# Mecânica (4310192)

2º Semestre de 2013

Instituto de Física
Universidade de São Paulo

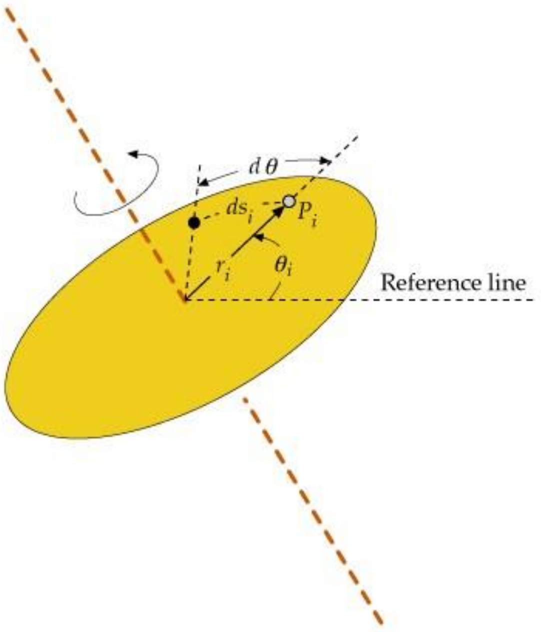
Professor: **Luiz Carlos C M Nagamine**
**E-mail: nagamine@if.usp.br**
**Fone: 3091.6877**

21, 24 de outubro

# Cinemática Rotacional

**Neste tópico, trataremos da rotação em torno de um eixo fixo no espaço, ou em torno de um eixo que se move sem alterar sua direção no espaço.**

## Velocidade angular e aceleração angular




**Seja um corpo rígido de massa M, que gira em torno de um eixo fixo. Cada ponto deste corpo descreve um círculo, cujo raio $r_i$ é a distância entre o ponto e o eixo de rotação.**

**Quando o corpo gira de um ângulo dθ, o ponto descreve um arco de comprimento $dS_i$**

$$dS_i = r_i d\theta$$

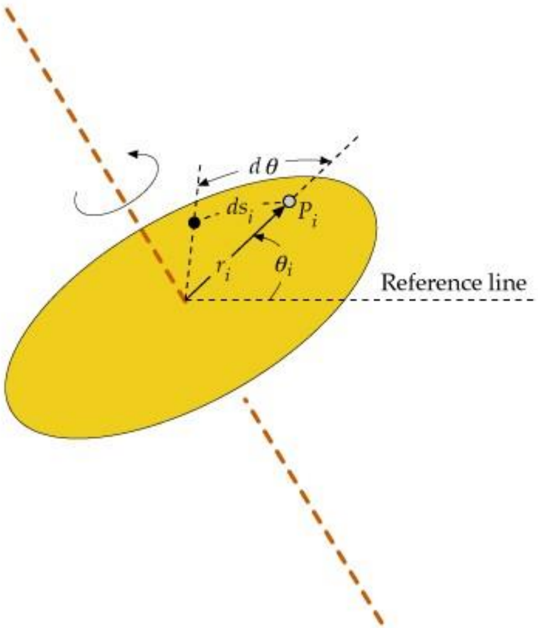
**A taxa de variação do ângulo é a mesma para todas as posições no corpo e é chamada de velocidade angular ω.**

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \qquad \omega = \frac{1}{r_i}\frac{dS_i}{dt} = \frac{v_i}{r_i}$$

# Cinemática Rotacional

## Velocidade angular e aceleração angular

**Analogamente, a taxa de variação da velocidade angular é a mesma para todas as posições no corpo e é chamada de aceleração angular α.**




$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

**Para os valores médios temos:**

$$\omega_{med} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \qquad \alpha_{med} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

**Se α é constante:**

$$\left\{ \begin{aligned} \omega &= \omega_0 + \alpha t \\ \theta &= \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \end{aligned} \right\} \quad \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\Delta\theta$$

# Exemplo

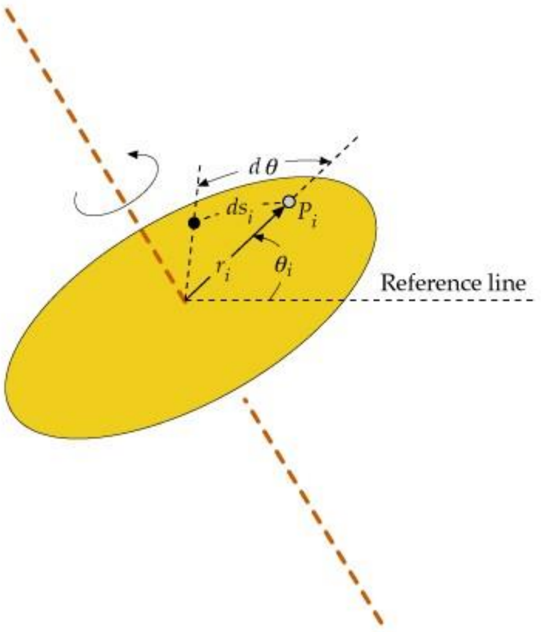


**Um CD gira, do repouso a até 500 rpm, em 5,5 s. (a) Qual a aceleração angular suposta constante? (b) Quantas voltas o disco dá em 5,5 s? (c) Qual a distância percorrida por um ponto a 6,0 cm do centro, nestes 5,5 s?**

**(a)**

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \qquad \omega = 500rpm = 500 \cdot 2\pi / 60 = 52,36$$

$$52,36 = 0 + \alpha 5,5 \qquad \alpha = 9,5 rad / s^2$$




**(b)**

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\theta = 0 + 0 + \frac{1}{2}9,5(5,5)^2 \qquad \theta = 143,7 rad$$

