* Solução formal da Equação de Poisson através do método da Função de Green.

Vamos considerar uma equação diferencial do tipo (1D):

$$\hat{D}_x \cdot f(x) = g(x)$$

Temos que calcular — Dado

Ex: * $\hat{D}_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$

* $\hat{D}_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2}{x}\frac{\partial}{\partial x}$

* $\hat{D}_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + e^{-x}\frac{\partial}{\partial x}$

$\vdots$

Como calcular $f(x)$?

Método da Função de Green

* Encontramos a função $G(x,x')$, tal que

$$\hat{D}_x G(x,x') = \delta^{(1)}(x-x')$$

* A função $f(x)$ é dada por:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \, G(x,x') \, g(x')$$

* Prova:

$$\hat{D}_x f(x) = \hat{D}_x \int_{-\infty}^{\infty} dx' \, G(x,x') \, g(x') = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \overbrace{\left[\hat{D}_x G(x,x')\right]}^{\delta(x-x')} \cdot g(x') = g(x)$$

É claro que pode ser ~~muito~~ complicado encontrar essa tal função $G(r, r')$ [NA VERDADE, NÃO É!], mas no nosso caso nós já temos a resposta!

A equação de Poisson em 3D é:

$$\nabla^2 \varphi(\vec{r}) = \frac{-1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r})$$

Qual a função $G(\vec{r}, \vec{r}')$ tal que

$$\nabla_r^2 G(\vec{r}, \vec{r}') = \vec{\nabla} \cdot \underbrace{\left[\vec{\nabla} G(\vec{r}, \vec{r}')\right]}_{\frac{1}{4\pi} \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}} = \delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}') \; ?$$

Portanto, é fácil ver que:

$$\boxed{G(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}} \Longrightarrow \boxed{\nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r}-\vec{r}')}$$

FUNÇÃO DE GREEN DO LAPLACIANO

Assim, a solução "formal" da Equação de Poisson é:

$$\varphi(\vec{r}) = \int dV' \, G(\vec{r}, \vec{r}') \times \left[-\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}')\right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

OK!

<u>Questão</u>: a função de Green encontrada acima, para o operador Laplaciano, é <u>única</u>?... (NÃO!)