IF – 430270– Eletricidade e Magnetismo I

Energia potencial elétrica

Já tratamos de energia em diversos aspectos: energia cinética, gravitacional, energia potencial elástica e energia térmica. A seguir vamos adicionar a ***energia potencial elétrica*** a esta lista. Vamos investigar como esta forma de energia se relaciona com o campo elétrico.

Trabalho realizado pela força coulombiana

Nas aulas anteriores introduzimos o campo elétrico e a força que ele exerce sobre uma partícula carregada, com carga *q*:

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

Força exercida sobre a partícula com carga *q*

Campo elétrico

A força é função somente da posição e similar em forma à força gravitacional. Analogamente, a força coulombiana é conservativa e um sistema de partículas carregadas e o campo elétrico possuem uma energia potencial ***elétrica***.

Se uma carga é liberada, a força elétrica causa sua aceleração e consequente ganho de energia cinética, às custas da energia potencial elétrica do sistema.

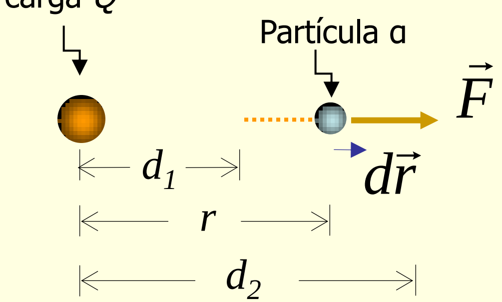
Energia potencial elétrica

Já tratamos de energia em diversos aspectos: energia cinética, gravitacional, energia potencial elástica e energia térmica. A seguir vamos adicionar a ***energia potencial elétrica*** a esta lista. Vamos investigar como esta forma de energia se relaciona com o campo elétrico.

Trabalho realizado pela força coulombiana

Exemplo

Certo núcleo com carga $Q = 1{,}3\text{x}10^{-17}\ C$ está separado de uma partícula alfa (α) por uma distância $d_1 = 9{,}1\text{x}10^{-15}\ m$. Suponha que a partícula α possa se mover, enquanto que o núcleo está fixo. Calcule o trabalho realizado sobre a partícula α, quando ela se desloca para uma nova posição distante $d_2 = 2d_1$ do núcleo. Calcule a velocidade da partícula α, supondo que estava inicialmente em repouso.



Respostas:

Trabalho realizado $= W = 2{,}1\text{x}10^{-12}\ J$

Velocidade final $= v_f = 2{,}5\text{x}10^{7}\ m/s$

A carga da partícula α é $q = 3{,}2\text{x}10^{-19}\ C$ e sua massa é $m = 6{,}6\text{x}10^{-27}\ kg$.

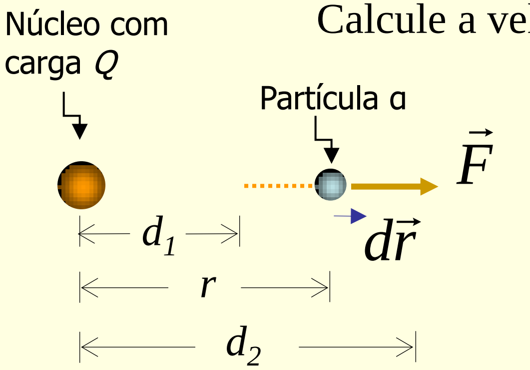
Energia potencial elétrica

Já tratamos de energia em diversos aspectos: energia cinética, gravitacional, energia potencial elástica e energia térmica. A seguir vamos adicionar a ***energia potencial elétrica*** a esta lista. Vamos investigar como esta forma de energia se relaciona com o campo elétrico.

Trabalho realizado pela força coulombiana

Exemplo

Certo núcleo com carga Q = 1,3x10^{-17} C está separado de uma partícula alfa (α) por uma distância d_1 = 9,1x10^{-15} m . Suponha que a partícula α possa se mover, enquanto que o núcleo está fixo. Calcule o trabalho realizado sobre a partícula α, quando ela se desloca para uma nova posição distante $d_2 = 2d_1$ do núcleo. Calcule a velocidade da partícula α, supondo que estava inicialmente em repouso.



A carga da partícula α é q = 3,2x10^{-19} C.

Procedimento

O trabalho realizado (W) é obtido por:

$$W = \int_{d_1}^{d_2} \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{d_2} + \frac{1}{d_1}\right)$$

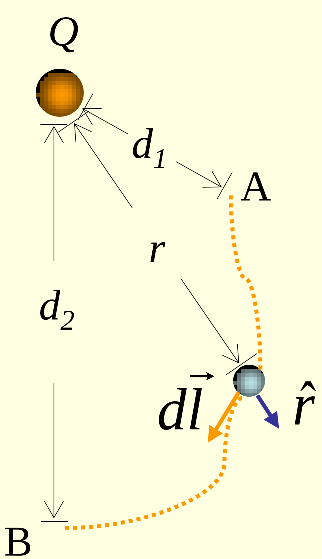
E a velocidade final por: $\frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 = W$

IF – 430270– Eletricidade e Magnetismo I

Trabalho realizado pela força – conservativa – coulombiana

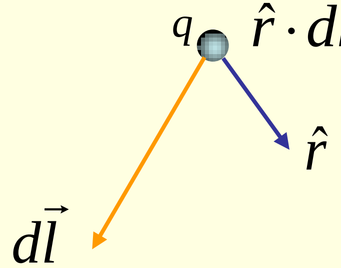
O fato da força coulombiana ser conservativa significa que o trabalho realizado sobre uma carga de teste para movê-la de um ponto a outro é independente do caminho escolhido. Na ilustração mostramos um caminho arbitrário entre dois pontos, A e B, distando respectivamente d_1 e d_2 de uma carga puntiforme *Q*.
O trabalho realizado pelo campo elétrico na carga de teste *q* quando esta sofre um deslocamento infitesimal arbitrário é:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \hat{r} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qQ}{r^2} dr$$



Portanto, o trabalho realizado para afastar as duas cargas de uma distância d_1 até outra d_2 *através de um caminho arbitrário* é:

$$W = \int_{d_1}^{d_2} \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0} \left(-\frac{1}{d_2} + \frac{1}{d_1}\right)$$



$$\hat{r} \cdot d\vec{l} = dr$$

O trabalho realizado (W) pela força decresce a ***energia potencial do sistema, U****:*

$$W = U(d_1) - U(d_2)$$

IF – 430270– Eletricidade e Magnetismo I

Energia potencial de um par de cargas

Observamos que a energia potencial elétrica de um par de cargas Q e q é: $U = \dfrac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}(\dfrac{1}{r})$

Como é usual, a definição da energia potencial contém uma constante arbitrária, permitindo que atribuamos o valor zero para esta função de acordo com nossa conveniência. Costumamos atribuir o valor zero quando as duas cargas estão infinitamente separadas.