**= 22,9 voltas**

**(c)**

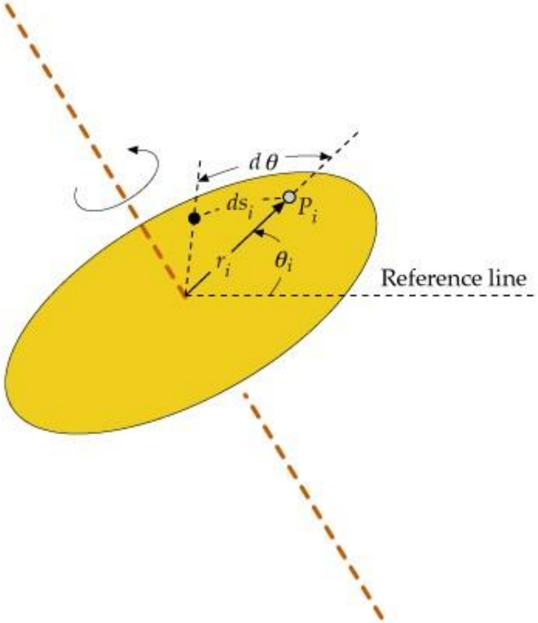
$$\Delta S = r \cdot \Delta\theta = 0,06 \cdot 143,7 = 8,62 m$$

## Acelerações e velocidades angulares

**Já vimos que:**

$$\omega = \frac{1}{r_i}\frac{dS_i}{dt} = \frac{v_i}{r_i}$$

$$v_i = r_i\omega$$




**Analogamente, para a aceleração tangencial temos:**

$$a_t = \frac{dv_t}{dt} = r_i\frac{d\omega}{dt}$$

$$a_t = r\alpha$$

**Mas, como o movimento é circular, existe uma aceleração centrípeta**

$$a_c = \frac{v_t^2}{r_i} = \frac{(r_i\omega)^2}{r_i}$$

$$a_c = r_i\omega^2$$

# Energia Cinética Rotacional

**A energia cinética de um corpo rígido que gira em torno de um eixo fixo é a soma das energias cinéticas das partículas individuais que constituem o corpo.**

**Para a $i^{esima}$ partícula, de massa $m_i$ e velocidade $v_i$, temos:**

$$K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

**Somando sobre todas as partes, obtemos a energia cinética do corpo:**

$$K = \sum_i \left( \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) = \frac{1}{2} \sum_i \left( m_i r_i^2 \omega^2 \right) = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_i \left( m_i r_i^2 \right)$$

**Onde, o termo à direita recebe o nome de momento de inércia (I) do corpo:**

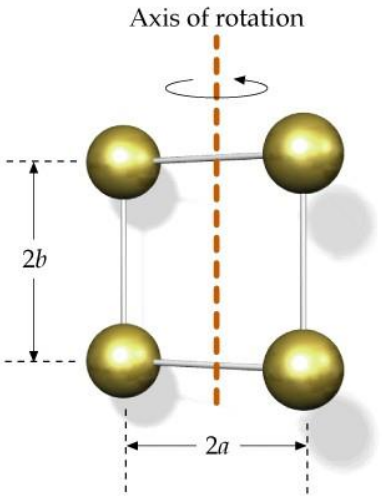
$$I = \sum_i \left( m_i r_i^2 \right)$$

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

# Exemplo



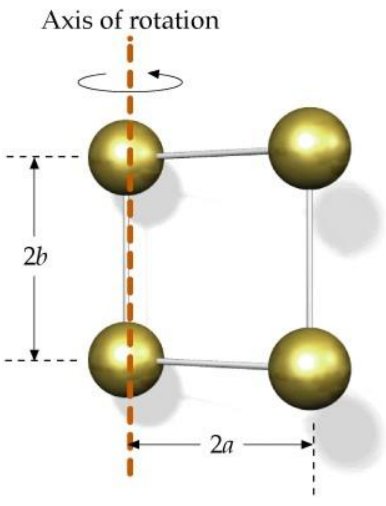
**Um corpo consiste de 4 partículas pontuais, com massas m, ligadas por hastes sem massa, como na figura ao lado. O sistema gira com velocidade angular ω em torno do centro do corpo. (a) Determine o momento de inércia do corpo. (b) Determine a energia cinética do corpo.**




$$I = \sum_i \left(m_i r_i^2\right) \qquad I = 4ma^2$$

$$K = \frac{1}{2} I\omega^2 \qquad K = 2ma^2\omega^2$$

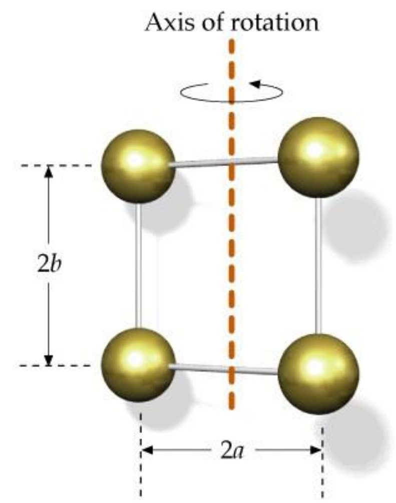
**Repetir os cálculos para a nova configuração ao lado.**




$$I = \sum_i \left(m_i r_i^2\right) \qquad I = 2m(2a)^2 = 8ma^2$$

$$K = \frac{1}{2} I\omega^2 \qquad K = 4ma^2\omega^2$$

# Cálculos do Momento de Inércia




**Para sistemas discretos:**

$$I = \sum_i \left( m_i r_i^2 \right)$$

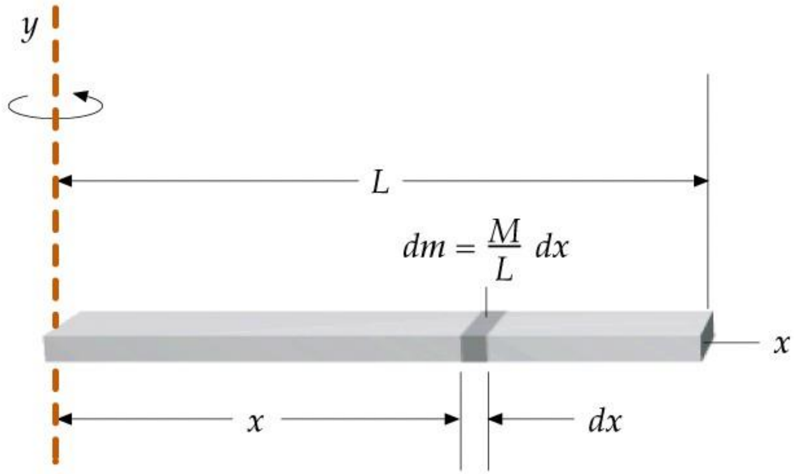
**Corpos contínuos**

**Se subdividirmos o corpo em pequenas porções, no limite quando a massa de cada porção vai a zero, a somatória acima se tranforma na integral:**

