathrm{I}_{\mathrm{CM}}^{\mathrm{bola}} = 2/3\mathrm{MR}^2$, calcule:

(a) O torque resultante sobre a bola relativo ao seu centro de massa, enquanto ela rola sobre o plano inclinado;

(b) A energia de rotação da bola ao colidir com o solo.

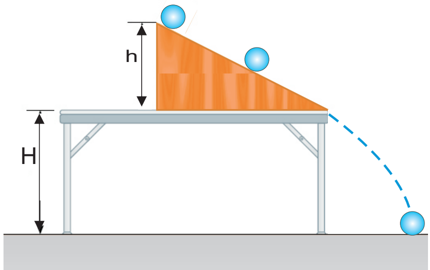


Figura 27: Bola descendo o plano inclinado do exercício 50.

51. Uma bola homogênea de raio r rola sem deslizar, a partir do repouso, desde o topo de um domo hemisférico de raio R.

    (a) Depois de percorrer que ângulo θ em relação à vertical a bola deixará a superfície?

    (b) Com que velocidade v isso acontece?

    (c) A que distância D da parede do domo ela cai?

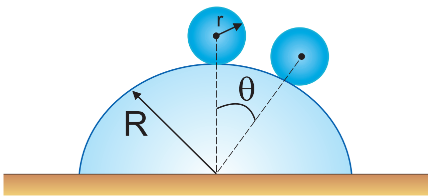


Figura 28: Bola rolando sobre um domo esférico do exercício 51.

52. Uma bola de bilhar de raio $R = 2,5$ cm e massa $m = 350$ g, inicialmente em repouso, recebe uma tacada seca. O impulso do taco é horizontal e aplicado à distância $2R/3$ abaixo da linha horizontal do centro. A velocidade linear da bola é $v_0 = 3$ m/s.

(a) Qual é o vetor velocidade angular inicial ω_0?

(b) Qual é o vetor velocidade linear da bola $\vec{v}_r$ uma vez iniciado o rolamento sem escorregamento?

(c) Qual a energia cinética inicial da bola?

(d) Qual o trabalho da força de atrito?

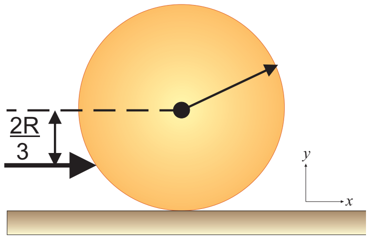
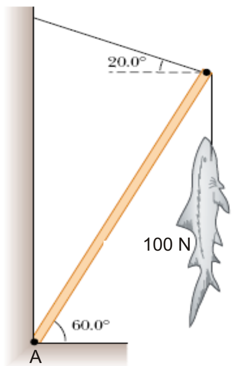


Figura 29: Bola de bilhar com tacada baixa do exercício 52.

2.5 Corpo rígido em equilíbrio

53. Na figura abaixo, a barra cujo peso é 20 N e o comprimento é L, está submetida à ação de várias forças.



(a) Determine a tensão no fio que sustenta a barra.

(b) Qual é o módulo da força exercida sobre a barra pela articulação A?

(c) Se o fio que sustentam a barra e o peixe forem cortados, qual é a aceleração angular da barra exatamente no instante do corte?

(d) Qual é a velocidade angular da barra quando esta atinge a posição horizontal?

54. Uma tábua de 90 N e 12 m de comprimento apóia-se em dois cavaletes, cada qual colocado a 1 m da extremidade da tábua. Um bloco 360 N é colocado sobre a tábua, a 3 m de uma extremidade. Determinar as forças exercidas pelos cavaletes sobre a tábua.

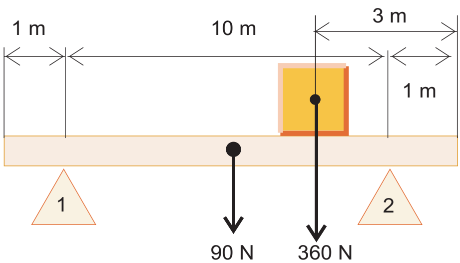
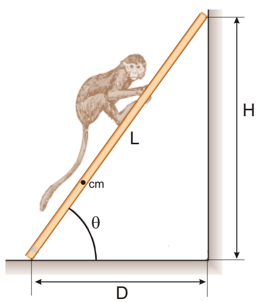


Figura 30: Tábua apoiada em cavaletes do exercício 54.

55. Uma escada de comprimento $L = 4,0$ m e massa $m = 15$ kg repousa apoiada numa parede. Sua extremidade superior está a uma altura $H = 3,0$ m do chão. O centro de gravidade da escada está situado a um terço do comprimento da escada, a partir da extremidade inferior. Um macaco de massa $m = 7$ kg sobe até um ponto situado na metade da escada. Suponha que não existe atrito entre a escada e a parede, mas que existe atrito entre a escada e o chão.

    (a) Determine as forças exercidas na escada pela parede e pelo chão.

    (b) Considere, agora, que o coeficiente de atrito estático entre a escada e o piso seja igual a 0,53. Determine a fração do comprimento da escada que o macaco poderá subir sem que a escada comece a deslizar.



(c) Encontre os valores mínimo e máximo de μ_e, respectivamente, para que o macaco ou não possa sair do lugar ou possa chegar ao topo da escada, sem que ela comece a deslizar.

56. Na figura seguinte, considerando que a massa da barra horizontal é desprezível, pede-se:

    (a) Qual é o módulo das três forças que atuam na barra;

    (b) Qual é a força exercida pela barra sobre a articulação.

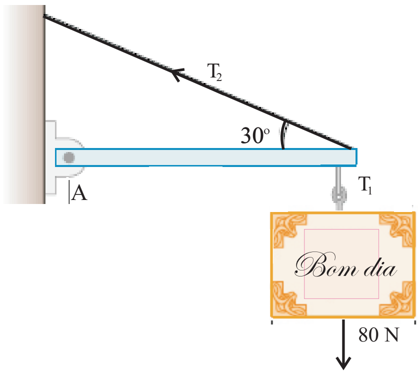


Figura 31: Esquema do exercício 56.

57. Uma barra homogênea, de massa $M = 1,0$ kg e comprimento $L = 0,75$ m, está apoiada em um banquinho, com altura $h = 0,40$ m, como mostra a figura 32. Sabendo que a distância $d = 0,30$ m, e supondo que a barra está parada e que só há atrito no ponto onde a barra encosta no chão, calcule:

    (a) As forças de contato (normal) entre a cadeira e a barra (N_1) e entre a barra e o chão (N_2).

    (b) Calcule a força de atrito com o chão.

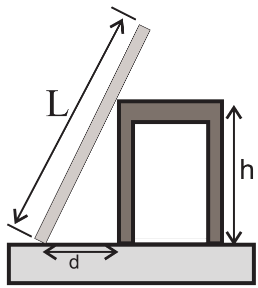


Figura 32: Esquema do exercício 57.

58. Na configuração da Figura 33, a barra tem peso 20 N e está submetida à ação de várias forças. Calcule a força R exercida pela articulação A sobre a barra.

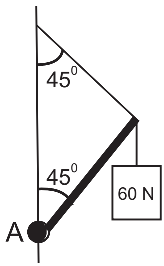


Figura 33: Esquema do exercício 58.

59. A figura 34 mostra uma roda de massa M e raio R sobre um superfície lisa, onde uma força horizontal é aplicada sobre ela.

    (a) Calcule F_1 para que a roda suba o degrau de altura $h < R$.

    Se uma força horizontal (designada agora por F_2) for aplicada no topo da roda, ela fica em repouso. Nesse caso pede-se:

(b) Qual será a força normal exercida pela superfície horizontal sobre a roda?

(c) Qual a componente horizontal da força exercida pela aresta do degrau sobre a roda?

(d) Qual a componente vertical da força exercida pela aresta do degrau na roda?

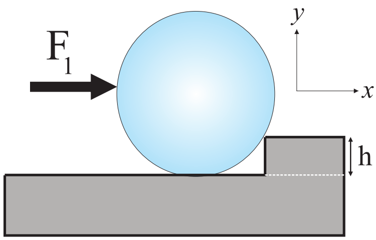


Figura 34: Roda subindo um degrau do exercício 59.

60. Considere uma barra homogênea, de comprimento L=3 m, massa M = 90 kg, e largura desprezível, mantida em equilíbrio suspensa por uma força F perpendicular à barra e aplicada a uma distância $d = 0,6$ m da extremidade. A outra extremidade se apoia no chão, dando uma inclinação $\theta = 27°$. Calcule

(a) A intensidade da força F e a força de atrito compatíveis com a situação;

(b) A intensidade da força de reação do solo (R) sobre a extremidade da barra.