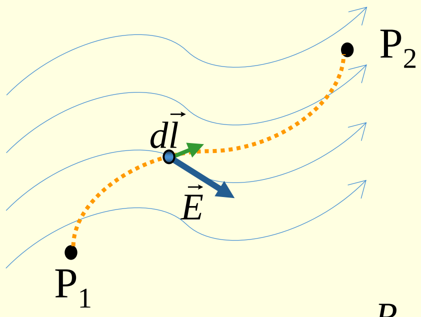
Energia potencial de uma carga em um ***campo elétrico arbitrário***

Para obter a energia potencial de uma carga em um campo elétrico arbitrário, começamos calculando o trabalho do campo sobre a carga q quando esta sofre um deslocamento infitesimal:

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{l} = q\vec{E}\cdot d\vec{l}$$

Se a carga se desloca de P_1 para uma nova posição P_2 o trabalho realizado pelo campo elétrico sobre ela é:

$$W = \int dW = q\int_{P_1}^{P_2} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$



Este trabalho é realizado às custas da energia potencial do sistema:

$$-\Delta U = -(U_2 - U_1) = W = q\int_{P_1}^{P_2} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$\Delta U = -q\int_{P_1}^{P_2} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

IF – 430270– Eletricidade e Magnetismo I

Energia potencial de uma carga em um *campo elétrico arbitrário*

Observe que a *diferença* de energia potencial elétrica depende linearmente da carga teste. Isto nos permite definir uma grandeza que depende somente do campo elétrico da distribuição de cargas e ***não*** da carga teste:

$$\Delta U = -q\int_{P_1}^{P_2} \vec{E}\cdot d\vec{l} = q\Delta V$$

Diferença de potencial elétrico
(Ver apêndice 1)

$$\Delta V = -\int_{P_1}^{P_2} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

(Unidade Volt – *V*)

Exemplo

Um elétron desloca-se do ponto P_1, a partir do repouso, com potencial V_1 = 9,0 *V*, até um ponto P_2 com potencial V_2 = 10,0 *V*. Qual a velocidade do elétron no ponto P_2?

Energia	Inicial		Final	
	Cinética	Potencial	Cinética	Potencial
	0	$-eV_1$	$mv^2/2$	$-eV_2$

Portanto, a conservação de energia implica:

$$-eV_1 = \tfrac{1}{2}mv^2 - eV_2$$

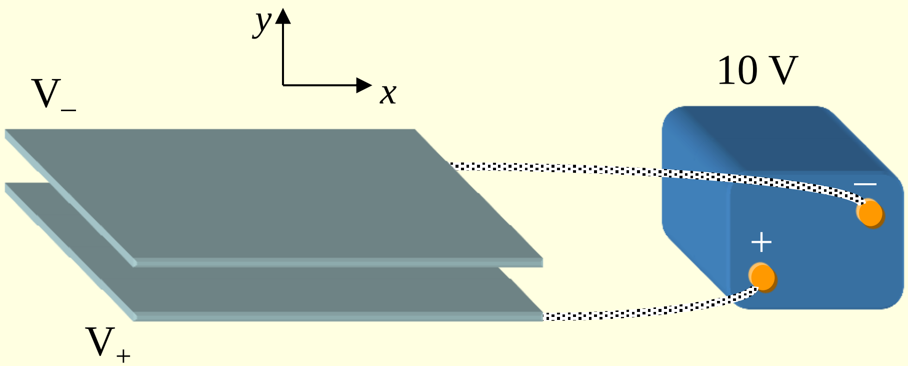
$$\Rightarrow v = \sqrt{2\frac{e(V_2 - V_1)}{m}} = \sqrt{2\frac{(1{,}6x10^{-19}C)(10{,}0V - 9{,}0V)}{9{,}1x10^{-31}kg}} = 5{,}9x10^5\ \tfrac{m}{s}$$

Velocidade de um elétron com energia de um eletron-volt (eV)

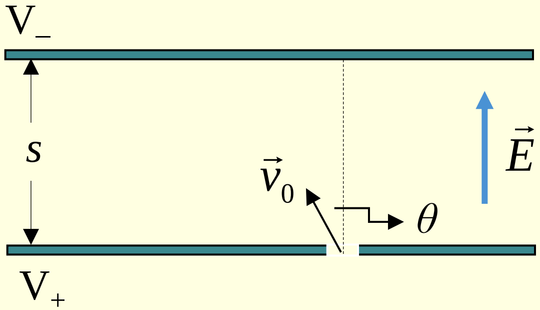
1 eV = 1,6x10^{-19} J

IF – 430270– Eletricidade e Magnetismo I

Exemplo



Uma bateria mantém uma diferença de potencial V = 10,0 *V* entre duas placas metálicas paralelas, muito finas, de área *A* e separadas por uma distância *s* = 1,0 *mm*. Considere $A >> s^2$.
Elétrons podem emergir, em todas direções, de um pequeno buraco na placa positiva (voltagem mais alta). Suponha que os elétrons tenham velocidade inicial $v_0 = 2{,}0 \times 10^6$ *m/s*.



a. Faça um esboço das trajetórias dos elétrons. Elas se parecem com alguma trajetória que você conheça?