$$I = \int r^2 dm$$

**Onde r é a distância ao eixo, de cada parcela *dm* do corpo.**

**Calcule o momento de inércia de uma barra fina de comprimento L e massa M, em relação ao eixo que passa por sua extremidade.**




$$I = \int r^2 dm$$

**Um pedaço dm da barra, situado na posição x, ocupa uma extensão dx da barra.**

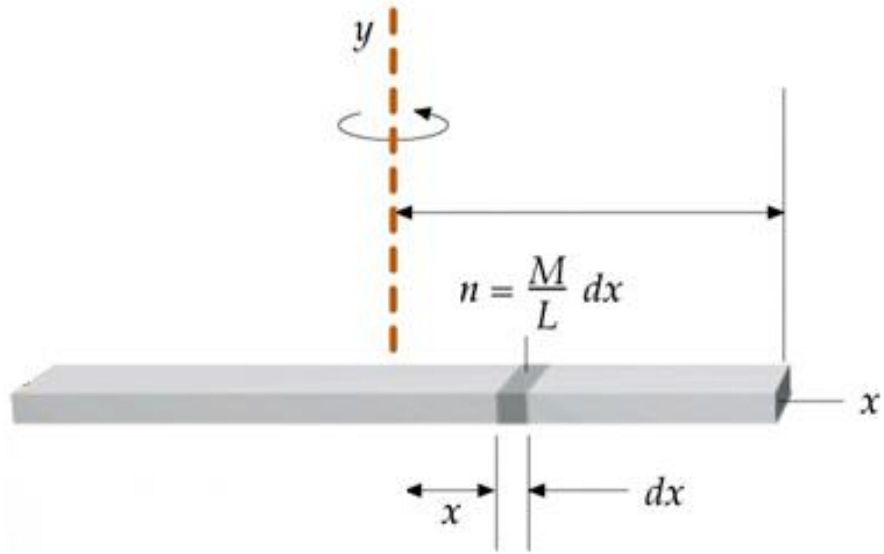
**Considerando a densidade linear de massa λ.**

$$\lambda = \frac{M}{L} \Rightarrow dm = \lambda dx = \frac{M}{L} dx$$

$$I = \int_0^L x^2 \frac{M}{L} dx = \frac{M}{L} \int_0^L x^2 dx$$

$$I = \frac{M}{L} \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^L = \frac{M}{L} \frac{L^3}{3} = \frac{ML^2}{3}$$

**Repetir o cálculo para um eixo no centro da barra.**




$$I = \int r^2 dm$$

$$dm = \lambda dx = \frac{M}{L} dx$$

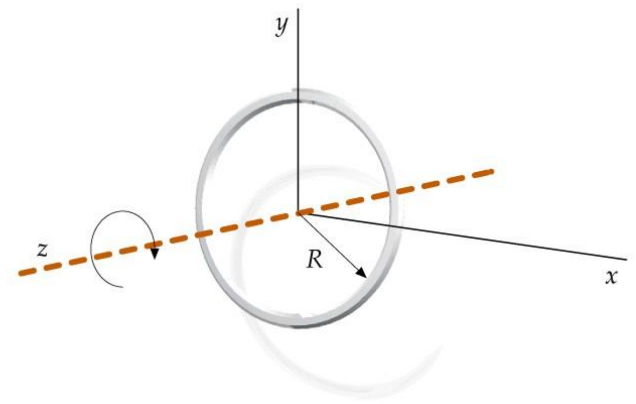
$$I = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \frac{M}{L} dx = \frac{M}{L} \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx$$

$$I = \frac{M}{L} \frac{x^3}{3} \Bigg|_{-L/2}^{L/2} = \frac{M}{L} \left( \frac{(L/2)^3}{3} - \frac{(-L/2)^3}{3} \right) = \frac{M}{L} 2 \left( \frac{(L/2)^3}{3} \right) = \frac{ML^2}{12}$$

# Cálculos do Momento de Inércia



**Calcule o momento de inércia de um anel circular de raio R e massa M, em relação ao eixo que passa perpendicularmente por seu centro.**




$$I = \int r^2 dm$$

**Todos os pedaços dm do anel, estão situados a uma mesma distância R do eixo.**

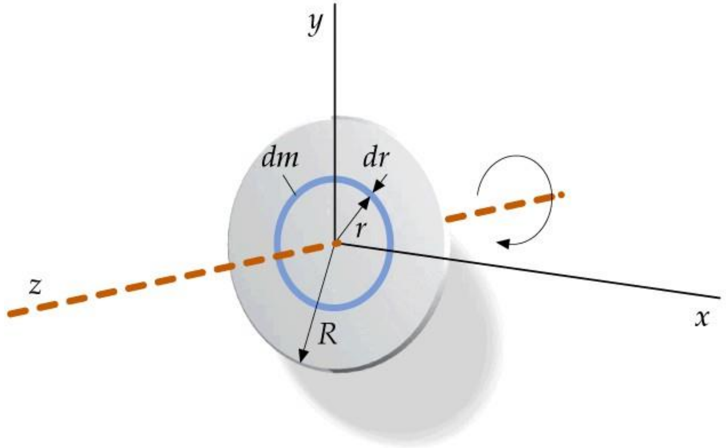
$$I = \int R^2 dm = R^2 \int dm = MR^2$$