2.6 O oscilador harmônico

61. Um bloco de massa M, capaz de deslizar com atrito desprezível sobre um trilho de ar horizontal, está preso a uma extremidade do trilho por uma mola de massa desprezível e

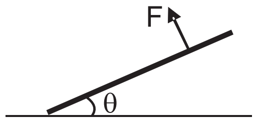


Figura 35: Esquema do exercício 60.

constante elástica k, inicialmente relaxada. Uma bolinha de chiclete de massa m, lançada em direção ao bloco com velocidade horizoltal v, atinge-o no instante t=0 e fica grudada nele. Ache a expressão do deslocamento x(t) do sistema para $t > 0$.

62. Uma partícula cuja massa é 0,50 kg move-se em um movimento harmônico simples. O período de oscilação é de 0,10 s e a amplitude do movimento é 0,10 m. Quando a partícula está a 0,050 m da posição de equilíbrio pede-se:

    (a) Qual é magnitude da força que age sobre a partícula?

    (b) Qual a sua energia cinética?

63. Uma partícula oscila em movimento harmônico simples com período $T = 2$ s. Inicialmente está na posição de equilíbrio com velocidade escalar de 4 m/s no sentido de x crescente. Escrever as expressões da sua posição x(t), da sua velocidade v(t) e da sua aceleração a(t). Represente graficamente essas funções.

64. A posição de uma partícula é dada por $x(t) = \sin 2t$, onde x está em metros e t em segundos.

    (a) Qual é o valor máximo de x? Qual é o primeiro instante depois de $t = 0$ s em que ocorre esse máximo?

    (b) Determine v(t). Qual é a velocidade em $t = 0$ s?

    (c) Determine a(t). Qual é a aceleração em $t = 0$ s?

(d) Qual é o valor máximo da aceleração?

65. Um corpo de massa 500 g executa um movimento harmônico simples com um período de 0,5 s. A sua energia total é de 5 J.

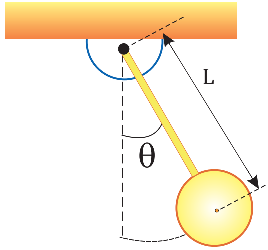
    (a) Qual é a amplitude das oscilações?
    (b) Qual é a velocidade máxima?
    (c) Qual é a aceleração máxima?

66. Uma partícula de 200 g está presa a uma mola de constante $\mathrm{k} = 5$ N/m e pode oscilar livremente sobre uma superfície horizontal sem atrito. Se a massa for deslocada de 5 cm da sua posição de equilíbrio determine:

    (a) O período do seu movimento;
    (b) A máxima velocidade da partícula;
    (c) A máxima aceleração da partícula.
    (d) Expresse o deslocamento, a velocidade e a aceleração da partícula como função do tempo.
    (e) Qual é a energia total do sistema?

67. Um pêndulo simples é formado por uma massa de 12 kg, puntiforme, suspensa no teto por um fio ideal de comprimento $\mathrm{L} = 2,5$ m. O pêndulo está inicialmente parado quando, em $\mathrm{t} = 1$ s, a massa recebe um impulso lateral que lhe confere uma velocidade horizontal inicial de 1 cm/s. Escreva a equação diferencial que descreve o movimento na aproximação de pequenas oscilações. Determine a posição angular $\theta(\mathrm{t})$, onde θ é o ângulo que o fio faz com a direção vertical. Sugestão: utilize $\theta(\mathrm{t}) = \theta_0 \sin(\omega \mathrm{t} + \varphi)$.

68. O **pêndulo físico** é constituído por uma esfera de raio r e massa m suspensa por um fio de comprimento L-r. A distância entre o centro da esfera e o ponto de suspensão *O* é igual a L. Muitas vezes, quando r é muito menor do que L, pode-se tratar o sistema como um pêndulo simples de comprimento L.



(a) Utilizando o teorema dos eixos paralelos, calcular o momento de inércia em relação ao ponto de suspensão.

(b) Escreva a equação de movimento do sistema e mostre que o período pode ser escrito como:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}\left(1 + \frac{2r^2}{5L^2}\right)} = T_\circ\sqrt{1 + \frac{2r^2}{5L^2}}$$

onde $T_\circ$ é o período de um pêndulo simples de comprimento L.

(c) Usando a aproximação $(1 + x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$, válida para $x << 1$, mostre que no caso $r << L$ o período pode ser aproximado por:

$$T = T_\circ\left\{1 + \frac{r^2}{5L^2}\right\}$$

(d) Para L=1 m e r=0,2 m, calcule o período do pêndulo.

69. A uma mola de massa desprezível e constante $k = 21$ N/m se encontra presa ao teto. Na sua extremidade livre é pendurado um bloco de 300 g e o sistema é abandonado sob a ação do peso da massa e da força da mola. O sistema oscila harmonicamente, sem movimento pendular.

(a) Qual é a elongação vertical (y_e) da mola, distância entre o ponto de equilíbrio da mola sem o bloco e do ponto de equilíbrio do sistema massa-mola?

(b) Qual é a frequência das oscilações? E a amplitude das oscilações?

(c) Escreva a equação do movimento e encontre y(t).

70. Uma barra homogênea de massa M e comprimento L, suspensa por uma de suas extremidades (pêndulo físico), é deslocada da sua posição de equilíbrio, de um ângulo inicial θ_0, e abandonada. Utilizando a aproximação de pequenas oscilações determine:

    (a) A frequência e o período do movimento;

    (b) A velocidade angular da barra ao passar pela posição de equilíbrio;

    (c) A posição angular do pêndulo físico em função do tempo.

    (d) Avalie as expressões encontradas nos itens anteriores assumindo que $\theta_0 = 0,1$ rad, M = 100 g e L = 15 cm.

71. Um disco homogêneo de raio R e massa M pode oscilar em torno de um eixo que passa pela sua borda. Determine seu período para pequenas oscilações e o comprimento do pêndulo simples equivalente.

72. Imagine um cilindro maciço, homogêneo, de massa m=0,2 kg, ligado a uma mola horizontal de massa nula, que pode rolar sem deslizar sobre uma superfície. A constante elástica da mola é $k = 3,0$ N/m. Desloca-se o cilindro até a posição em que a mola distende 0,25 m, soltando-o em seguida.

    (a) Mostre que, nessas condições, o centro de massa do cilindro executa movimento harmônico simples com período $T = 2\pi\left(\frac{3M}{2k}\right)^{1/2}$.

(b) Determine a frequência e a amplitude do movimento e escreva as expressões de x(t), v(t) e a(t).

(c) Analise o comportamento da força de atrito, mostrando que é oscilatória, e determine o valor mínimo do coeficiente de atrito estático que garanta que haja rolamento sem deslizamento;

(d) Calcule as energias cinéticas de rotação e translação do cilindro, quando ele passa pela posição de equilíbrio.

73. Um oscilador, com massa de 50 g e período 2,0 s, tem uma amplitude que decresce 5% em cada ciclo. Determine:

(a) A constante de amortecimento;

(b) A fração da energia dissipada em cada ciclo;

(c) O tempo necessário para que a amplitude de oscilação caia à metade do valor inicial.

74. O movimento de recuo de um canhão é amortecido sob o efeito de um sistema de molas imerso em óleo. A constante elástica do sistema de molas é $k = 7,0 \times 10^4$ N/m e a massa do canhão é 700 kg. Determinar o coeficiente ρ da força de resistência viscosa para que o cano do canhão volte à posição de equilíbrio o mais depressa possível, sem oscilar.

75. Um pêndulo simples oscila com período de 2 segundos e amplitude de 2°. Após dez oscilações completas a amplitude se reduz a 1,5°. Determine a constante de amortecimento γ.

76. Um corpo de massa $m = 0,5$ kg oscila sob a ação da força de uma mola, de constante elástica $k = 50,5$ N/m, e de uma força amortecedora $F = -dx/dt$. Sabendo-se que em $t = 0$ s o corpo é abandonado a uma distância x_0 da posição de equilíbrio,

(a) Determine x(t).

(b) Calcule a variação percentual de energia durante o primeiro ciclo de oscilação.