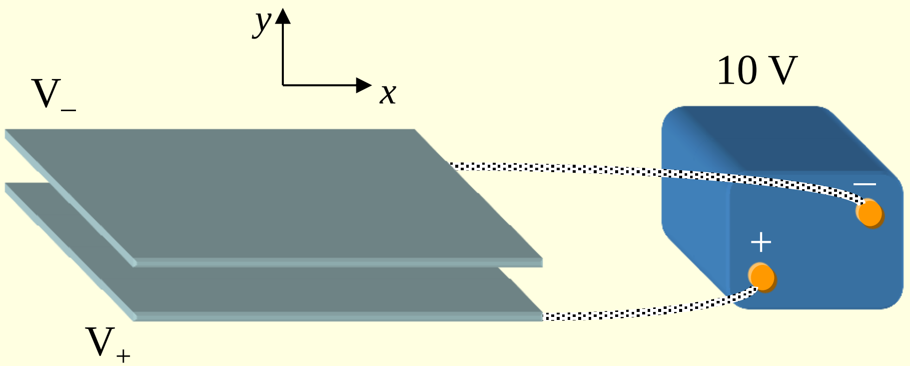
b. Calcule o ângulo θ a partir do qual os elétrons não atingirão a outra placa. ***Resposta: $\theta = 20°$***

Procedimento

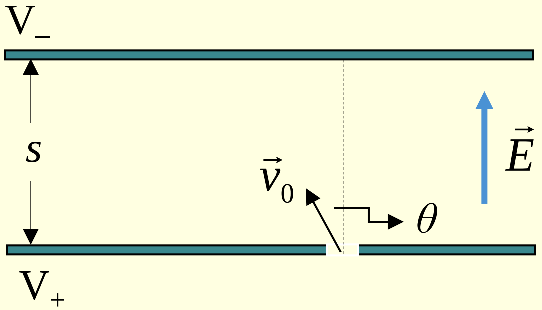
A bateria mantém uma diferença de potencial constante entre as placas e, neste exemplo, a placa positiva é mantida 10,0 *V* a mais do que a negativa. Se arbitrarmos $V_+ \equiv 0$, então o potencial da placa negativa será $V_- = -10{,}0$ *V*. O restante da solução é baseada na conservação de energia.

IF – 430270– Eletricidade e Magnetismo I

Exemplo



Uma bateria mantém uma diferença de potencial V = 10,0 *V* entre duas placas metálicas paralelas, muito finas, de área *A* e separadas por uma distância *s* = 1,0 *mm*. Considere $A >> s^2$.
Elétrons podem emergir, em todas direções, de um pequeno buraco na placa positiva (voltagem mais alta). Suponha que os elétrons tenham velocidade inicial $v_0 = 2{,}0\text{x}10^6\ m/s$.



b.

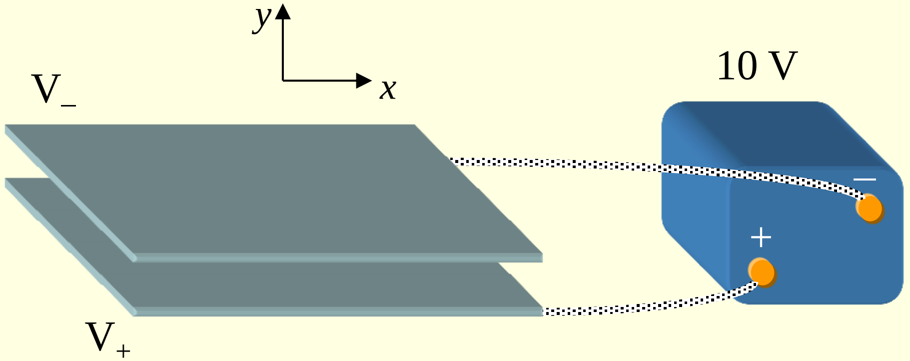
Energia	Inicial (na placa positiva)		Final (na placa negativa)	
	Cinética	Potencial	Cinética	Potencial
	$m(v_0)^2/2$	$-eV_+$	$m(v_0 \sin\theta)^2/2$	$-eV_-$

Equacionando a conservação de energia obtemos:

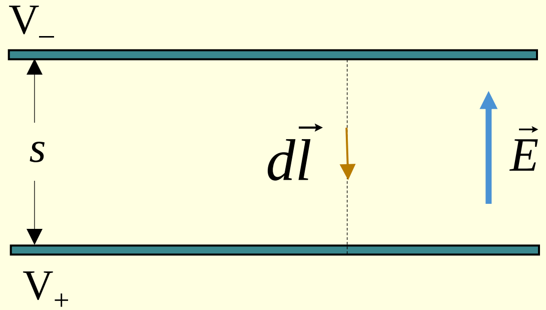
$$(\cos\theta)^2 = \frac{-2eV_-}{mv_0^2} = \frac{-2(1{,}6x10^{-19}C)(-10{,}0V)}{(9{,}1x10^{-31}kg)(2{,}0x10^6\ \frac{m}{s})^2} = 0{,}88 \qquad \Rightarrow \theta = 20°$$

IF – 430270– Eletricidade e Magnetismo I

Exemplo



Uma bateria mantém uma diferença de potencial V = 10,0 *V* entre duas placas metálicas paralelas, muito finas, de área *A* e separadas por uma distância *s* = 1,0 *mm*. Considere $A >> s^2$.
Calcule o campo elétrico entre as placas.



Solução: $\Delta V = V_+ - V_-$

A diferença de potencial entre o ponto inicial (–) e o ponto final (+) é:

$$\Delta V = -\int_-^+ \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_-^+ (-Edl) = E\int_-^+ dl = Es$$

$$E = \frac{\Delta V}{s} = \frac{V_+ - V_-}{s} = \frac{10{,}0V}{1{,}0x10^{-3}m} = 1{,}0x10^4\, {}^V\!/\!_m$$

Observe que

$$\frac{V}{m} = \frac{{}^J\!/\!_C}{m} = \frac{N\cdot m}{C\cdot m} = \frac{N}{C}$$

A unidade volt por metro é a mais comum para a intensidade de campo elétrico.