# Cálculos do Momento de Inércia



**Calcule o momento de inércia de um disco homogêneo de raio R e massa M, em relação ao eixo que passa perpendicularmente por seu centro.**

$$I = \int r^2 dm$$




**Podemos subdividir o disco em uma série de anéis concentricos.**

**Cada anel tem uma massa dm,  raio r e espessura dr.**

**Considerando a densidade superficial de massa σ.**

$$\sigma = \frac{M}{\pi R^2} \Longrightarrow dm = \sigma dA = \frac{M}{\pi R^2} 2\pi r dr$$

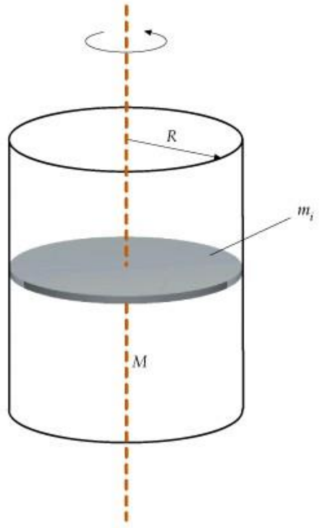
$$I = \int_0^R r^2 \frac{M}{R^2} 2r dr = \frac{2M}{R^2} \int_0^R r^3 dr$$

$$I = \frac{2M}{R^2} \left. \frac{r^4}{4} \right|_0^R = \frac{2M}{R^2} \frac{R^4}{4} = \frac{MR^2}{2}$$