77. Um corpo de massa m = 50 g está preso a uma mola e oscila livremente com uma frequência angular de 20 rad/s. Este oscilador é posteriormemte colocado num meio cujo coeficiente de atrito viscoso é $\rho = 0,25$ kg/s. Nestas condições o oscilador é mantido em regime estacionário, devido a uma força externa $F = F_\circ \cos\omega t$ onde $F_\circ = 0,25$ N e $\omega = 20$ rad/s. Determine para esta última situação:

   (a) A equação diferencial que descreve o movimento. Escreva a equação explicitando os valores numéricos dos coeficientes indicando, também, suas respectivas unidades;

   (b) A amplitude do movimento;

   (c) Em que instantes a elongação é máxima em módulo.

   Subitamente, a força externa é desligada, num instante em que a elongação é máxima. Determine para a nova situação:

   (d) A equação diferencial que descreve o movimento, explicitando os valores numéricos dos coeficientes bem como suas respecitvas unidades;

   (e) A frequência angular de oscilação.

78. Um corpo de massa m = 50 kg está preso a mola horizontal de constante elástica $k = 1,125 \times 10^4$ N/m. Uma força harmônica de amplitude $f_{max} = 45$ N atua sobre o corpo ao longo da direção horizontal. Considerando-se a existência de atrito viscoso com o coeficiente $\rho = 100,0$ N · s/m determine para o regime estacionário:

   (a) A frequência de ressonância;

   (b) A amplitude máxima de ressonância;

(c) A defasagem entre o máximo da força harmônica e o máximo da amplitude.

79. Mostre que o valor médio da variação da energia no tempo de um oscilador amortecido forçado é nulo, ou seja, mostre que $\overline{\frac{dE}{dt}} = 0$.

80. Considere um sistema massa-mola imerso em um meio viscoso numa oscilação harmônica forçada. Determine:

(a) A potência média fornecida ao sistema massa-mola;

(b) A potência fornecida ao sistema quando há ressonância.

3 Sistema de massa variável: propulsão de um foguete

As considerações sobre o momento linear são úteis para analisarmos um sistema cuja massa pode variar com o tempo. Neste caso não podemos usar diretamente a segunda lei de Newton na forma $m\vec{a} = \vec{F}_{resultante}$ porque a massa m varia. Para ilustrar o comportamento de um sistema de massa variável vamos considerar o movimento de um foquete, que se move no espaço longe da ação de qualquer campo gravitacional, e onde não existe resistência do ar. O foguete é impulsionado para a frente pela ejeção para trás dos gases resultantes da queima do combustível que estava dentro do foguete. A força sobre o foguete, orientada para a frente (no sentido do eixo x), é a reação da força para trás exercida sobre o combustível ejetado. A massa total do sistema é constante, porém a massa do foguete vai diminuindo à medida que o material é ejetado. A figura 36 mostra o foguete em um instante t, quando a sua massa é m e a sua velocidade é $\vec{v} = v\hat{\imath}$, onde escolhemos o eixo Ox com o sentido positivo no mesmo sentido do movimento do foguete. Nesta situação, o momento inicial do sistema, $\vec{P}_i$, é dado por:

$$\vec{P}_i = mv\ \hat{\imath} \tag{1}$$

No instante $(t + \Delta t)$, o foguete com massa $m - |\Delta m|$ move-se com velocidade $\vec{v}_{foguete} = (v + \Delta v)\hat{\imath}$ e a massa de gás expelida pela combustão $|\Delta m|$ move-se com velocidade $\vec{v}_{gas} = (v + \Delta v - \mu_e)\hat{\imath}$ em relação ao sistema de coordenadas indicado (referencial inercial) sendo μ_e a velocidade de expulsão dos gases em relação ao foguete. Portanto, o momento do sistema no instante $(t + \Delta t)$ é dado por:

$$\begin{aligned}\vec{P}_f &= m_{foguete}\vec{v}_{foguete} + m_{gas}\vec{v}_{gas} \\ &= (m - |\Delta m|)(v + \Delta v)\hat{\imath} + |\Delta m|\,(v + \Delta v - \mu_e)\hat{\imath}\end{aligned} \tag{2}$$

De acordo com nossa hipótese inicial, o foguete e o combústivel constituem um sistema isolado, isto é, a força externa resultante

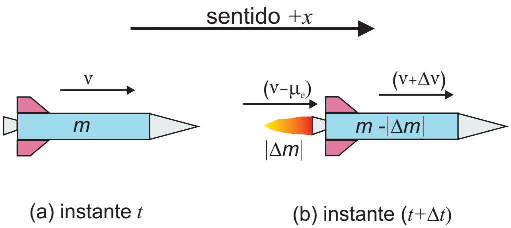


Figura 36: **(a)** O foguete movendo-se no espaço sideral, sendo m a sua massa e $\vec{v} = v\hat{\imath}$ o seu vetor velocidade no instante t. **(b)** No instante $(t + \Delta t)$, a massa do foguete é $m - |\Delta m|$ e a sua velocidade é $\vec{v}_{foguete} = (v + \Delta v)\ \hat{\imath}$; a massa de gás expelida pela combustão é $|\Delta m|$, e sua velocidade em relação ao sistema de coordenadas indicado (referencial inercial) é $\vec{v}_{gas} = (v + \Delta v - \mu_e)\ \hat{\imath}$.

é nula ($F_{externa} = 0$). Portanto, existe conservação do momento linear, ou seja:

$$\frac{d\vec{P}_{sistema}}{dt} = F_{externa} = 0 \Rightarrow \vec{P} \text{ se conserva.} \tag{3}$$

Logo, o momento do sistema deve ser o mesmo no instante t e no instante $(t + \Delta t)$: $\vec{P}_i = \vec{P}_f$. Igualando as equações 2 e 3 obtemos:

$$mv = (m - |\Delta m|)(v + \Delta v) + |\Delta m|\,(v + \Delta v - \mu_e) \tag{4}$$

Desenvolvendo a expressão 4 ficamos com:

$$m\Delta v - |\Delta m|\,\mu_e = 0 \tag{5}$$

Dividindo a expressão anterior por Δt e tomando o limite de Δt tendendo a zero podemos escrever:

$$m \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right) = \mu_e \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{|\Delta m|}{\Delta t}\right) \tag{6}$$

ou

$$m\frac{dv}{dt} = \mu_e \left|\frac{dm}{dt}\right| \tag{7}$$

A grandeza $\mu_e \left|\frac{dm}{dt}\right|$ é a força de propulsão do foguete. Desde que $\left(\frac{dm}{dt}\right)$ é negativo (pois o foguete está perdendo massa), podemos trocar

$$\mu_e \left|\frac{dm}{dt}\right| \longrightarrow -\left(\frac{dm}{dt}\right) \tag{8}$$

e a equação 7 fica:

$$\boxed{m\frac{dv}{dt} = -\mu_e \frac{dm}{dt}} \tag{9}$$

A equação 9 é conhecida como *equação do foguete.* Integrando-a obtemos:

$$\int_{v_f}^{v_i} dv = \int_{m_f}^{m_i} \frac{d}{m} \tag{10}$$

que resulta

$$v_f - v_i = -\mu_e \left[\ln m_f - \ln m_i\right] = +\mu_e \ln\left(\frac{m_i}{m_f}\right) \tag{11}$$

A equação 11 é a variação da velocidade do foguete em termos da velocidade escalar de ejeção dos gases de descarga e da razão entre a massa inicial e final do foguete. A massa do foguete sem qualquer combustível é demoninada **carga útil**. Na análise feita, imaginamos que o foguete se deslocava no espaço vazio sem campo gravitacional. Contudo quando um foguete é lançado da superfície de um planeta, devemos levar em conta a ação do campo gravitacional. Neste caso, calculando a variação do momento linear e igualando esta variação com o impulso temos:

$$\Delta\vec{P}_{sistema} = \vec{P}_f - \vec{P}_i = m\Delta\vec{v} - \mu_e \left|\Delta m\right| = \vec{F}_{externa}\Delta t \tag{12}$$

Dividindo a expressão anterior por Δt e tomando o limite de Δt tendendo a zero podemos escrever:

$$m \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right) = \mu_e \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{|\Delta m|}{\Delta t}\right) + F_{externa} \tag{13}$$

Quando o foguete se desloca nas vizinhanças da superfície da Terra, a força externa $F_{externa}$ é o peso do foguete.

