

# **Física I p/ IO – FEP111 (4300111)**

2º Semestre de 2013

Instituto de Física  
Universidade de São Paulo

Professor: **Luiz Carlos C M Nagamine**

**E-mail:** [nagamine@if.usp.br](mailto:nagamine@if.usp.br)

**Fone:** 3091.6877

## Colisões Unidimensionais

Considere um sistema com dois corpos que se movem sobre uma linha reta. Como as forças de interação entre os corpos são internas, a Quantidade de Movimento do sistema se conserva.

Seja um corpo de massa  $m_1$  com velocidade  $v_{1i}$ , que se aproxima de outro com massa  $m_2$  e velocidade  $v_{2i}$ , com  $v_{2i} < v_{1i}$ . A conservação da Quantidade de Movimento nos fornece:

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

Para determinar  $v_{1f}$  e  $v_{2f}$ , necessitamos outra equação.

### 1º caso: Colisões perfeitamente inelásticas

Neste caso, as velocidades depois da colisão serão iguais.  $v_{1f} = v_{2f} = v_{cm}$

$$(m_1 + m_2) v_{cm} = m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}$$

$$v_{cm} = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2}$$

## Relação entre Energia Cinética e Momento

Considere um corpo de massa  $m$  que se move com velocidade  $v$ .

A sua Quantidade de Movimento é

$$p = mv$$

Enquanto, a sua Energia Cinética é

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

$$K = \frac{m^2v^2}{2m} = \frac{p^2}{2m}$$

Se um corpo colide inelasticamente com um segundo corpo em repouso, temos :

**Energia Cinética inicial:**  $K_i = \frac{P_{sis}^2}{2m_1}$  , com  $p_{1i} = m_1v_{1i} = P_{sis}$

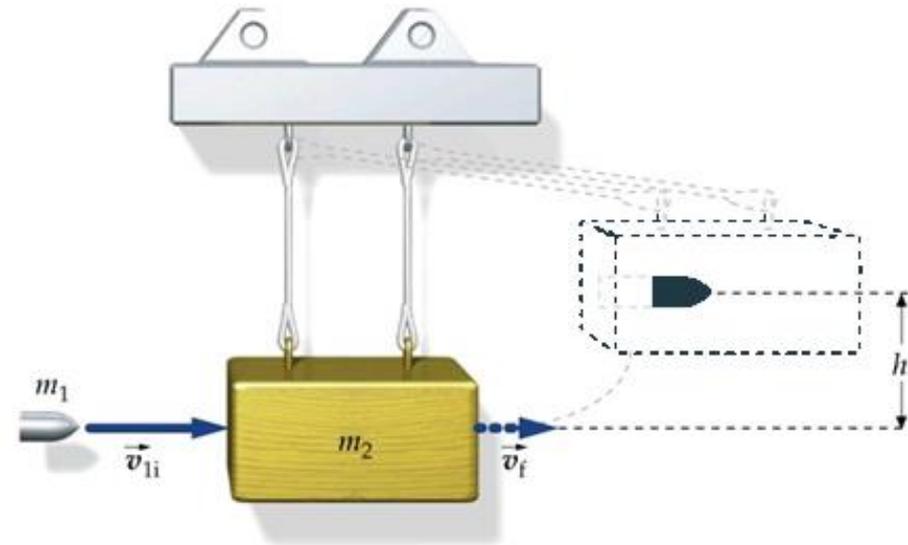
Considerando a conservação do momento, a Energia Cinética final é:

$$K_f = \frac{P_{sis}^2}{2(m_1 + m_2)}$$

Portanto, houve redução da Energia Cinética

## Pêndulo Balístico

Um projétil é atirado em um bloco de madeira dependurado. O bloco com o projétil, oscila subindo. Considerando a altura máxima atingida, determine a velocidade do projétil.



Usando a conservação do momento durante a colisão, temos:

$$m_1 v_{1i} = (m_1 + m_2) v_f$$

Usando a conservação da Energia Mecânica após a colisão, temos:

$$\frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_f^2 = (m_1 + m_2) gh$$