# Cálculos do Momento de Inércia



**Calcule o momento de inércia de um cilindro maciço homogêneo de raio R e massa M, em relação ao seu eixo.**




$$I = \int r^2 dm$$

**Podemos subdividir o cilindro em uma série de discos paralelos.**

**Como todos os discos são equivalentes, podemos considerar o momento de inércia do cilindro como igual ao dos discos.**

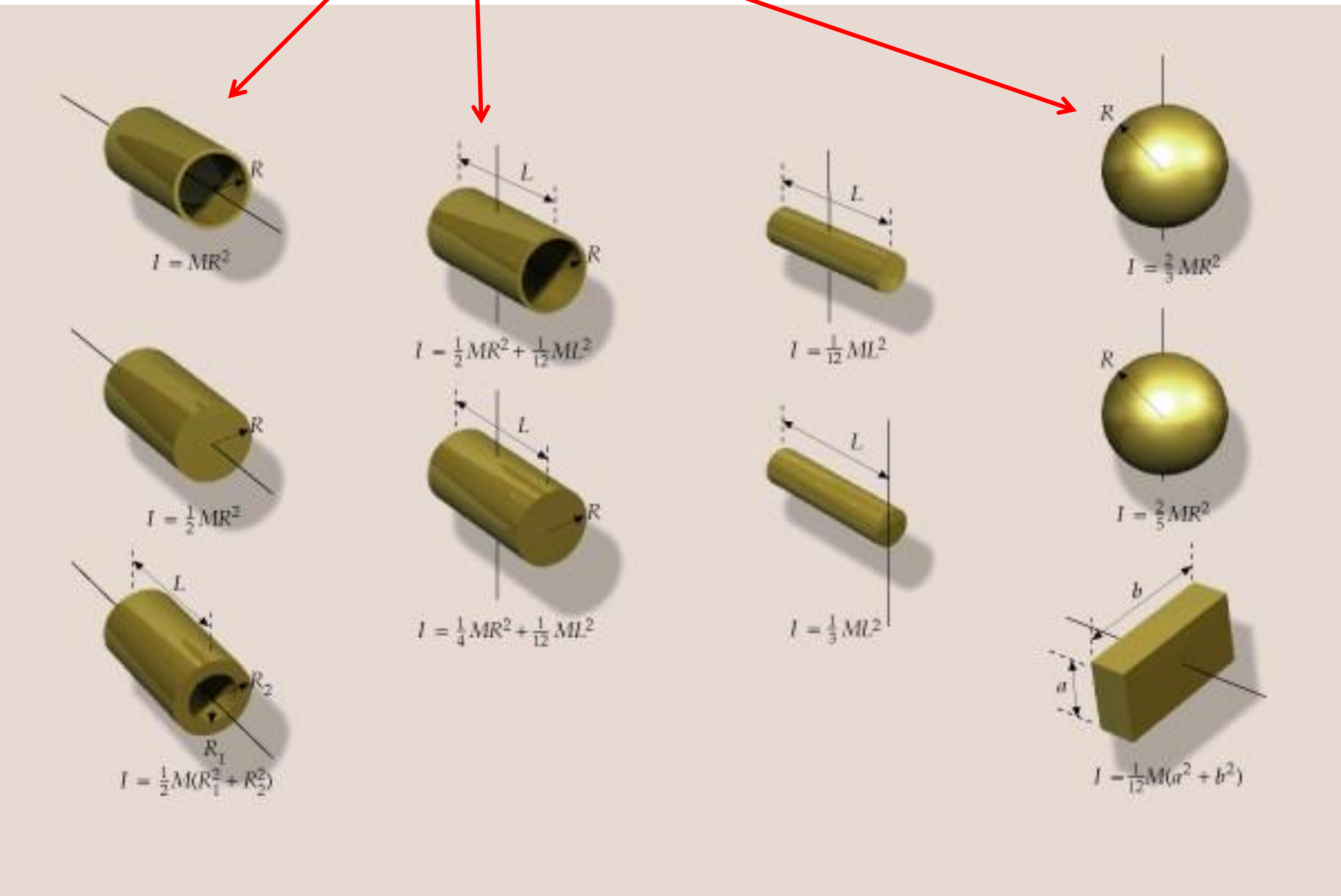
$$I = \frac{MR^2}{2}$$

# Tabela de Momentos de Inércia



$$I = \int r^2 dm$$

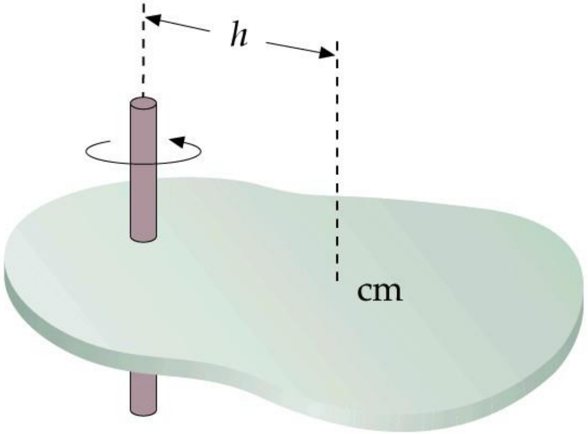
**cascas**



# Cálculos do Momento de Inércia



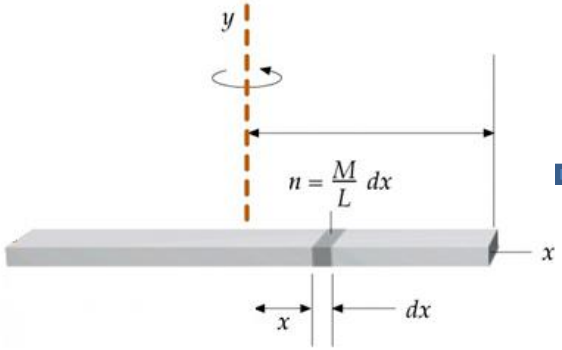
## Teorema dos Eixos Paralelos



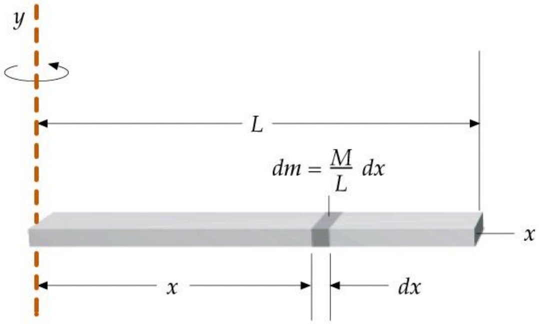

**Este teorema permite que se calcule o momento de inércia de um corpo de massa M em relação a um eixo qualquer, a partir do seu valor para o centro de massa, sabendo-se a distância h entre os dois eixos.**

$$I = \int r^2 dm \quad \Longrightarrow \quad I = I_{cm} + Mh^2$$

**Exemplo:**



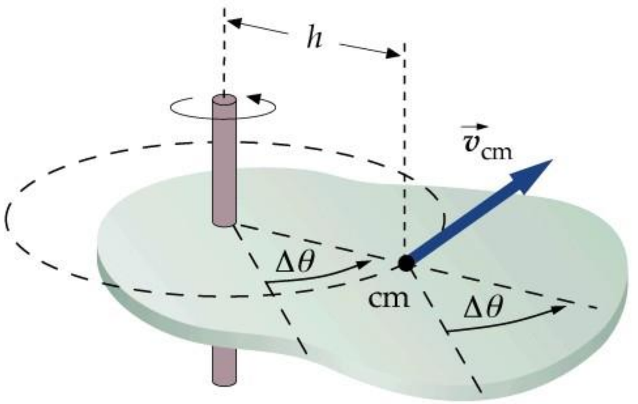

$$\Longrightarrow \quad I = I_{cm} + Mh^2$$




$$I = \frac{ML^2}{12}$$

$$I = \frac{ML^2}{12} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 \quad \Longrightarrow \quad I = \frac{ML^2}{3}$$

## Demonstração do Teorema dos Eixos Paralelo




**Vamos calcular a energia cinética de rotação para o eixo paralelo do corpo de massa M ao lado, quando girando com velocidade ω.**

$$K = \frac{1}{2} I\omega^2$$

**Mas, já vimos que a energia cinética de um corpo pode ser escrita como a energia cinética de translação do centro de massa, mais a energia de rotação em relação ao centro de massa.**

$$K = \frac{1}{2} I\omega^2 = K_{rot_{cm}} + K_{transl_{cm}} \Longrightarrow \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} I_{cm}\omega_{cm}^2 + \frac{1}{2} M v_{cm}^2$$

**Mas,** $v_{cm} = h\omega$

**e** $\omega_{cm} = \omega$

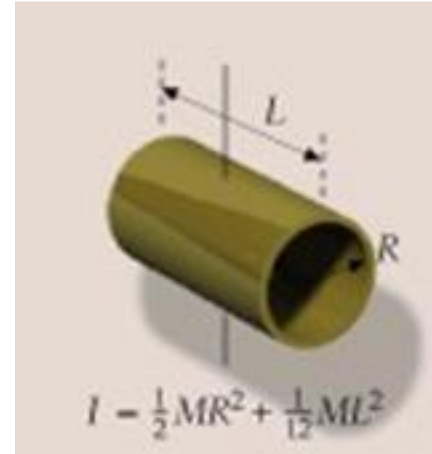
$$\frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2} M h^2 \omega^2$$

$$I = I_{cm} + Mh^2$$

# Exemplo

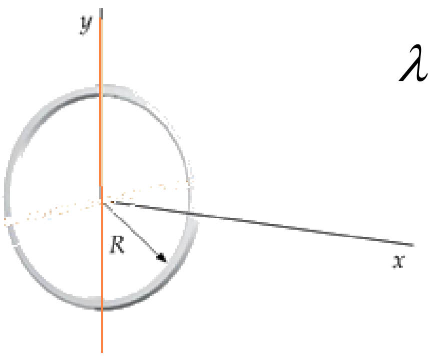


## Teorema dos Eixos Paralelos




**Vamos calcular o momento de inércia do corpo ao lado.**

**Mas inicialmente, calcularemos o momento de inércia de uma espira de massa m e raio R, através do eixo que passa por seu cento de massa.**