3.1 Exercício resolvido

A massa inicial de um foguete é 20.000 kg, dos quais 20% é a carga útil. A taxa de queima do conbustível é 200 kg/s e os gases de descarga são ejetados a 2 km/s (em relação ao foguete). Determinar a força dce propulsão do foguete e a velocidade escalar final quando o combustível está todo gasto, admitindo que não existam forças externas.
Resolução: Os dados do exercício são:

- m_i =20.000 kg $= 20{\times}10^6$ g
- m_f =4.000 kg $= 4{\times}10^6$ g (carga útil)
- $\left|\dfrac{dm}{dt}\right| = 200$ kg/s $= 200 \times 10^3$ g/s
- $\mu_e = 2$ km/s $= 2000$ m/s

A força de propulsão é dada por:

$$\begin{aligned} F &= \mu_e \left|\frac{dm}{dt}\right| = (2000 \text{ m/s}) \times (200 \times 10^3 \text{ g/s}) \\ &= 4 \times 10^8 \text{ N} \end{aligned}$$

Utilizando a equação 11, podemos calcular a velocidade final. Admitindo que o foguete parta do repouso temos:

$$\begin{aligned} v_f &= +\mu_e \ln\left(\tfrac{m_i}{m_f}\right) \\ &= (2000 \text{ m/s}) \ln\left(\frac{20.000}{4.000}\right) = 2000 \ln 5 \approx 3,22 \text{ km/h} \end{aligned}$$

3.2 Exercício proposto

Um foguete está no espaço sideral, longe de qualquer planeta, quando então seu motor é acionado. Na primeira etapa da queima de combustível, o foguete ejeta $\frac{1}{120}$ da sua massa com uma velocidade relativa igual a 2400 m/s. Suponha que a massa útil do foguete seja $m = \frac{m_0}{4}$ e que o combustível seja consumido com uma taxa constante em um intervalo de tempo total de 90 s. Se o foguete parte do repouso em nosso sistema de coordenadas, calcule:

(a) Qual é a aceleração inicial do foguete? $[\mathrm{Resposta: a = 20\ m/s^2}]$

(b) Qual é a velocidade do foguete depois de 90 s de movimento? $[\mathrm{Resposta: v = 3327\ m/s}]$

(c) Qual é a velocidade do gás (no nosso sistema de coordenadas) quando t=90 s? $[\mathrm{Resposta: v_{gas} = 927\ m/s}]$

4 Resumo sobre oscilações forçadas amortecidas

A equação que descreve o movimento harmônico forçado é dada por:

$$m\ddot{x} + \rho\dot{x} + kx = F_0\cos(\omega t) \tag{14}$$

Dividindo a expressão anterior pela massa m obtemos:

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t) \tag{15}$$

onde definimos $\gamma = \rho/m$ e $\omega_0^2 = k/m$.

A solução geral da equação 14 é dada por:

$$x(t) = x_p(t) + x_h(t) \tag{16}$$

onde x_p é a solução particular (solução estacionária) e x_h é a solução da equação homogênea (solução transiente).

A solução homogêna pode ser:

1. **Subcrítico** ($\frac{\gamma}{2} < \omega_0$):

   $$x(t) = Ae^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(\omega t + \varphi)$$

   sendo $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$

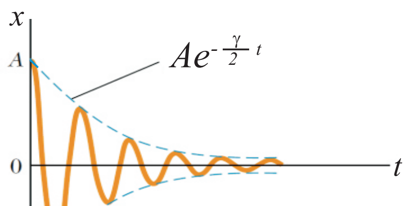


Gráfico do deslocamento em função do tempo para o movimento harmônico subcrítico, mostrando a envoltória A(t)=Aexp[(-γ/2)t].

2. **Crítico** ($\frac{\gamma}{2} = \omega_0$):

   $$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left[A + Bt\right]$$

3. **Supercrítico** ($\frac{\gamma}{2} > \omega_0$):

   $$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left[Ae^{\beta t} + Be^{-\beta t}\right] \quad \text{sendo} \quad \beta = \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}$$

As soluções homogêneas tendem a zero para $t \to \infty$, tornando-se desprezíveis para tempos maiores que T_d (o tempo de decaimento).

Por outro lado, a força externa continua suprindo energia ao sistema indefinidamente de modo que a oscilações forçadas devem persistir e para $t >> T_d$ vão sobreviver apenas as oscilações forçadas, correspondendo à solução particular da equação inomogênea.

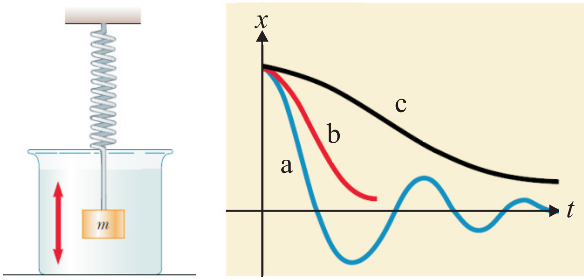


Figura 37: Gráfico do deslocamento em função do tempo para o movimento de oscilador com amortecimento: (a) subcrítico; (b) crítico e (c) supercrítico.

4.1 Forma trigonométrica de um número complexo

Um número complexo pode ser escrito como a soma de um número real e um número imaginário puro:

$$z = x + iy \tag{17}$$

O número complexo z pode ser representado geometricamente no plano complexo como um segmento orientado (vetor) da origem ao ponto (x, y). Podemos escrevê-lo em coordenadas polares utilizando as relações: $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$. Então teremos:

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta} \tag{18}$$

que é a forma trigonométrica do número complexo.

O módulo de z é dado por:

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{19}$$

e θ chama-se argumento de z, dado por:

$$\theta = \tan^{-1}(y/x) \tag{20}$$

4.2 Como achar a solução particular

Consideremos a equação 14 para uma função complexa:

$$\ddot{z} + \gamma\dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t} \tag{21}$$

e procuremos uma solução da forma:

$$z(t) = Ce^{i\omega t} \tag{22}$$

onde C é uma constante complexa arbitrária. Substituindo z(t), $\dot{z} = (i\omega)e^{i\omega t}$ e $\ddot{z} = (-\omega^2)e^{i\omega t}$ na Eq. 21 obtemos:

$$-\omega^2 Ce^{i\omega t} + \gamma(i\omega)Ce^{i\omega t} + \omega_0^2 Ce^{i\omega t} = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t} \tag{23}$$

Simplificando a expressão anterior temos:

$$C(-\omega^2 + \gamma(i\omega) + \omega_0^2) = \frac{F_0}{m} \tag{24}$$

ou

$$C = \frac{F_0/m}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\gamma\omega} \tag{25}$$

A constante complexa C é o quociente de dois números complexos:

$$C = \frac{z_1}{z_2} \tag{26}$$

onde

$$z_1 = \frac{F_0}{m} + i0 \tag{27}$$

e

$$z_2 = (\omega_0^2 - \omega^2) + i\gamma\omega \tag{28}$$

Podemos ainda reescrever o número complexo z_1 como:

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1} \tag{29}$$

onde

$$r_1 = \frac{F_0}{m} \tag{30}$$

e

$$\tan\theta_1 = 0 \;\Rightarrow\; \theta_1 = 0 \tag{31}$$

O número complexo z_2 pode ser escrito na forma

$$z_2 = r_2 e^{i\theta_2} \tag{32}$$

onde

$$r_2 = \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2) + (\gamma^2\omega^2)} \tag{33}$$

e

$$\tan\theta_2 = \frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \tag{34}$$

Com estas definições podemos reescrever a eq. 26 como:

$$C = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} = \frac{r_1}{r_2} e^{-i\theta_2} \tag{35}$$

uma vez que $\theta_1 = 0$. Substituindo os valores de r_1 (eq. 29) e r_2 (eq. 33) podemos reescrever a eq. 35 como:

$$C = \frac{(F_0/m)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma^2\omega^2)}} e^{-i\theta_2} = Ae^{i\varphi} \tag{36}$$

onde

$$A = \frac{(F_0/m)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma^2\omega^2)}} \tag{37}$$

$$\varphi = -\theta_2 = -\tan^{-1}\left[\frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)}\right] \tag{38}$$

Estamos interessados apenas na parte real de z, ou seja:

$$\mathrm{x(t) = Re(z(t)) = Re(Ae^{i\varphi}e^{i\omega t})} \tag{39}$$

$$\mathrm{x(t) = Re\,[A(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\omega t + i\sin\omega t)]}$$

$$\mathrm{x(t) = A(\cos\varphi\cos\omega t - \sin\varphi\sin\omega t)}$$

$$\mathrm{x_p(t) = A\,[\cos(\omega t - \varphi)]}$$

onde a constante A é dada pela expressão 37 e a fase pela expressão 38.