$$v_{1i} = \frac{(m_1 + m_2)}{m_1} v_f$$

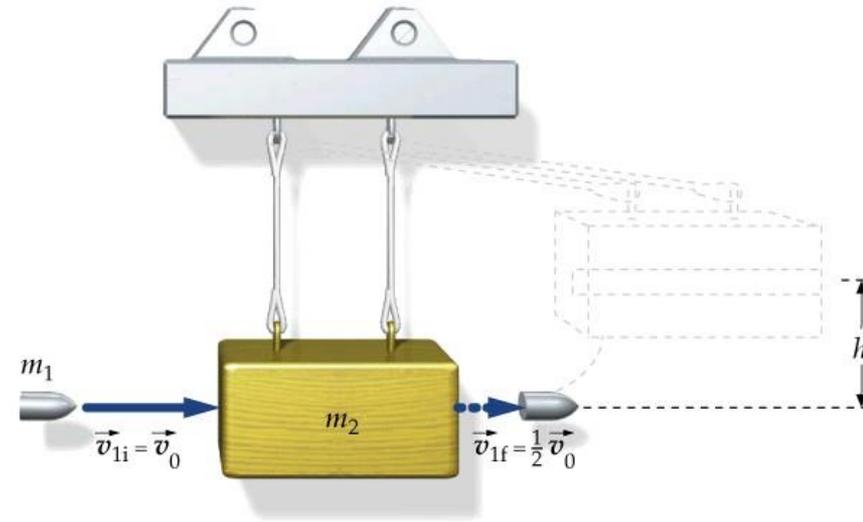
$$v_f = \sqrt{2gh}$$

Portanto:

$$v_{1i} = \frac{(m_1 + m_2)}{m_1} \sqrt{2gh}$$

## Pêndulo Balístico

Como no problema anterior, porém supondo que o projétil atravessou a madeira, perdendo metade de sua velocidade inicial. Determine a altura  $h$ , alcançada pelo bloco.



Usando a conservação do momento durante a colisão, temos:

$$m_1 v_{1i} = m_2 v_2 + m_1 \frac{v_{1i}}{2}$$

$$v_2 = \frac{m_1}{m_2} \frac{v_{1i}}{2}$$

$$h = \frac{v_2^2}{2g}$$

Usando a conservação da Energia Mecânica após a colisão, temos:

$$\frac{1}{2} m_2 v_2^2 = m_2 g h$$

Portanto:

$$h = \frac{m_1^2 v_{1i}^2}{8m_2^2 g}$$

## 2º caso: Colisões Elásticas

Em colisões elásticas, além da Quantidade de Movimento, também a Energia Cinética do sistema, se conserva.

Seja um corpo de massa  $m_1$  com velocidade  $v_{1i}$ , que se aproxima de outro com massa  $m_2$  e velocidade  $v_{2i}$ , com  $v_{2i} < v_{1i}$ .

A conservação da Quantidade de Movimento nos fornece:

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

Da conservação da Energia Cinética, temos:

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

$$v_{1i} - v_{2i} = v_{2f} - v_{1f}$$

Em colisões elásticas, a rapidez de separação é igual à rapidez de aproximação.

Um bloco de 4,0 kg, move-se para a direita a 6,0 m/s e sofre uma colisão elástica frontal com um bloco de 2,0 kg que se move para a direita a 3,0 m/s. Encontre as velocidades finais dos blocos.

A conservação da Quantidade de Movimento nos fornece:

$$\begin{aligned}
 m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} &= m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \\
 (4,0)(6,0) + (2,0)(3,0) &= (4,0)v_{1f} + (2,0)v_{2f} \\
 2v_{1f} + v_{2f} &= 15m/s \\
 v_{2f} - v_{1f} &= 3m/s \\
 \\ \\
 v_{1f} &= 4,0m/s \\
 v_{2f} &= 7,0m/s
 \end{aligned}$$

E, temos também:

$$v_{1i} - v_{2i} = v_{2f} - v_{1f}$$

$$(6,0) - (3,0) = v_{2f} - v_{1f}$$

## Colisões Elásticas

Em colisões elásticas, além da Quantidade de Movimento, também a Energia Cinética do sistema, se conserva.

Na colisão entre dois corpos, estando 1 em repouso, a conservação da Quantidade de Movimento nos fornece:

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

E, temos também:

$$v_{1i} = v_{2f} - v_{1f}$$

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

Verificar o que acontece se  $m_1 = m_2$ ,  $m_1 \gg m_2$  e  $m_1 \ll m_2$ .

