O Teorema de Green e o problema do agrimensor

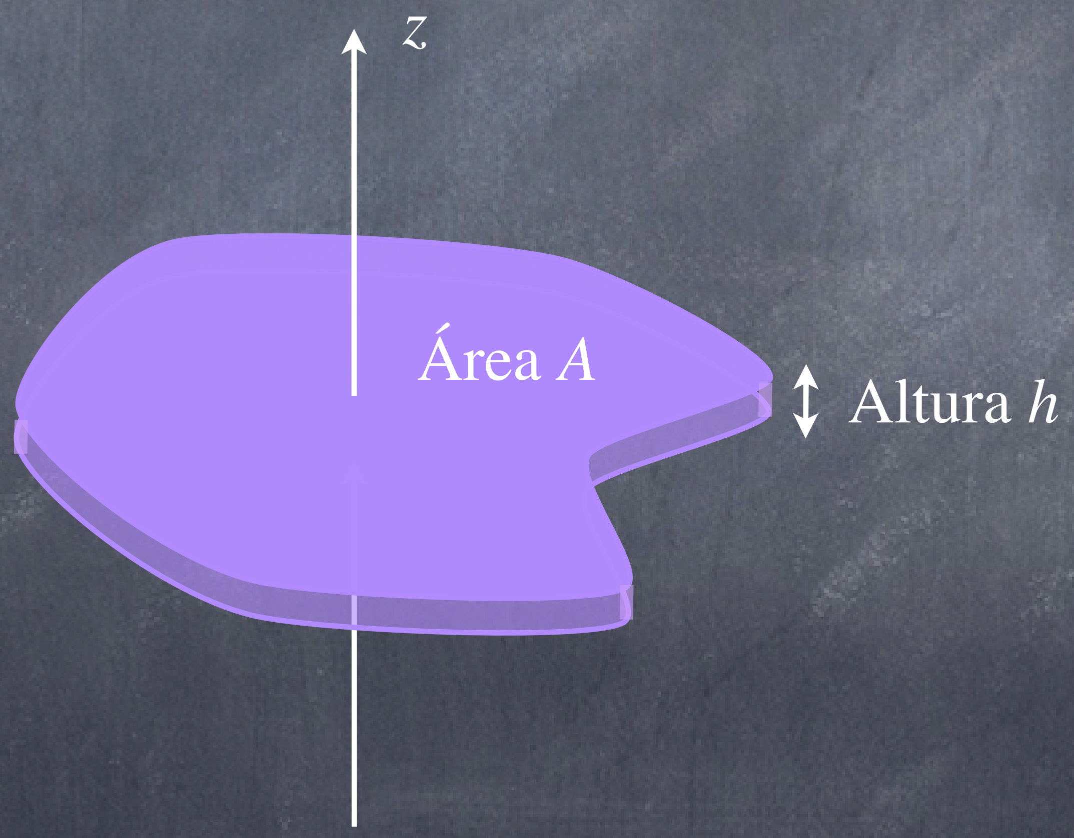
Demonstração simplérrima

(Outras demonstrações “por aí” geralmente se utilizam do Teorema do Divergente, ou do Teorema de Stokes, para mostrar a mesma coisa.)

O Teorema de Green diz que:

$$\int dV \left(f\nabla^2 g - g\nabla^2 f\right) = \oint d\vec{S}\cdot\left(f\vec{\nabla}g - g\vec{\nabla}f\right)$$

Vamos tomar o volume de uma "panqueca":