$$\lambda = \frac{m}{2\pi R} \Rightarrow dm = \lambda dl = \frac{m}{2\pi R} R d\theta$$

$$I = 4\int_0^{\pi/2} (R\cos\theta)^2 \frac{m}{2\pi R} R d\theta = \frac{2mR^2}{\pi}\int_0^{\pi/2} (\cos\theta)^2 d\theta$$

$$I_{cm} = \frac{mR^2}{2}$$

**Mas, se esta espira estiver com seu eixo a uma distância l do eixo principal, ela contribuirá para o momento de inércia total, com**

$$dI = \frac{dm \cdot R^2}{2} + dm \cdot l^2$$

$$dm = \frac{M}{L} dl$$

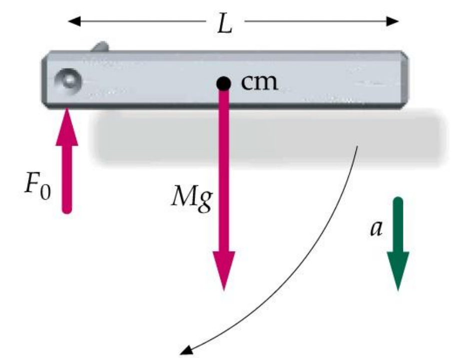
$$dI = \frac{\frac{M}{L} dl \cdot R^2}{2} + \frac{M}{L} dl \cdot l^2$$

$$I = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{Mdl \cdot R^2}{2L} + \frac{M}{L} dl \cdot l^2 = \frac{MR^2}{2} + \frac{ML^2}{12}$$

# Exemplo



**Uma barra de comprimento L e massa M, articulada em sua extremidade, é largada do repouso, da posição horizontal. Determine (a) a sua velocidade angular, na posição vertical, (b) a força exercida pelo pivô sobre a barra, neste intante e (c) a velocidade angular inicial necessária para a barra chegar até uma posição vertical superior.**




**Considerando o sistema como sendo constituído pela barra, pivô e a Terra, temos conservação da energia mecânica, então**

$$K_i + U_i = K_f + U_f \qquad 0 = \frac{1}{2} I\omega^2 + Mgy_{cm} \qquad 0 = \frac{1}{2}\frac{ML^2}{3}\omega^2 + Mg\left(-\frac{L}{2}\right) \qquad \omega = \sqrt{\frac{3g}{L}}$$

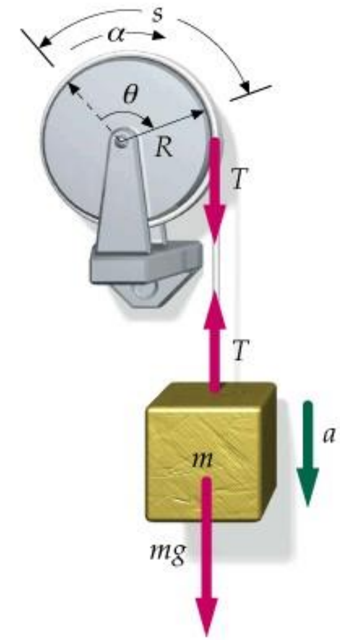
$$F_0 - Mg = Ma_c = M\frac{L}{2}\omega^2 \qquad F_0 = M\left(g + \frac{L}{2}\frac{3g}{L}\right) = \frac{5Mg}{2}$$

$$K_i + U_i = K_f + U_f \qquad \frac{1}{2} I\omega^2 + 0 = 0 + Mgy_{cm} \qquad \frac{1}{2}\frac{ML^2}{3}\omega^2 = Mg\frac{L}{2} \qquad \omega = \sqrt{\frac{3g}{L}}$$

# Exemplo



**Um objeto de massa m está suspenso por um fio de massa $m_f$ que foi enrolado na polia, que tem raio R e massa $m_p$. Suponha que toda a massa da polia esteja em sua borda e que no instante inicial o corpo esteja em repouso e o fio enrolado. Determine qual a velocidade do corpo quando ele tiver caído uma distância d.**




**Considerando o sistema como sendo constituído pela corpo, polia e a Terra, temos conservação da energia mecânica, então**

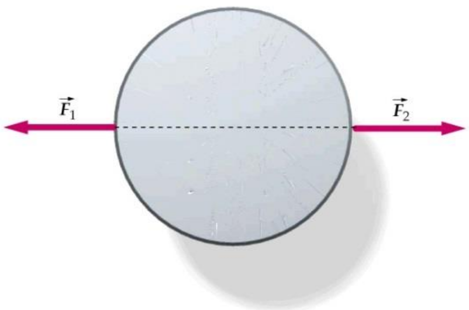
$$K_i + U_i = K_f + U_f$$

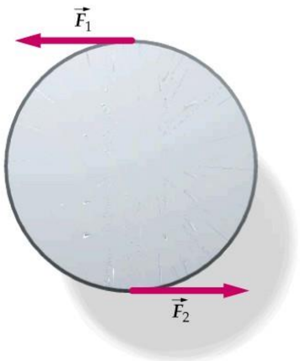
$$\left.\begin{aligned} &0 = \frac{1}{2} I\omega^2 + \frac{1}{2} m_f v^2 + \frac{1}{2} m v^2 + mg(-d) + m_f^* g(-d/2) \\ &I = m_p R^2 \\ &m_f^* = \frac{d}{L} m_f \end{aligned}\right\} \quad v = \sqrt{\frac{(2mL + m_f d)gd}{(m_f + m + m_p)L}}$$

# Torque



**Já vimos a Segunda Lei de Newton, onde a resultante das forças externas provoca a aceleração do centro de massa de sistemas. Porém, quando a linha de ação das forças externas não passa pelo centro de massa, temos um segundo efeito, que é a rotação do sistema. Esta rotação é acelerada. Assim, temos o equivalente à Segunda Lei de Newton, para a rotação.**