## Colisões Bi e Tridimensionais

**Deve-se trabalhar vetorialmente e a conservação da Quantidade de Movimento se aplica a cada uma das componentes (x, y e z).**

### Colisão inelástica

$$m_1 \vec{v}_{1i} + m_2 \vec{v}_{2i} = (m_1 + m_2) \vec{v}_f$$

**onde:**

$$\vec{v}_f = \vec{v}_{cm}$$

Um corpo de massa  $m_1$ , com rapidez de 20 m/s colide com um segundo corpo de massa  $m_2=2m_1$ . O segundo corpo está inicialmente em repouso. Depois da colisão o primeiro corpo está se movendo a 15 m/s a um ângulo de  $25^\circ$  com a orientação da sua velocidade inicial. Qual é a orientação de afastamento do segundo corpo? Qual é a velocidade de escape do segundo corpo? A energia cinética se conservou?

$$m_1 \vec{v}_{1i} = +m_1 \vec{v}_{1f} + m_2 \vec{v}_{2f}$$

Para as componentes temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos \theta_1 + m_2 v_{2f} \cos \theta_2 \\ 0 = m_1 v_{1f} \operatorname{sen} \theta_1 + m_2 v_{2f} \operatorname{sen} \theta_2 \end{array} \right.$$

e  $m_2 = 2m_1$

## Colisões Bi e Tridimensionais

**Deve-se trabalhar vetorialmente e a conservação da Quantidade de Movimento se aplica a cada uma das componentes (x, y e z).**

**Colisão elástica (este é o caso mais complicado!)**

$$m_1 \vec{v}_{1i} + m_2 \vec{v}_{2i} = m_1 \vec{v}_{1f} + m_2 \vec{v}_{2f}$$

**Para as componentes temos:**

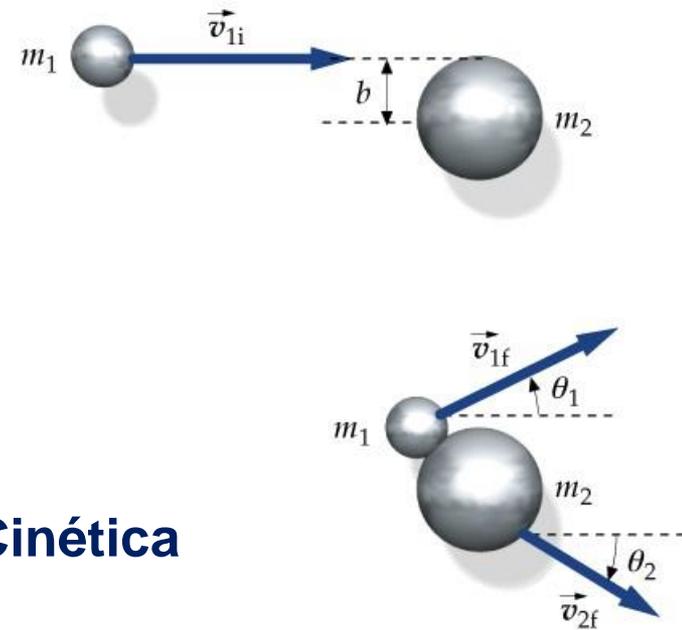
$$m_1 v_{1ix} + m_2 v_{2ix} = m_1 v_{1fx} + m_2 v_{2fx}$$

$$m_1 v_{1iy} + m_2 v_{2iy} = m_1 v_{1fy} + m_2 v_{2fy}$$

**e temos também a conservação da Energia Cinética**

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

**Em geral, fica faltando uma equação para se resolver o sistema. Alguma condição específica deve ser fornecida, como por exemplo o parâmetro de impacto  $b$ .**



## Massa Continuamente Variável

$$\vec{F}_{res} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

definição de Newton para a sua segunda lei.

$$\vec{F}_{res} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm}{dt} \vec{v}$$

$$\vec{F}_{res} - \frac{dm}{dt} \vec{v} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

Empuxo

A taxa de variação da massa, multiplicada pela velocidade da massa variante, tem dimensão de Força e recebe o nome de Empuxo.

## Massa Continuamente Variável

Considere um corpo de massa  $M$  se movendo com velocidade  $\vec{v}$  e sendo bombardeado por um fluxo contínuo de matéria, com velocidade  $\vec{u}$ .