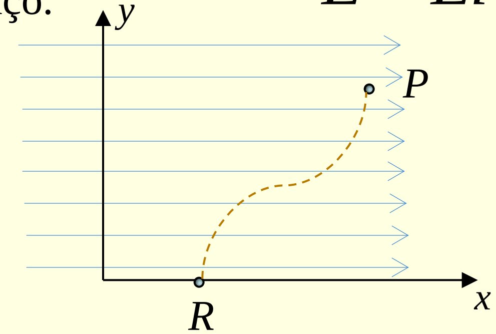
Superfícies equipotenciais

Como o termo indica, superficie equipotencial é uma superfície na qual o potecial elétrico tem um valor constante.

Exemplo

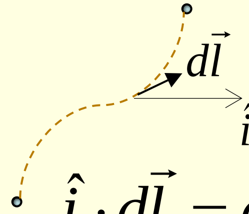
Um campo elétrico uniforme existe numa região do espaço. Descreva as superfícies equipotenciais.

$$\vec{E} = E\hat{i}$$



Vamos tomar o ponto x = R como referência e calcular o potencial elétrico no ponto P, em relação a este ponto.

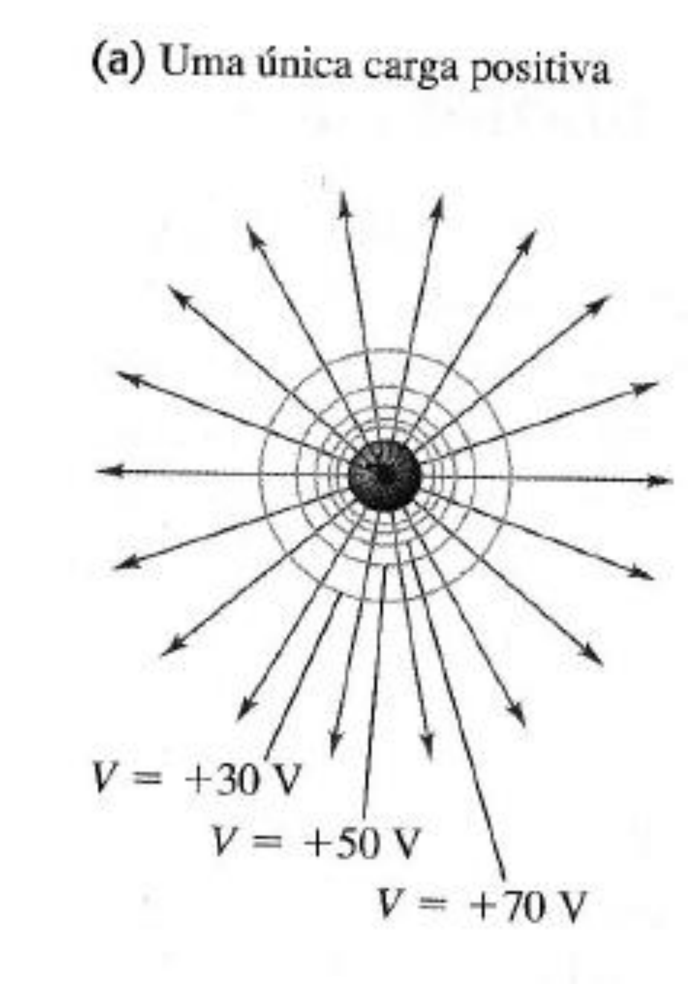
$$V(P) = -\int_R^P \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_R^P E\hat{i}\cdot d\vec{l} = -E\int_R^x dx = E(R-x)$$