**Considere uma partícula de massa m, presa a uma barra de comprimento r. Uma força F é aplicada à partícula, como na figura ao lado. Para a componente tangencial da força, temos:**

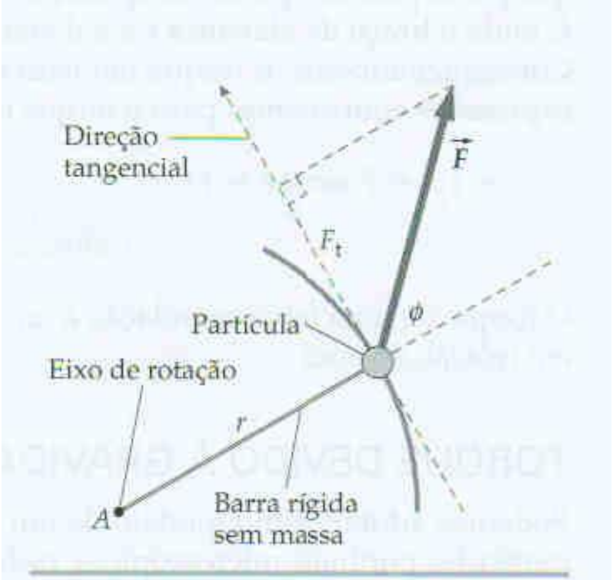



FIGURA 9-19

$$F_t = ma_t$$

**Onde, $F_t$= FsinΦ**

**Usando-se $a_t$= rα e multiplicando a equação por r, temos:**

$$rF_t = mr^2\alpha$$

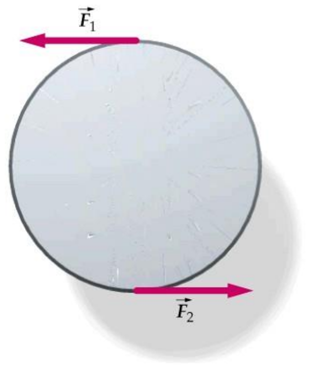
**O produto $rF_t$ é o Torque τ em relação ao eixo de rotação A**

$$\tau = mr^2\alpha$$

# Torque



**Um corpo rígido que gira em torno de um eixo fixo é uma coleção de partículas, com as mesmas velocidade e aceleração angulares.**