Aplicando-se o teorema do Impulso ao sistema, temos:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{res} \Delta t &= \Delta \vec{P} = \vec{P}_f - \vec{P}_i = \\ &= [(M + \Delta M)(\vec{v} + \Delta \vec{v}) + \Delta M \Delta \vec{v}] - [M\vec{v} + \Delta M \vec{u}]\end{aligned}$$

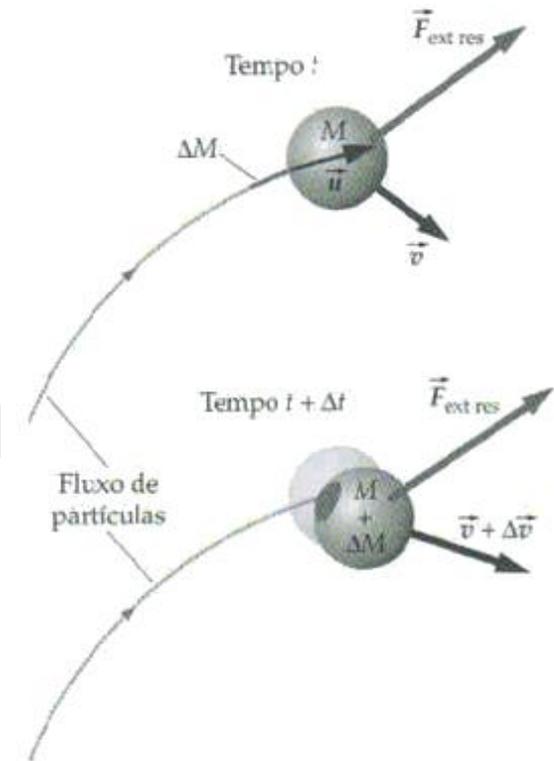
Rearranjando os termos, temos:

$$\vec{F}_{res} \Delta t = M \Delta \vec{v} + \Delta M (\vec{v} - \vec{u}) + \Delta M \Delta \vec{v}$$

e, dividindo por  $\Delta t$  e aplicando o limite  $\Delta t \rightarrow 0$ , temos:

$$\vec{F}_{res} = M \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dM}{dt} (\vec{v} - \vec{u}) + \frac{dM}{dt} \Delta \vec{v} \quad \longrightarrow \quad \vec{v} - \vec{u} = \vec{v}_{rel}$$

$\mathbf{0}$



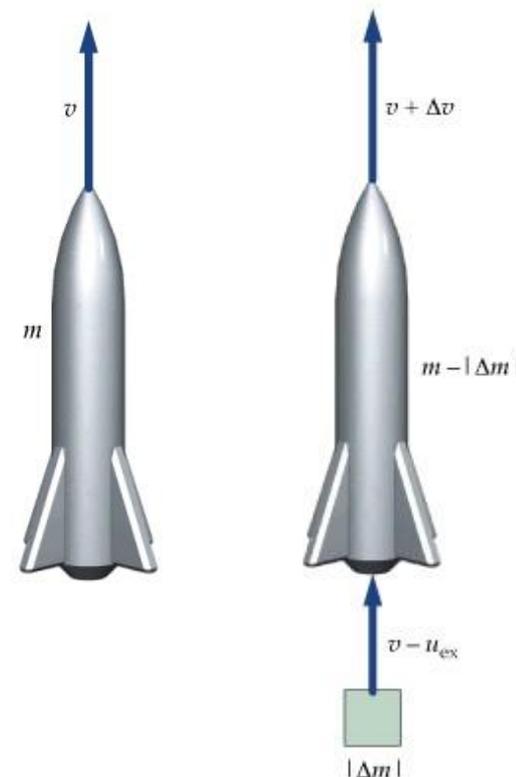
Considere um foguete com a massa ( $M$ ) variando continuamente, à medida que ele queima o combustível. Suponha que o foguete esteja subindo na vertical com velocidade  $v$  e que a taxa de queima de combustível seja  $R$

$$M = M_0 - Rt \qquad R = \frac{dM}{dt}$$

Considere que os gases escapem com velocidade  $u_e$  em relação ao foguete e que a única força externa seja a gravitacional. Considere como sistema o conjunto foguete + combustível restante.

$$M\vec{g} - R\vec{u}_e = M \frac{d\vec{v}}{dt} \longrightarrow -Mg + Ru_e = M \frac{dv_y}{dt}$$

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{Ru_e}{M_0 - Rt} - g$$



$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{Ru_e}{M_0 - Rt} - g \quad \text{Integrando, temos:}$$

$$v_y = \int_0^t \left( \frac{Ru_e}{M_0 - Rt} - g \right) dt$$

$$\int_0^t \frac{Ru_e}{M_0 - Rt} dt = u_e \int_0^t \frac{1}{M_0/R - t} dt$$

$$\int_0^t \frac{1}{b-t} dt = -\ln \frac{b-t}{b}$$

$$v_y = u_e \ln \left( \frac{M_0}{M_0 - Rt} \right) - gt$$