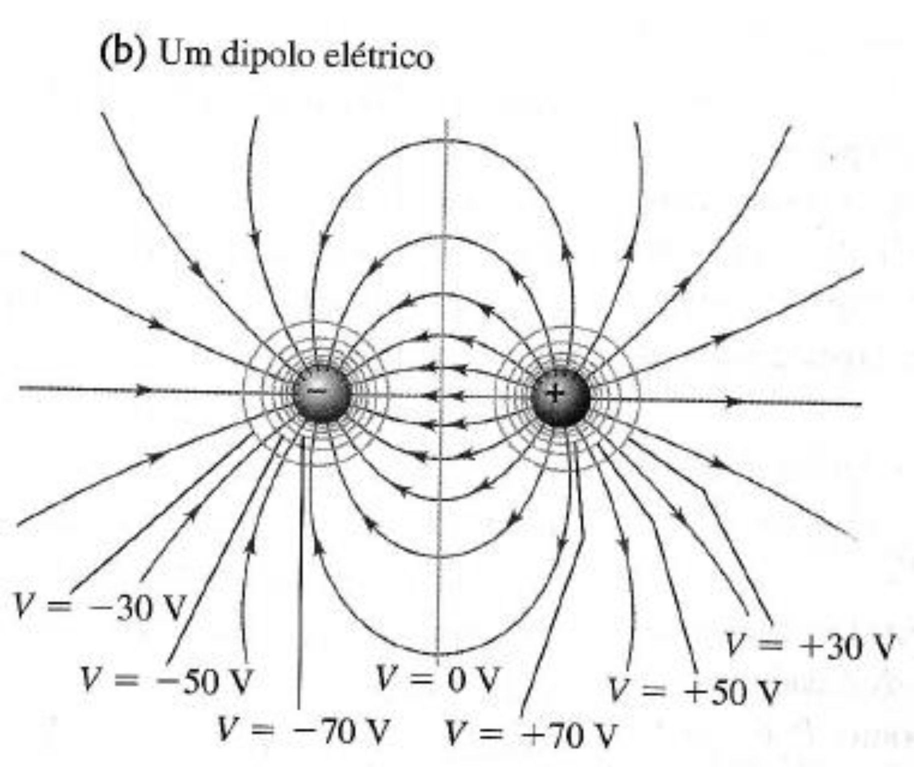


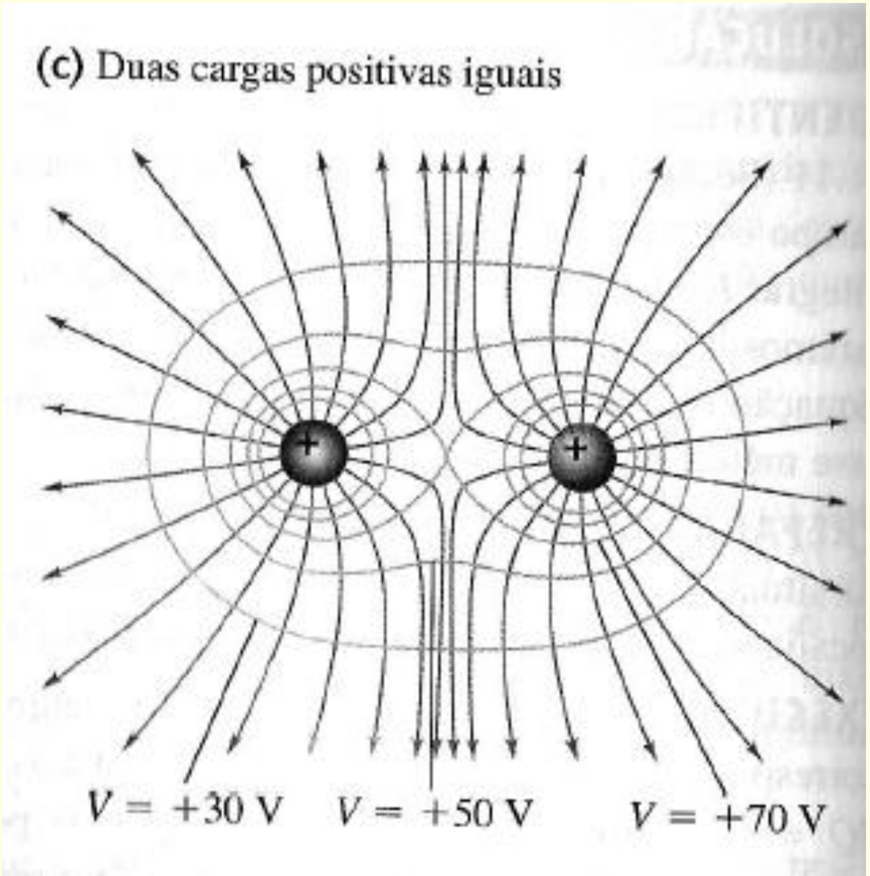
$$\hat{i}\cdot d\vec{l} = dx$$

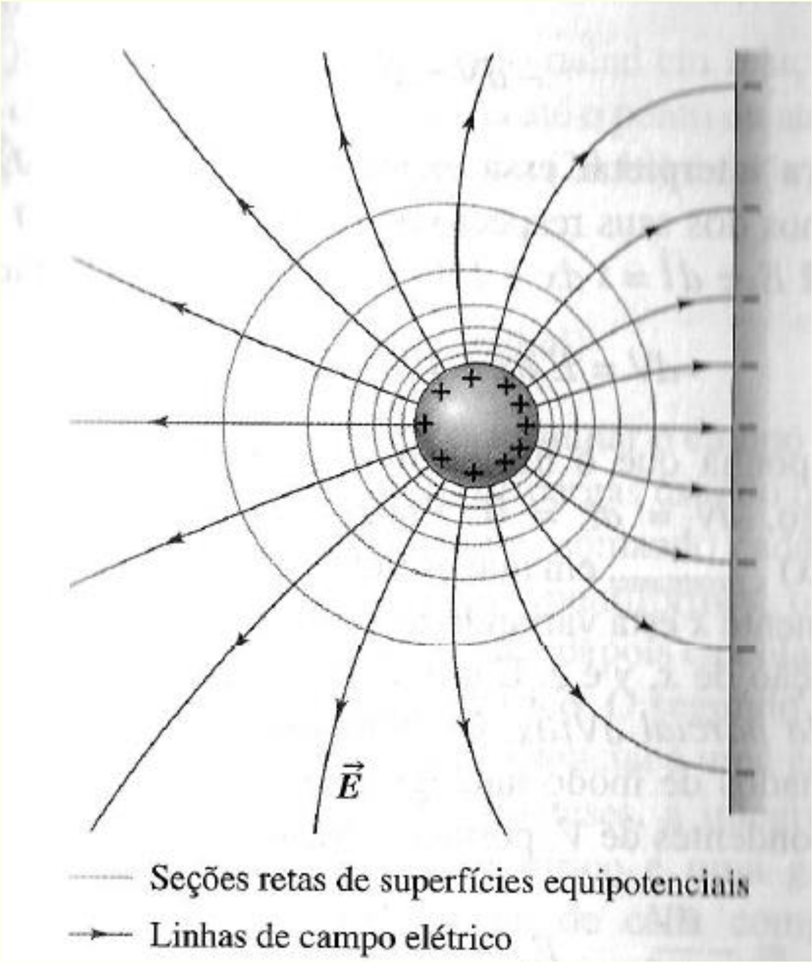
Portanto as equipotenciais são as superfícies em que x = constante.

Exemplos de superfícies equipotenciais





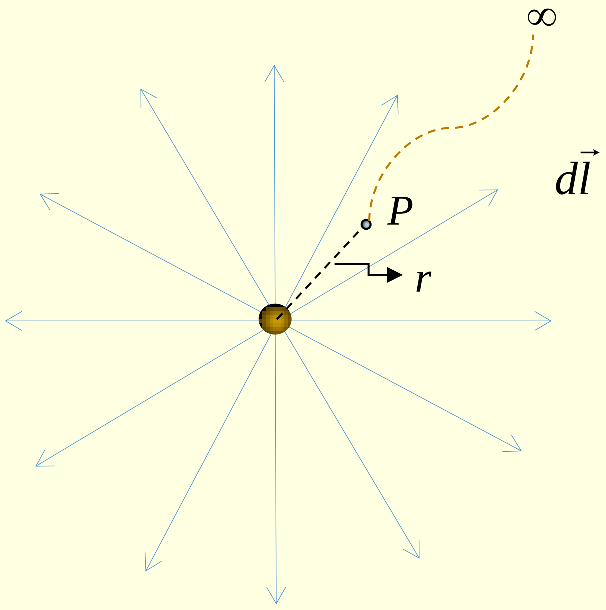

(c) Duas cargas positivas iguais
+
+
V = +30 V
V = +50 V
V = +70 V


+
$\vec{E}$
Seções retas de superfícies equipotenciais
Linhas de campo elétrico

IF – 430270– Eletricidade e Magnetismo I

Superfícies equipotenciais

Como o termo indica, superficie equipotencial é uma superfície na qual o potencial elétrico tem um valor constante.