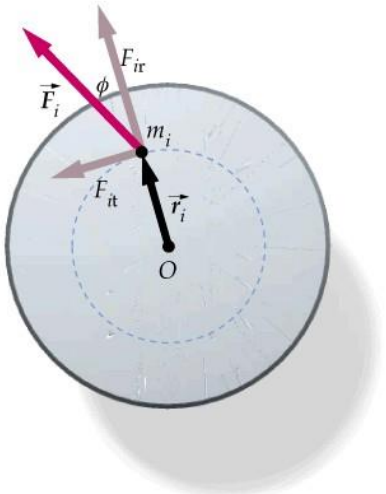

$$\tau_i = m_i r_i^2 \alpha$$

**Somando sobre todas as partículas do corpo, temos:**

$$\sum \tau_i = \sum m_i r_i^2 \alpha = (\sum m_i r_i^2)\alpha = I\alpha$$

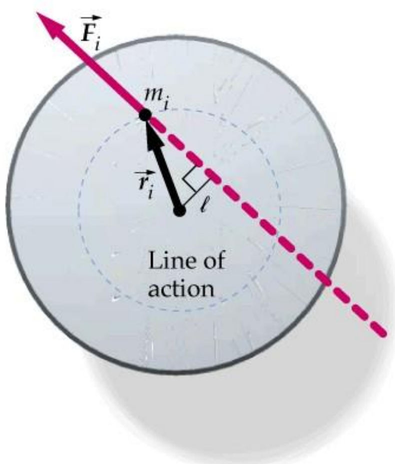
$$\tau_{ext_{res}} = I\alpha$$

**Segunda Lei de Newton para a rotação**




**Para rotações, o que nos interessa são as componentes tangenciais da força**

$$\tau = F_t r = F \sin\phi \cdot r = Fr\sin\phi = Fl$$

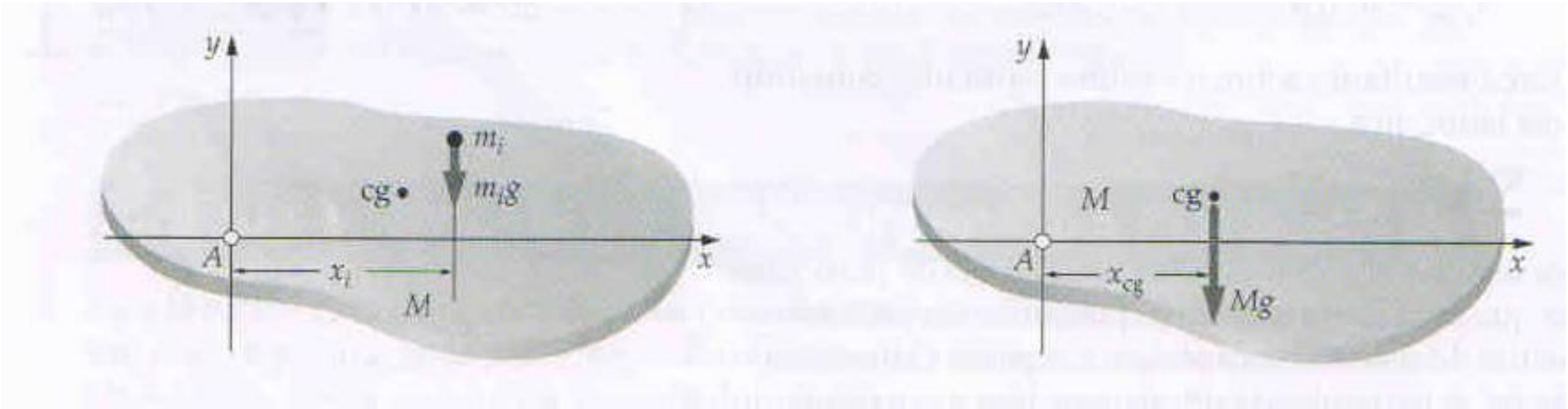



**Onde, l é o "braço de alavanca"**

# Exemplo



**Considere um corpo extenso de massa M, apoiado pelo eixo A e submetido à força gravitacional.**




**O torque sobre cada partícula constituinte será:**

$$\tau_i = F_i r_i = m_i g x_i$$

**O torque total sobre o corpo será a soma dos torques sobre todas as partículas constituintes**

$$\tau_{ext_{res}} = \sum m_i g x_i = (\sum m_i x_i) g = M x_{cm} g = P x_{cm}$$

# Exemplo



**Uma bicicleta ergométrica possui uma roda com grande massa (2,4 kg) e raio R= 35 cm. Aplica-se uma força de 18 N a uma distância de 7 cm do eixo da roda. Após 5 s, qual é a velocidade angular da roda?**

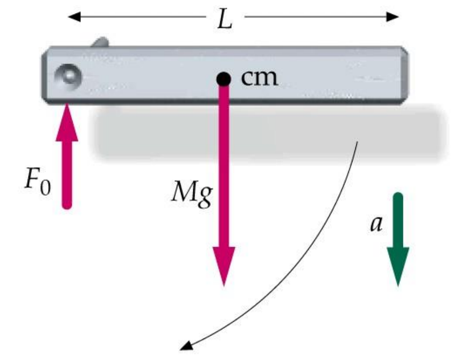

$$\begin{cases} \omega = \omega_0 + \alpha t = \alpha t \\ \tau_{ext_{res}} = I\alpha = Fr \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{Fr}{I} = \frac{Fr}{MR^2}$$

$$\omega = \frac{Fr}{MR^2} t = 21 rad/s$$

# Exemplo

**Uma barra de comprimento L e massa M, articulada em sua extremidade, é largada do repouso, da posição horizontal. Determine (a) a sua aceleração angular, quando largada e (b) a força exercida pelo pivô sobre a barra, neste intante.**




**O torque em relação ao eixo de rotação é dado apenas pela força peso.**

$$\tau_{ext} = I\alpha = Px_{cm}$$

$$\alpha = \frac{Px_{cm}}{I}$$

$$\alpha = \frac{Mg(L/2)}{(1/3)ML^2} = \frac{3g}{2L}$$

$$F_{ext} = Ma_{cm}$$

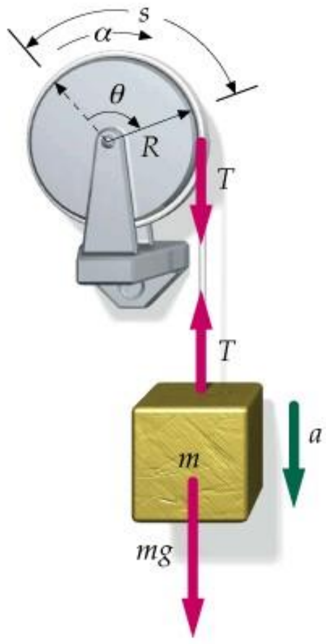
$$Mg - F_0 = Mx_{cm}\alpha$$

$$F_0 = M(g - x_{cm}\alpha) = Mg/4$$

# Exemplo



**Um objeto de massa m está suspenso por um fio leve que foi enrolado na polia com momento de inércia I e raio R. A polia é largada do repouso. Determine a tensão no fio e a aceleração do objeto.**




**Vamos aplicar a Segunda Lei de Newton à polia (rotação) e ao objeto. (o peso e a normal na polia, não geram torque)**

$$\begin{cases} \tau_{ext} = I\alpha = TR \\ mg - T = ma_t \end{cases}$$

**Com** $a_t = R\alpha$

$$\frac{mg - T}{m} = R\frac{TR}{I}$$

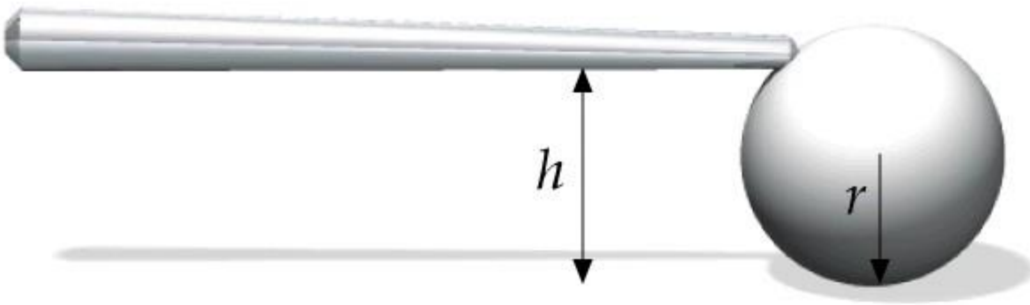
$$T = \frac{mg}{1 + (mR^2 / I)}$$

$$a_t = \frac{mg - T}{m}$$

$$a_t = \frac{g}{1 + (I / mR^2)}$$

# Jogo de Sinuca






**Um taco atinge uma bola de bilhar em um ponto a uma distância d acima do centro da bola. Determine o valor de d para que a bola role, sem deslizar.**

**Vamos aplicar a Segunda Lei de Newton à bola (rotação e translação). (o peso e a normal na polia, não geram torque)**

$$\begin{cases} \tau_{ext} = I\alpha = Fd \\ F = ma_{cm} \end{cases}$$

**Com**

$$a_{cm} = R\alpha$$

$$\frac{F}{m} = R\frac{Fd}{I}$$

$$d = \frac{I}{mR} = \frac{(2/5)mR^2}{mR}$$

$$d = \frac{I}{mR} = \frac{2R}{5}$$