5 Solução do exercício 16

(a) Seja $\vec{p}_{1i}$ o momento da partícula incidente de massa m_1. Então o momento do sistema na configuração inicial é $\vec{P}_i = \vec{p}_{1i} = m_1\vec{v}_{1i}$. Se $\vec{p}_{1f}$ e $\vec{p}_{2f}$ são os momentos finais das duas partículas, o momento do sistema na configuração final é $\vec{P}_f = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f}$.

Por causa da conservação do momento, $\vec{P}_i = \vec{P}_f$, teremos:

$$\vec{p}_{1i} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f} \quad \Rightarrow \boxed{\vec{p}_{2f} = \vec{p}_{1i} - \vec{p}_{1f}} \tag{40}$$

Como estamos supondo a colisão elática, temos a conservação da energia:

$$\frac{p_{1i}^2}{2m_1} = \frac{p_{1f}^2}{2m_1} + \frac{p_{2f}^2}{2m_2} \quad \Rightarrow \boxed{\frac{p_{2f}^2}{m_2} = \frac{1}{m_1}\left(p_{1i}^2 - p_{1f}^2\right)} \tag{41}$$

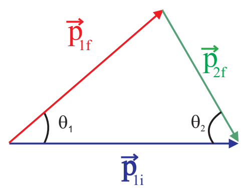
Elevando a expressão 40 ao quadrado obtemos:

$$\vec{p}_{2f} \cdot \vec{p}_{2f} = (\vec{p}_{1i} - \vec{p}_{1f}) \cdot (\vec{p}_{1i} - \vec{p}_{1f}) \tag{42}$$

Esta expressão ainda pode ser desenvolvida como:

$$p_{2f}^2 = p_{1i}^2 + p_{1f}^2 - 2\vec{p}_{1i} \cdot \vec{p}_{1f} \tag{43}$$

Por causa da conservação do momento, os vetores $\vec{p}_{1i}$, $\vec{p}_{1f}$ e $\vec{p}_{2f}$ estão dispostos como no triângulo representado na figura ao lado. O produto escalar do terceiro termo no lado direito da equação 43 pode ser escrito como $2\vec{p}_{1i} \cdot \vec{p}_{1f} = 2p_{1i}p_{1f}\cos\theta_1$. Desta forma, a expressão 43 pode ser reescrita como:



$$p_{2f}^2 = p_{1i}^2 + p_{1f}^2 - 2p_{1i}p_{1f}\cos\theta_1 \tag{44}$$

Substituindo a expressão 44 em 41 obtemos:

$$p_{1i}^2 + p_{1f}^2 - 2p_{1i}p_{1f}\cos\theta_1 = \lambda p_{1i}^2 - \lambda p_{1f}^2 \tag{45}$$

onde introduzimos o parâmetro adimensional

$$\lambda = \frac{m_2}{m_1}.$$

Os termos da expressão 45 podem ser reagrupados e obtemos a equação do segundo grau:

$$(1+\lambda)\mathrm{p}_{1\mathrm{f}}^2 - 2\mathrm{p}_{1\mathrm{i}}\cos\theta_1 \mathrm{p}_{1\mathrm{f}} + (1-\lambda)\mathrm{p}_{1\mathrm{i}}^2 = 0 \tag{46}$$

Para que esta equação do segundo grau tenha solução devemos ter que:

$$\Delta = 4\mathrm{p}_{1\mathrm{i}}^2\cos^2\theta_1 - 4(1+\lambda)(1-\lambda)\mathrm{p}_{1\mathrm{i}}^2 \geq 0 \tag{47}$$

ou

$$4\mathrm{p}_{1\mathrm{i}}^2[\cos^2\theta_1 - (1-\lambda^2)] \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \cos^2\theta_1 \geq (1-\lambda^2) \tag{48}$$

Em nosso problema, $\lambda = \frac{m_2}{m_1} = \frac{1}{4}$. Então, obtemos a condição:

$$\cos^2\theta_1 \geq \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2\right) \quad \Rightarrow \quad \cos^2\theta_1 \geq \frac{15}{16} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\theta_1 \leq 14,5^\circ}$$

(b) Como

- Energia cinética inicial da partícula α: $\mathrm{E}_\mathrm{c}^\alpha = \dfrac{\mathrm{p}_{1\mathrm{i}}^2}{4\mathrm{m}}$
- Energia cinética do neutron de recuo: $\mathrm{E}_\mathrm{c}^\mathrm{n} = \dfrac{\mathrm{p}_{2\mathrm{f}}^2}{\mathrm{m}}$

então para obtermos que fração da energia cinética incidente vai para o neutron, devemos escrever o momento linear final do neutron ($\mathrm{p}_{2\mathrm{f}}$) em função do momento linear inicial da partícula α ($\mathrm{p}_{1\mathrm{i}}$). Temos então que, para $\theta_1 = 14,5^\circ$, a solução da equação 46 é:

$$\mathrm{p}_{1\mathrm{f}} = \frac{4}{5}\mathrm{p}_{1\mathrm{i}}\sqrt{\frac{15}{16}} \tag{49}$$

Substituindo este resultado na equação 41, encontramos $\mathrm{p_{2f}}$ em função de $\mathrm{p_{1i}}$:

$$\mathrm{p_{2f}^2} = \frac{\mathrm{m_2}}{\mathrm{m_1}}[\mathrm{p_{1i}^2} - \frac{15}{25}\,\mathrm{p_{1i}^2}] \;\Rightarrow \mathrm{p_{2f}^2} = \frac{1}{10}\,\mathrm{p_{1i}^2} \tag{50}$$

Desse modo:

$$\boxed{\frac{\mathrm{E_c^n}}{\mathrm{E_c^\alpha}} = \frac{4\,\mathrm{p_{2f}^2}}{\mathrm{p_{1i}^2}} = \frac{4}{10} = 0,40}$$

Portanto, 40% da energia incidente vai para o neutron de recuo.

(c) Para obter o ângulo θ_2 entre a direção de recuo e a de incidência é melhor escrever as equações de conservação do momento linear nas direções x e y:

$$\text{direção x:} \qquad \mathrm{p_{1f}}\cos\theta_1 + \mathrm{p_{2f}}\cos\theta_2 = \mathrm{p_{1i}} \tag{51}$$

$$\text{direção y:} \qquad \mathrm{p_{1f}}\sin\theta_1 - \mathrm{p_{2f}}\sin\theta_2 = 0 \tag{52}$$

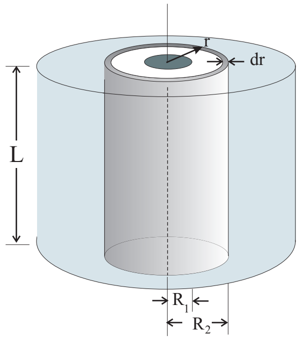
Da equação 51 temos que

$$\sin\theta_2 = \frac{\mathrm{p_{1f}}}{\mathrm{p_{2f}}}\,\sin\theta_1 \tag{53}$$

Substituindo os resultados obtidos da relação entre $\mathrm{p_{1f}}$ e $\mathrm{p_{2f}}$ com $\mathrm{p_{1i}}$, equações 49 e 50, na equação 53, e fazendo $\theta_1 = 14,5°$, temos

$$\boxed{\sin\theta_2 = \frac{\sqrt{150}}{20} \approx 0,61 \;\Rightarrow\; \theta_2 = 37,5°}$$

6 Solução do exercício 27



Escolhemos como elemento de volume uma casca cilíndrica fina de raio r, espessura dr e comprimento L. Todas as partes desse elemento de massa estão situadas a uma mesma distância do eixo do cilindro. O volume do elemento é aproximadamente igual ao volume de uma placa com comprimento L, espessura dr e largura 2πr (a circunferência da casca cilíndrica). Portanto

$$\mathrm{dm} = \rho \mathrm{dV} = \rho(2\pi \mathrm{rLdr}).$$

O momento de inércia é dado por

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} &= \int r^2 dm = \int_{R_1}^{R_2} r^2 \rho(2\pi r L dr) \\
&= 2\pi\rho L \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr \\
&= \frac{2\pi\rho L}{4}(R_2^4 - R_1^4) \\
&= \frac{\pi\rho L}{2}(R_2^2 - R_1^2)(R_2^2 + R_1^2)
\end{aligned}$$

Geralmente é mais conveniente expressar o momento de inércia em função da massa total M do corpo, que é a sua densidade ρ multiplicada pelo volume total V. O volume é

$$\mathrm{V} = \pi \mathrm{L}(\mathrm{R}_2^2 - \mathrm{R}_1^2),$$

de modo que a massa é

$$\mathrm{M} = \rho \mathrm{V} = \pi \mathrm{L} \rho(\mathrm{R}_2^2 - \mathrm{R}_1^2),$$

e o momento de inércia é

$$I = \frac{1}{2}M(R_2^2 + R_1^2).$$

No caso de um cilindro maciço, temos $R_1 = 0$. Chamando o raio externo R_2 simplesmente de R, verificamos que o momento de inércia de um cilindro maciço de raio R é dado por

$$I = \frac{1}{2}MR^2.$$

Caso o cilindro possua uma parede muito fina (como um tubo), $R_1 \approx R_2$; se designarmos por R o raio comum, obtemos

$$I = MR^2.$$

7 Respostas dos exercícios

7.1 Sistemas de partículas: conservação do momento linear

1. (a) $\vec{R}_{CM} = \frac{16}{15}\,\hat{\imath} + \frac{20}{15}\,\hat{\jmath}$ (m);

   (b) $\vec{R}_{CM} = \frac{5}{6}\,\hat{\imath} + \frac{3}{6}\,\hat{\jmath} + \frac{1}{6}\,\hat{k}\ (m)$;

   (c) $\vec{R}_{CM} = -\frac{1}{4}\,\hat{\imath}$ (m).