Exemplo → Considere o campo elétrico produzido por uma carga puntiforme *Q*.
Descreva as superfícies equipotenciais.

Vamos tomar o ponto $r = \infty$ como referência e calcular o potencial elétrico no ponto P, em relação ao infinito.
Já sabemos que a integral será independente do caminho, portanto escolhemos um caminho radial para a integração:

$$V(r) = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\infty}^{r}\frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Concluímos que as equipotenciais são as superfícies em que r = constante (superfícies esféricas).

Observamos que as superfícies equipotenciais são superfícies em que as linhas de campo cruzam perpendicularmente. É claro que o potencial elétrico será o mesmo sobre tal superfície.

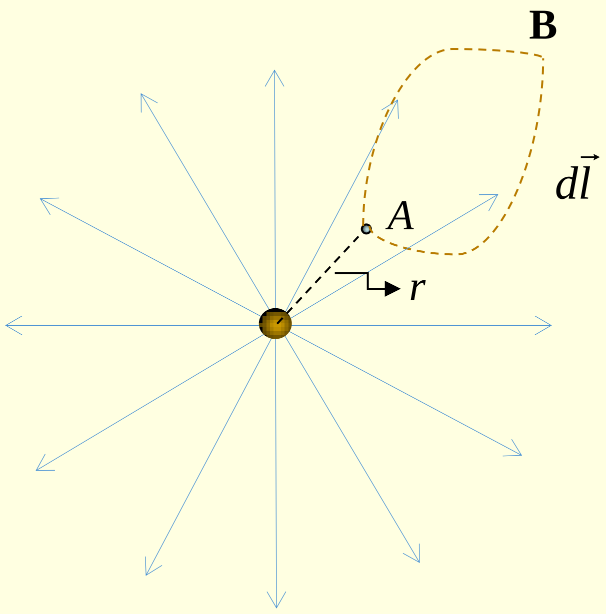
A integral do campo elétrico sobre um trajeto contínuo fechado

Um conceito importante que observamos da definição do
do potencial elétrico é que a integral do campo elétrico sobre
um caminho – trajeto contínuo – fechado é zero:

$$V_{AB} = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = -V_{BA}$$

Ou

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$



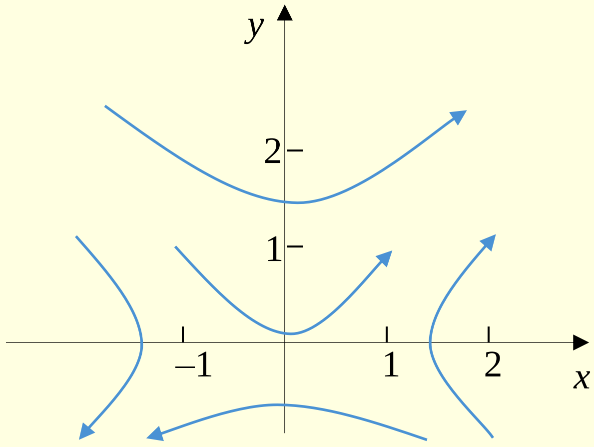
De fato, esta é uma das ***quatro leis fundamentais*** do
eletromagnetismo – tão fundamental quanto a lei de Gauss –
válida na forma acima quando os campos são arbitrários mas estáticos.

No terceiro módulo estudaremos a lei de Faraday e aprenderemos como
a lei acima se altera na presença de campos dependentes do tempo.

IF – 430270– Eletricidade e Magnetismo I

Apêndice 1 – A integral do campo elétrico sobre um trajeto contínuo

Vamos usar um exemplo simples para ilustrar a integração do campo elétrico sobre um trajeto contínuo entre dois pontos A e C.

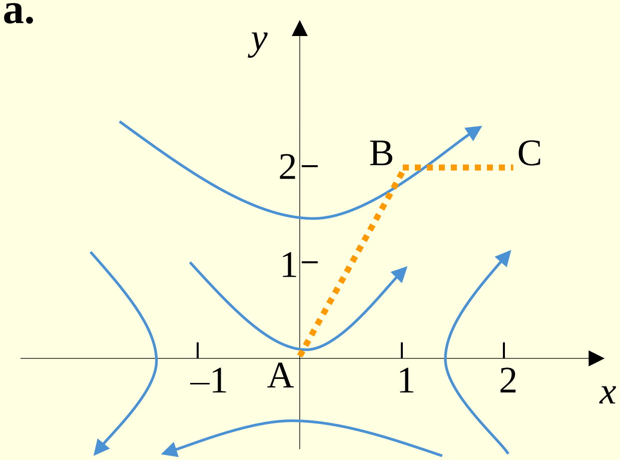


O campo que vamos utilizar (que é um campo eletrostático) é:

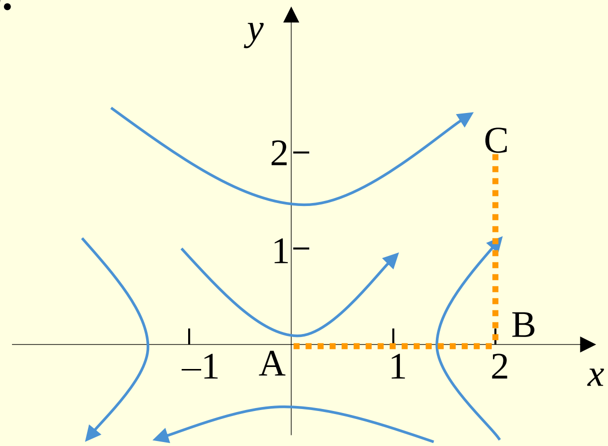
$$\vec{E} = E_0(y\hat{i} + x\hat{j})$$

E os trajetos de integração serão:

a.