Evidentemente, o volume da panqueca é: $V = Ah$

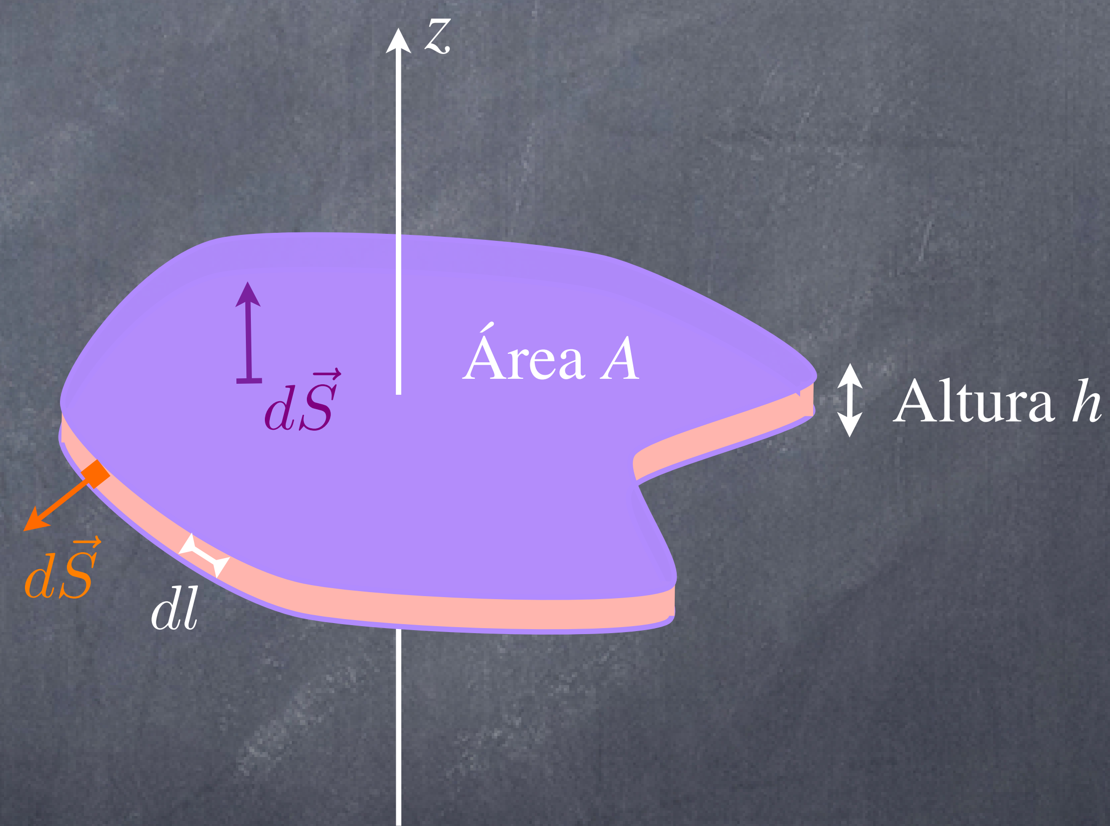
Claramente, podemos tomar funções f e g tais que:

$$f\nabla^2 g - g\nabla^2 f = 1 \quad \Rightarrow \quad \int_{\text{panqueca}} dV \left(f\nabla^2 g - g\nabla^2 f\right) = Ah$$

Se pudermos também escolher

$$f\vec{\nabla}g - g\vec{\nabla}f \;\perp\; z$$

$$\Rightarrow \; d\vec{S}\cdot\left(f\vec{\nabla}g - g\vec{\nabla}f\right) \neq 0$$



apenas na "borda" lateral.

E nessa borda lateral, $dS = h\,dl$, onde dl representa o deslocamento ao longo da borda.