2. (a) $\vec{R}_{CM}(t) = \left[\frac{1}{4}\,t^2 + \frac{3}{2}\right]\hat{\imath} + \left[-\frac{3}{16}\,t^2 + \frac{15}{8}\right]\hat{\jmath}$ (m);

   (b) $\vec{P} = 8t\ \hat{\imath} - 6t\ \hat{\jmath}$ (kg · m/s).

3. (a) $\vec{V}_{avião} = \vec{V}_{CM} = 75\ \hat{\imath} + 12,5\ \hat{\jmath}$ (m/s);

   (b) $\vec{P} = 6 \times 10^5\ \hat{\imath}\ +\ 1 \times 10^5\ \hat{\jmath}$ (kg · m/s).

4. (a) $E_c = 64,0$ J e $\vec{V}_{CM} = 3,5\ \hat{\imath}$ (m/s);

   (b) $\vec{u}_1 = 1,5\ \hat{\imath}$ (m/s) e $\vec{u}_2 = -2,5\ \hat{\imath}$ (m/s);

   (c) $E_{rel} = 15,0$ J.

   (d) $E_{CM} = 49,0$ J.

5. (a) $\vec{v}_2 = 6,0\ \hat{\imath} - 4,0\ \hat{\jmath}$ (m/s);

   (b) $\vec{V}_{CM} = 4,0\ \hat{\imath}$ (m/s).

6. (a) $x_2 = 120\sqrt{3}$ m;

   (b) $\Delta E = +7200,0$ J.

7. (a) $D = 4,5$ m;

   (b) A energia mecânica não se conserva, pois a energia cinética inicial é nula e a energia cinética final é diferente de zero, sendo que a energia potencial não se altera. A energia cinética final é igual a 9,45 J.

8. O remador não consegue alcançar a estaca. Faltam 20 cm.

9. (a) $\vec{\mathrm{v}} = +1,88\ \hat{\imath}$ (m/s);
   (b) $\vec{\mathrm{v}}_\mathrm{c} = +1,50\ \hat{\imath}$ (m/s);
   (c) $\vec{\mathrm{v}}_\mathrm{c} = +1,13\ \hat{\imath}$ (m/s);

10. (a) $\vec{\mathrm{v}}_\mathrm{r} = -6\ \hat{\imath}$ (m/s);
    (b) $\vec{\mathrm{I}} = -12\ \hat{\imath}$ $(\mathrm{N} \cdot \mathrm{s})$;
    (c) $\vec{\mathrm{F}} = -240\ \hat{\imath}$ (N).

11. (a) $\vec{\mathrm{v}} = -3\ \hat{\imath}$ (m/s);
    (b) $\Delta\mathrm{s} = 64,3$ cm.

7.2 Sistema de partículas: colisões

12. (a) $\mathrm{H} = 45,0$ cm ; (b) $\mathrm{h} = 11,5$ cm.

13. $\mathrm{H} = 4$ m.

14. (a) $\mathrm{v}_\mathrm{bala} \approx 95$ m/s.
    (b) 98% da energia mecânica inicial se perde na colisão.

15. (a) $\mathrm{v}_{1\mathrm{f}} = 3$ m/s e $\mathrm{v}_{2\mathrm{f}} = 8$ m/s.
    (b) A energia transferida é de 32 J.

16. Resolução na página 55 da apostila.

    (a) $\theta_1 = 14,5°$;
    (b) $\dfrac{\mathrm{E}_\mathrm{c}^\mathrm{n}}{\mathrm{E}_\mathrm{c}^\alpha} = 0,4$; (c) $\theta_2 \approx 37,5°$

17. $\mathrm{v}_\mathrm{f} \approx 61$ km/h.

18. $\vec{\mathrm{v}}_\mathrm{CM} = \dfrac{1}{4}\,[25\ \hat{\imath} + 50\ \hat{\jmath}]$ (m/s).
    O carro foi arrastado em uma direção que faz um ângulo $\theta \approx 63,4°$ com o eixo x, por uma distância de 19,53 m.

19. $v_{1f} = 5\sqrt{3}$ m/s, $v_{2f} = 5$ m/s e $\theta_2 = 60°$.

20. (a) $\vec{v}_{2f} = 4\,\hat{\imath} - 3\,\hat{\jmath}$ (m/s).

    (b) Choque inelástico. A variação da energia cinética foi $\Delta E_c = +12$ J.

21. (a) $\vec{v}_{bloco} = 2,68\ \hat{\imath}$ (m/s).

    (b) $\vec{v}_{bala} = 1432\ \hat{\imath}$ (m/s).

22. (a) $W = +4$ J.

    (b) Depois da colisão a velocidade da bola é $v_{bola} = -2,4$ m/s e a do bloco é $v_{bloco} = +1,6$ m/s.

    (c) $H = 28,8$ cm. (d) $\Delta s = 80$ cm.

7.3 Cinemática e dinânica do movimento de corpos rígidos

23. (a) Partículas nas posições $x_1 = \pm 0,2$ m $\Rightarrow v_1 = 0,4$ m/s.
    Partículas nas posições $x_2 = \pm 0,4$ m $\Rightarrow v_2 = 0,8$ m/s.

    (b) Energia cinética do sistema $\Rightarrow E_c = 1,12$ J.

    (c) Momento de inércia do sistema $\Rightarrow I = 0,56$ kg $\cdot$ m^2.

24. (a) $I_y = 2ma^2$ e $E_c = ma^2\omega^2$.

    (b) $I_z = 2m(a^2 + b^2)$ e $E_c = (a^2 + b^2)m\omega^2$.

25. $I_z = \dfrac{1}{12}ML^2$ e $I_{z'} = \dfrac{1}{3}ML^2$

26. $I = \dfrac{1}{2}MR^2$

27. No cilindro vazado a massa M está distribuída em uma distância média maior, em relação ao eixo. Resolução na página 56 da apostila.

28. $\mathrm{I_z} = \dfrac{1}{2}\mathrm{M}(\mathrm{R}_1^2 + \mathrm{R}_2^2)$

29. (a) $\vec{\tau} = -2,4\,\hat{k}$ (N · m);

(b) $\vec{\alpha}(\mathrm{t}) = -\dfrac{200}{3}\,\hat{k}$ (rad/s^2);

(c) $\vec{\omega}(3) = -200\,\hat{k}$ (rad/s) e $\mathrm{E_c} = 720$ J;

(d) $\Delta\vec{\theta}_{0\to 3} = -300\,\hat{k}$ (rad) e $\mathrm{W} = \vec{\tau}\cdot\Delta\vec{\theta} = 720$ J.

30. (a) $\vec{\tau}_{\mathrm{R}} = -1,56\,\hat{k}$ (N · m);

(b) $\vec{\alpha} = -108,33\,\hat{k}$ (rad/s^2);

(c) $\vec{\omega}(\mathrm{t}) = -(4 + 108,33\,\mathrm{t})\,\hat{k}$ (rad/s);

(d) $\mathrm{E_c} = 779,3$ J;

(e) $\Delta\vec{\theta}_{0\to 3} = -499,5\,\hat{k}$ (rad) e $\mathrm{W} = \vec{\tau}\cdot\Delta\vec{\theta} = 779,3$ J.