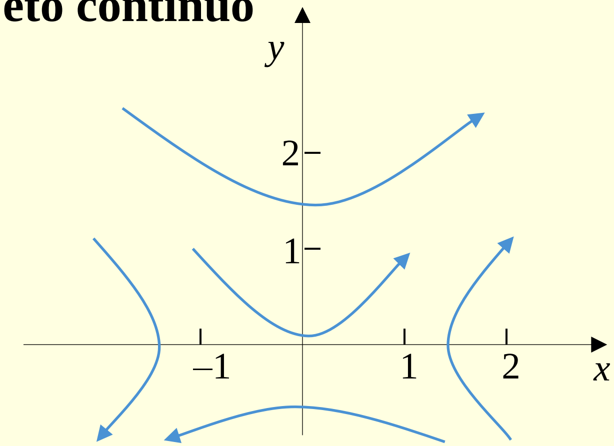


b.



IF – 430270– Eletricidade e Magnetismo I

Apêndice 1 – A integral do campo elétrico sobre um trajeto contínuo



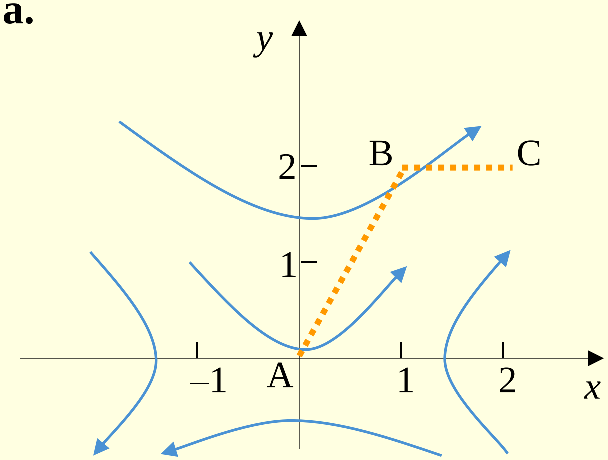
O vetor que representa um elemento do trajeto é:

$$d\vec{l} = dx\hat{i} + dy\hat{j}$$

Portanto, o produto escalar entre o campo e *qualquer* elemento do trajeto é:

$$\vec{E} \cdot d\vec{l} = E_0(ydx + xdy)$$

a.



No trajeto de A até B *y = 2x e dy = 2dx*

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = E_0 \int_A^B (ydx + xdy) = E_0 \int_0^1 (2xdx + x2dx) = 2E_0$$

No trajeto de B até C *y = 2 e dy = 0*

$$\int_B^C \vec{E} \cdot d\vec{l} = E_0 \int_B^C (ydx + xdy) = E_0 \int_1^2 (2dx + x0) = 2E_0$$

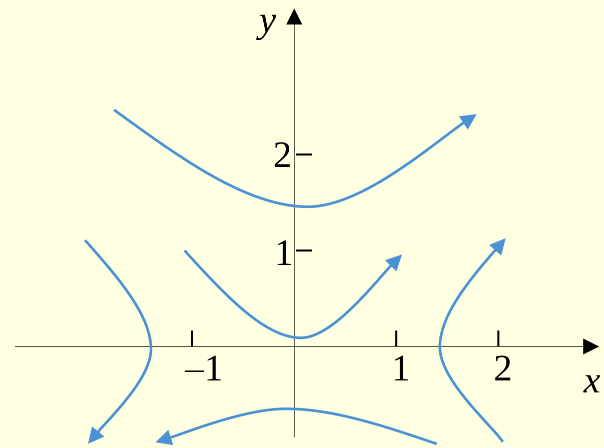
Portanto: $$\int_A^C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 4E_0$$

IF – 430270– Eletricidade e Magnetismo I

Apêndice 1 – A integral do campo elétrico sobre um trajeto contínuo

O vetor que representa um elemento do trajeto é:

$$d\vec{l} = dx\hat{i} + dy\hat{j}$$



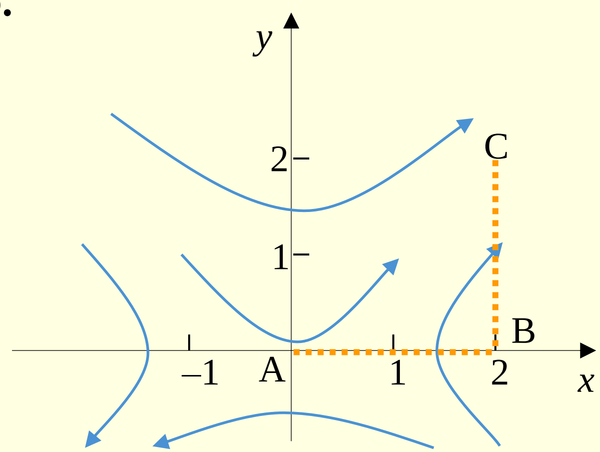
Portanto, o produto escalar entre o campo e *qualquer* elemento do trajeto é:

$$\vec{E}\cdot d\vec{l} = E_0(ydx + xdy)$$

No trajeto de A até B *y = 0 e dy = 0*

$$\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} = E_0\int_A^B (ydx + xdy) = E_0\int_0^2 (0dx + x0) = 0$$

b.