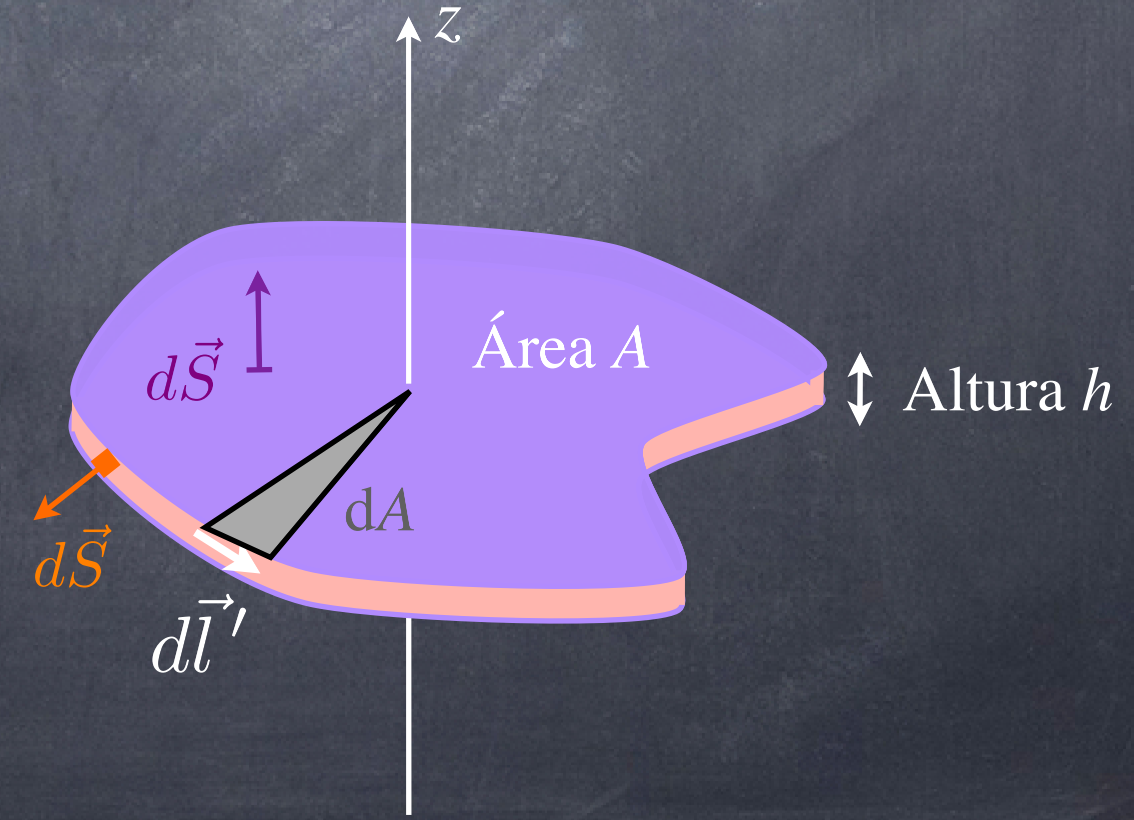
Em particular, tomando f e g tais que:

$$f\nabla^2 g - g\nabla^2 f = 1 \qquad \Rightarrow \quad \int dV\,\left(f\nabla^2 g - g\nabla^2 f\right) = Ah$$

$$f\vec{\nabla} g - g\vec{\nabla} f = \frac{1}{2}\vec{\rho} \quad \Rightarrow \quad \oint d\vec{S}\cdot\left(f\vec{\nabla} g - g\vec{\nabla} f\right) = h\oint_{\text{borda}} \frac{d\vec{l}\,' \times \vec{\rho}}{2}$$

De fato,

$$A = \int dA = \int \frac{d\vec{l}\,' \times \vec{\rho}}{2}$$



Note que:

1) Exemplos de funções f e g que satisfazem as condições acima são dadas por:

$$f = 1 \quad , \quad g = \frac{\rho^2}{4}$$

(Verifique utilizando grad e laplaciano em coord. cilíndricas!)

Note também que:

2) Não precisamos necessariamente escolher:

$$f\vec{\nabla}g - g\vec{\nabla}f = \frac{1}{2}\vec{\rho}$$

De fato, qualquer escolha de f e g tal que:

$$f\nabla^2 g - g\nabla^2 f = 1$$

$$f\vec{\nabla}g - g\vec{\nabla}f \ \perp \ z$$

é válida, e permite calcular a área desejada!