31. (a) $\vec{\mathrm{a}}_{\mathrm{CM}}(\mathrm{t}) = +0,2\;\hat{\imath}$ (m/s^2);
$\vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{CM}}(\mathrm{t}) = +0,2\,\mathrm{t}\;\hat{\imath}$ (m/s);
$\vec{\mathrm{r}}_{\mathrm{CM}}(\mathrm{t}) = +0,1\,\mathrm{t}^2\;\hat{\imath}$ (m).

(b) $\vec{\alpha}(\mathrm{t}) = +\dfrac{10}{3}\;\hat{k}$ (rad/s^2);

$\vec{\omega}(\mathrm{t}) = +\dfrac{10}{3}\,\mathrm{t}\;\hat{k}$ (rad/s);

$\vec{\theta}(\mathrm{t}) = +\dfrac{10}{6}\,\mathrm{t}^2\;\hat{k}$ (rad).

(c) O cilindro dará 6,63 voltas.

(d) $\mathrm{E_c} = 2550$ J.

32. (a) $\mathrm{E_c} = 13,16$ J.

(b) $\vec{\alpha} = -7,33\,\hat{k}$ (rad/s^2).

(c) $\vec{\tau} = -0,036\,\hat{k}$ (N · m).

(d) $\mathrm{W} = -13,16$ J.

33. (a) $\mathrm{m}_2 = 8$ kg.

(b) $\vec{\alpha} = 0,84\,\hat{k}$ (rad/s^2), $\mathrm{T_1} = 347,9$ N e $\mathrm{T_2} = 88,1$ N.

34. (a) $\mathrm{T_1} = 120,3$ N e $\mathrm{T_2} = 160,0$ N.

(b) $\mathrm{I} = 1,25\ \mathrm{kg \cdot m^2}$.

35. (a) $\mathrm{a} = \dfrac{\mathrm{m_2 g}}{\mathrm{m_1 + m_2 + M/2}}$;

$$\mathrm{T_1} = \frac{\mathrm{m_1 m_2 g}}{\mathrm{m_1 + m_2 + M/2}} \quad \text{e}$$

$$\mathrm{T_2} = \mathrm{m_2 g}\left[\frac{\mathrm{m_1 + M/2}}{\mathrm{m_1 + m_2 + M/2}}\right]$$

(b) $\tau = \mathrm{m_2 g R}$, saindo ou entrando na página;

(c) $\mathrm{L} = (\mathrm{m_1 + m_2 + M/2})\,\mathrm{v\,R}$, na mesma direção e no mesmo sentido do torque.

36. (a) $\mathrm{v} = \left[\dfrac{2(\mathrm{m_2 - m_1})\mathrm{gh}}{\mathrm{m_1 + m_2 + M/2}}\right]^{1/2} = 2,76$ (m/s) e

$\omega = 27,6$ rad/s.

(b) $\mathrm{T_1} = 238$ N e $\mathrm{T_2} = 243$ N.

(c) t=1,45 s.

7.4 Momento angular, sua conservação e aplicações

37. $\vec{\ell}_0 = -\mathrm{mvb}\,\hat{k}$ e $\vec{\ell}_{0'} = \mathrm{mvb'}\,\hat{k}$

38. (a) O torque é nulo.

(b) $\vec{\ell}_{\mathrm{o}} = +\mathrm{mvR}\,\hat{k} = \mathrm{mR^2}\omega\,\hat{k}$;

39. (a) $\delta\ell = 0,60$ m.

(b) $\omega_{\mathrm{f}}/\omega_{\mathrm{i}} = 2,04$.

40. (a) $\left|\vec{\mathrm{L}}\right| = 420\ \mathrm{kg \cdot m^2/s}$ (direção perpendicular ao chão).

(b) $|\vec{\omega}| = 7,14$ rad/s (mesma direção e sentido de L).

(c) $\mathrm{E_c^a} = \mathrm{E_c^d} = 1500$ J (se conserva).

41. (a) $\omega_\mathrm{f} = \left[\dfrac{\mathrm{I_1}}{\mathrm{I_1 + I_2}}\right]\omega_1$

(b) A energia cinética do sistema diminui: $\mathrm{E_f} = \left[\dfrac{\mathrm{I_1}}{\mathrm{I_1 + I_2}}\right]\mathrm{E_i}$.

42. $\mathrm{t} = 2,2$ s.

43. (a) $\vec{\mathrm{R}}_\mathrm{CM}(\mathrm{t}) = \dfrac{1}{3}\mathrm{v_0 t}\ \hat{\imath} + \dfrac{\mathrm{L}}{3}\ \hat{\jmath} = \mathrm{t}\ \hat{\imath} + 0,1\ \hat{\jmath}$ (m).

(b) $\vec{\mathrm{V}}_\mathrm{CM}(\mathrm{t}) = \dfrac{1}{3}\mathrm{v_0}\ \hat{\imath} = 1\ \hat{\imath}$ (m/s).

(c) $\vec{\omega} = \dfrac{\mathrm{v_0}}{\mathrm{2L}}\,\hat{k} = 5\,\hat{k}$ (rad/s).

(d) 50% da energia inicial foi perdida na colisão.

44. (a) $\omega = \dfrac{\mathrm{2mv}}{\mathrm{MR}}$;

(b) $\dfrac{\mathrm{E_f}}{\mathrm{E_i}} = \dfrac{\mathrm{2m}}{\mathrm{M}}$ e a fração da energia cinética inicial perdida na colisão é $\mathrm{f} = \left(\dfrac{\mathrm{2m}}{\mathrm{M}} - 1\right)$

45. $\omega = \sqrt{\dfrac{\mathrm{3g}}{\mathrm{L}}}$.

46. $\mathrm{v} = \left[\dfrac{\mathrm{2gh(m_2 - m_1}\sin\theta\,)}{\mathrm{m_1 + m_2 + M/2}}\right]^{1/2}$

47. (a) $\mathrm{T} = \dfrac{\mathrm{Mg}}{3}$.

(b) $\mathrm{a} = \dfrac{2}{3}\mathrm{g}$.

(c) $\mathrm{v} = \left[\dfrac{4}{3}\mathrm{g\,h}\right]^{1/2}$.

48. (a) $h = R + \dfrac{3v^2}{4g}$. (b) $F_{at} = \dfrac{M\,g\sin\theta}{3}$

49. (a) $t = \dfrac{10}{21}$ s.

(b) $D = 2,04$ m.

50. (a) $\tau = 1,93 \times 10^{-2}$ N $\cdot$ m; (b) $E_{rot} = 1,2$ J.

51. (a) $\theta \approx 54°$.

(b) $v = \left[\dfrac{10}{17}\,g\,(R+r)\right]^{1/2}$.

52. (a) $\vec{\omega}_0 = \dfrac{5}{3}\dfrac{v_0}{R}\,\hat{k} = 200\,\hat{k}$ (rad/s).

(b) $\vec{v}_r = \dfrac{5}{21}\,v_0\,\hat{\imath} = \dfrac{5}{7}\,\hat{\imath} = 0,714\,\hat{\imath}$ (m/s) e

$\vec{\omega}_r = -\dfrac{5}{21}\,Rv_0\,\hat{k} = -\dfrac{1}{56}\,\hat{k} = -0,018\,\hat{k}$ (rad/s)

(c) $E_c^i = \dfrac{19}{18}\,mv_0^2 = \dfrac{133}{40} = 3,325$ J.

(d) $W_{at} = -\dfrac{64}{63}\,mv_0^2 = -\dfrac{16}{5} = -3,200$ J.

7.5 Corpo rígido em equilíbrio

53. (a) $T = 55,85$ N.

(b) O vetor força na articulação é $\vec{A} = 52,48\,\hat{\imath} + 100,90\,\hat{\jmath}$ (N).

(c) $\alpha = \dfrac{3g}{4L}$.

(d) $\omega^2 = \dfrac{3g\sqrt{3}}{2L}$.

54. $N_1 = 117$ N e $N_2 = 333$ N.

55. (a) As intensidades das forças são:

- Entre a parede e a tábua: $N_1 = 75$ N;
- Entre o chão e a tábua: $N_2 = 220$ N e $F_{at} = 75$ N.

(b) $r = 1,175 > 1$, ou seja, pode subir, sobre a escada, uma distância de até $D = 1,175\,L = 4,7$ m. Este resultado significa que o macaco pode subir até o topo da escada que ela não deslizará.

(c) $\mu_e^{mín} = 0,341 \Rightarrow r = \frac{1}{2} \Rightarrow$ o macaco não pode se mexer, senão a escada escorrega.