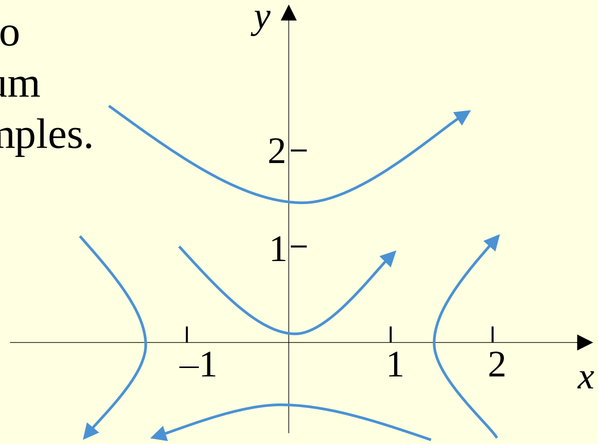
No trajeto de B até C *x = 2 e dx = 0*

$$\int_B^C \vec{E}\cdot d\vec{l} = E_0\int_B^C (ydx + xdy) = E_0\int_0^2 (y0 + 2dy) = 4E_0$$

Portanto: $$\int_A^C \vec{E}\cdot d\vec{l} = 4E_0$$

Apêndice 1 – A integral do campo elétrico sobre um trajeto contínuo

Concluímos que, neste exemplo, a integração não depende do trajeto escolhido. Vamos usar este fato para calcular o potencial elétrico num ponto arbitrário, usando o segundo trajeto onde o cálculo é mais simples.

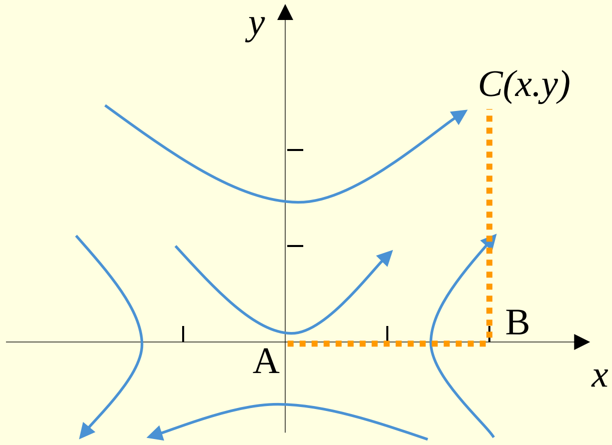


No trajeto de A até B *y = 0 e dy = 0*

$$\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} = E_0\int_A^B (ydx + xdy) = E_0\int_0^x (0dx + x0) = 0$$

No trajeto de B até C *x tem um valor fixo e dx = 0*

$$\int_B^C \vec{E}\cdot d\vec{l} = E_0\int_B^C (ydx + xdy) = E_0\int_0^y (y0 + xdy) = E_0 xy$$



Portanto a diferença de potencial elétrico entre A e C é:

$$V_{AC} = -\int_A^C \vec{E}\cdot d\vec{l} = -E_0 xy = V(x,y)$$

Qual o significado deste resultado?
Em particular, qual o significado do sinal menos?

Apêndice 1 – A integral do campo elétrico sobre um trajeto contínuo

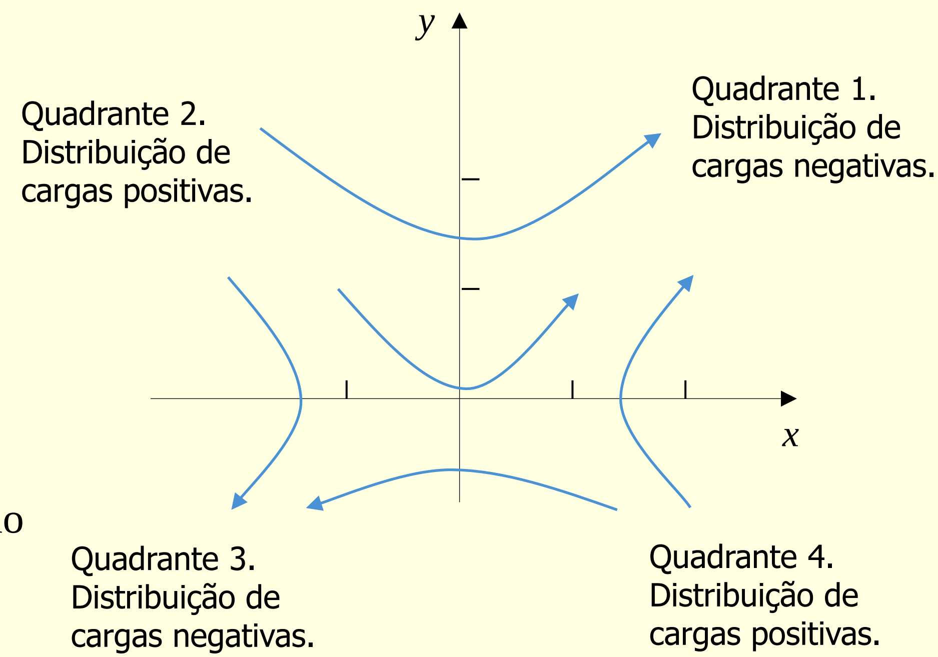
Embora não nos interesse neste momento determinar exatamente a distribuição de cargas que produz este campo elétrico, podemos esperar o esboço da figura abaixo.

O potencial elétrico em um ponto arbitrário é: $V(x,y) = -E_0 xy$

Note que arbitramos $V = 0$ na origem.

Observe, também, que se abandonarmos uma carga positiva q no quadrante 1, próximo à origem, ela irá acelerar em direção à distribuição de cargas negativas, ganhando energia cinética e ***diminuindo*** sua energia potencial, qV.
O mesmo ocorre no quadrante 3.

Ao contrário, para aproximarmos uma carga positiva q, no quadrante 2, da distribuição de cargas positivas, precisamos realizar um trabalho ***aumentando*** sua energia potencial, qV.
O mesmo ocorre no quadrante 4.



IF – 430270– Eletricidade e Magnetismo I

Apêndice 2 – O campo eletrostático é igual a menos o gradiente do potencial elétrico

Afirmamos anteriormente que o campo elétrico deste exemplo é eletrostático e o potencial elétrico é:

$$V(x,y) = -E_0 xy$$

Mostre que o campo elétrico deste exemplo pode ser obtido deste potencial.

Como podemos obter o campo a partir do potencial ?

Em geral, para um elemento diferencial de diferença de potencial elétrico temos:

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz\right)$$

$$\vec{E} \cdot d\vec{l} = E_x dx + E_y dy + E_z dz$$

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}\right) = -\mathrm{grad}\,V$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

Outras notações