$\mu_e^{máx} = 0,481 \Rightarrow r = 1 \Rightarrow$ o macaco pode subir exatamente até o topo da escada, sem que ela escorregue.

56. (a) $T_1 = 80$ N, $T_2 = 160$ N e o vetor força na articulação é $\vec{A} = 80\sqrt{3}\,\hat{\imath} = 138,6\,\hat{\imath}$ (N).

(b) $\vec{F}_B = -\vec{A} = -80\sqrt{3}\,\hat{\imath} = -138,6\,\hat{\imath}$ (N).

57. (a) $N_1 = 4,5$ N e

(b) $N_2 = 7,3$ N.

(c) $F_{at} = 3,6$ N.

58. $R_x = 35$ N e $R_y = 45$ N.

59. (a) $\vec{F}_1 > \dfrac{Mg\sqrt{2RH - H^2}}{R - H}\,\hat{\imath}$

(b) $\vec{N} = \left[Mg - \dfrac{F_2\sqrt{2R - H}}{H}\right]\hat{\jmath}$

(c) $\vec{N}_H = -F_2\,\hat{\imath}$

(d) $\vec{N}_V = \dfrac{F_2\sqrt{2R - H}}{H}\,\hat{\jmath}$

60. (a) $F = 501,2$ N e $F_{at} = 227,5$ N.

(b) $R = 507,3$ N.

7.6 O oscilador harmônico

61. $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$ onde $A = \dfrac{mv}{(m+M)\,\omega_0}$,

$\omega_0 = \sqrt{k/(m+M)}$ e $\varphi = -\pi/2$.

62. (a) $F = 10\pi^2$ N; (b) $E = 0,75\pi^2$ J.

63. $x(t) = \frac{4}{\pi}\cos(\pi t - \pi/2)$;

$v(t) = -4\sin(\pi t - \pi/2)$;

$a(t) = -4\pi\cos(\pi t - \pi/2)$.

64. (a) $x_{\text{máx}} = 1$ m e ocorre em $t = \pi/4$ s.

(b) $v(t) = 2\cos(2t)$ e $v(t=0) = 2$ m/s.

(c) $a(t) = -4\sin(2t)$ e $a(t=0) = 0$.

(d) A aceleração é máxima para $t = \dfrac{(2n+1)\pi}{4}$ s,

onde n=inteiro, e seu valor em módulo é $a = 4$ m/s^2.

65. (a) $A = \dfrac{\sqrt{5}}{2\pi}$ m.

(b) $v_{\text{máx}} = 2\sqrt{5}$ m/s.

(c) $a_{\text{máx}} = 8\sqrt{5}\,\pi$ m/s^2.

66. (a) $T = 0,4\pi$ s.

(b) $v_{\text{máx}} = 0,25$ m/s.

(c) $a_{\text{máx}} = 1,25$ m/s^2.

(d) Em unidades no SI:

- $x(t) = 0,05\cos(5t)$;
- $v(t) = -0,25\sin(5t)$;
- $a(t) = -1,25\cos(5t)$.

(e) $E = 62,5 \times 10^{-4}$ J.

67. $\theta(t) = 0,002\sin(2t - 2)$.

68. (a) $I_O = mL^2\left[1 + \frac{2r^2}{5L^2}\right]$.

(b) Equação: $I_0\,\frac{d^2\theta}{dt^2} + mgL\sin\theta = 0$.

(c) O período do pêndulo será: $T = T_0\,(1 + 8\times 10^{-3})$ s.

69. (a) $y_e = \frac{mg}{k} = \frac{1}{7}$ (m).

(b) $\omega_0^2 = \frac{k}{m} = 70\ s^{-2} \rightarrow \omega_0 \approx 8,4\ s^{-1}$ e $A = y_e = \frac{1}{7}$ (m).

(c) $y(t) = \frac{mg}{k}\,[1 + \cos(\omega_0\,t)] = \frac{1}{7}\left[1 + \cos(\sqrt{70}\ t)\right]$ (m).

70. (a) $\omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{2L}}$ e $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}$.

(b) $\omega = -\theta_0\omega_0 = -\theta_0\sqrt{\frac{3g}{2L}}$.

(c) $\theta(t) = \theta_0\cos(\omega_0\,t) = \theta_0\cos\left[\sqrt{\frac{3g}{2L}}\,t\right]$.

(d) $\omega_0 = 10$ rad/s; $T = \frac{\pi}{5}$ s; $\omega = 1$ rad/s
e $\theta(t) = 0,1\cos(10t)$.

71. $T = 2\pi\sqrt{\frac{3R}{2g}}$ e $L_{eq} = \frac{3}{2}R$.

72. (b) $\omega_0 = \sqrt{10}$ rad/s e $A = 0,25$m;

- $x(t) = 0,25\cos(\sqrt{10}\,t)$ (m)
- $\dot{x}(t) = -0,25\sqrt{10}\sin(\sqrt{10}\,t)$ (m/s)
- $\ddot{x}(t) = -2,5\cos(\sqrt{10}\,t)$ (m/s^2)

(c) $\mu_e^{\text{mín}} = 0,125$;

(d) $E_r = \dfrac{1}{32}$ J e $E_t = \dfrac{2}{32}$ J.

73. (a) $\rho = 2,565$ g/s

(b) $\dfrac{\Delta E}{E} = 9,75\%$. (c) $t = 27$ s.

74. $\rho = 1,4 \times 10^4$ N $\cdot$ s/m.

75. $\gamma = 0,0288$ s^{-1}.

76. (a) $x(t) = Ae^{-t}\cos(10t + \varphi)$ onde $\varphi = 5,73°$ e $A = \frac{x_0}{\cos\varphi}$

(b) $\dfrac{\Delta E}{E} = -0,72 \Rightarrow 72\%$.

77. (a) $\ddot{x} + 5\dot{x} + 400x = 5\cos(20t)$

(b) $A = 0,05$ m

(c) $t = \frac{(2n+1)}{20}\frac{\pi}{2}$ s

(d) $\ddot{x} + 5\dot{x} + 400x = 0$

(e) $\omega = 19,84$ s^{-1}

78. (a) $\omega_R = 14,93$ s^{-1}

(b) $A_R = 0,03$ m (c) $\varphi \approx 86,2°$

79. A expressão que descreve a variação da energia total em função do tempo é: $\dfrac{dE}{dt} = \dot{x}\,[m\ddot{x} + kx]$. Como

$$x(t) = A(\omega)\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\dot{x}(t) = -\omega A(\omega)\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t)\,,$$

substituindo estas equações na expressão de $\frac{dE}{dt}$, temos:

$$\frac{dE}{dt} = A^2 m\,\omega(\omega^2 - \omega_0^2)\sin[2(\omega t + \varphi)] \;\Rightarrow\; \overline{\frac{dE}{dt}} = 0.$$

80. (a) $\bar{\mathrm{P}}(\omega) = \dfrac{\gamma \mathrm{F}_0^2}{2\mathrm{m}} \, \dfrac{\omega^2}{\left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2\right]}$.

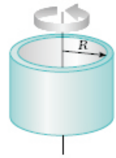
(b) Na ressonância $\omega_{\mathrm{R}} = \omega_0$ e $\bar{\mathrm{P}}(\omega) = \dfrac{\mathrm{F}_0^2}{2\mathrm{m}\gamma}$

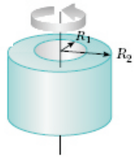
8 Tabela de momentos de inércia

Momentos de inércia de corpos homogêneos de várias formas

a) Cilindro oco com paredes finas

$$I = MR^2$$



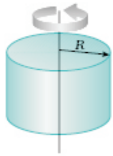


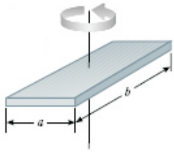
b) Cilindro oco

$$I = \frac{M(R_1^2 + R_2^2)}{2}$$

c) Cilindro maciço

$$I = \frac{MR^2}{2}$$



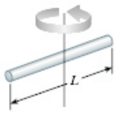


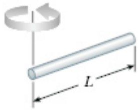
d) Placa retangular

$$I = \frac{M(a^2 + b^2)}{12}$$

e) Barra delgada

$$I = \frac{ML^2}{12}$$



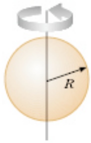


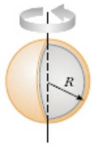
f) Barra delgada

$$I = \frac{ML^2}{3}$$

g) Esfera maciça

$$I = \frac{2MR^2}{5}$$





h) Casca esférica

$$I = \frac{2MR^2}{3}$$