FAP0192- Mecânica para Geociências

2º Semestre de 2013

Instituto de Física
Universidade de São Paulo

Professor: **Luiz C. C. M. Nagamine**
E-mail: nagamine@if.usp.br
Fone: 3091.6877

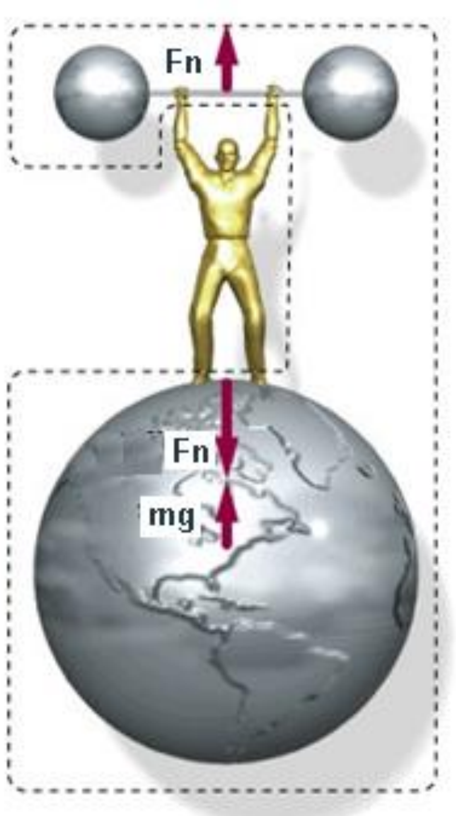
30/setembro e 05/outubro

Energia Potencial

O trabalho está associado com a transferência de energia devido a uma força.

Trabalho realizado sobre uma partícula, tranfere energia cinética à partícula.

Porém, se tivermos um sistema de corpos, parte da energia transferida pode ser armazenada na forma de energia potencial.



Considere o sistema formado pela Terra e o haltere.

Considere que a pessoa é externa ao sistema.

As forças externas que atuam no sistema são produzidas pela pessoa: Força de contato das mãos sobre o haltere, força de contato dos pés com a Terra e a força gravitacional.

Destas forças, apenas a de contato sobre o haltere pode produzir deslocamentos e realizar trabalho. Como esta força é igual a mg (m= massa do haltere), o trabalho é mgh.

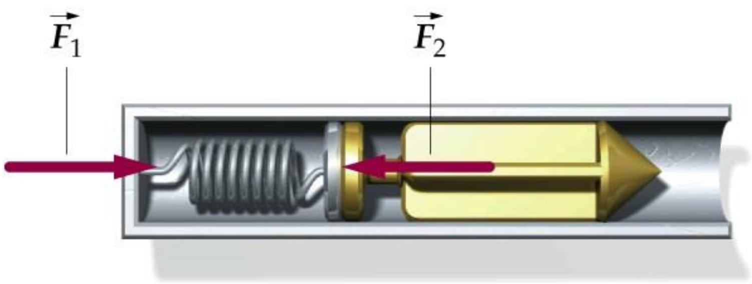
A energia transferida para o sistema é armazenada na forma de energia potencial gravitacional.

Energia Potencial

O trabalho está associado com a transferência de energia devido a uma força.

Trabalho realizado sobre uma partícula, tranfere energia cinética à partícula.

Porém, se tivermos um sistema de corpos, parte da energia transferida pode ser armazenada na forma de energia potencial.



Outro sistema que armazena energia associada à sua configuração é uma mola.

Se a mola é comprimida, com forças iguais e opostas, F1 e F2, não existe variação da energia cinética. Portanto, o trabalho realizado é armazenado na forma de energia potencial elástica.

Como o deslocamento é no mesmo sentido da força, o trabalho realizado é positivo.

Forças conservativas

Quando voce é transportado por um elevador até o topo de um edifício de altura h, o trabalho realizado pela força peso é -mgh.

Ao retornar ao solo o trabalho realizado pela força peso é +mgh.

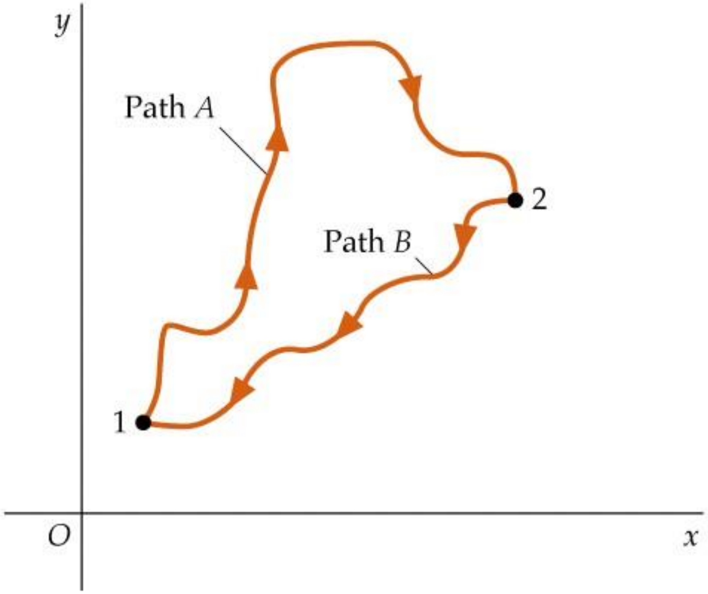
Se este movimento de subida e descida fosse feito através de uma escada rolante, o trabalho da força peso seria o mesmo. Ele independe do caminho seguido, dependendo apenas das posições inicial e final.

Forças que realizam trabalho desta maneira, são chamadas de Forças Conservativas.

O trabalho realizado por uma força conservativa sobre uma partícula é independente do caminho percorrido pela partícula de um ponto ao outro.

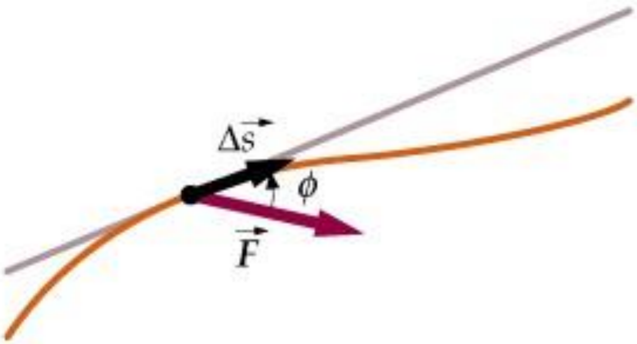
Ou

Uma força é conservativa se o trablho que ela realiza sobre uma partícula é zero quando a partícula percorre qualquer caminho fechado, retornando à posição inicial.



O Trabalho em notação de Produto Escalar

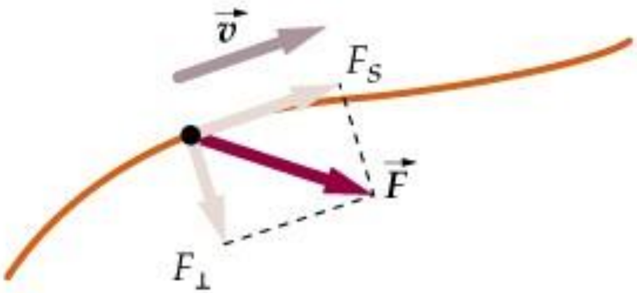
Considerando-se deslocamentos infinitesimais (dl)



(a)

$$dW = F_{//}dl = F\cos\phi dl$$

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{l}$$



(b)

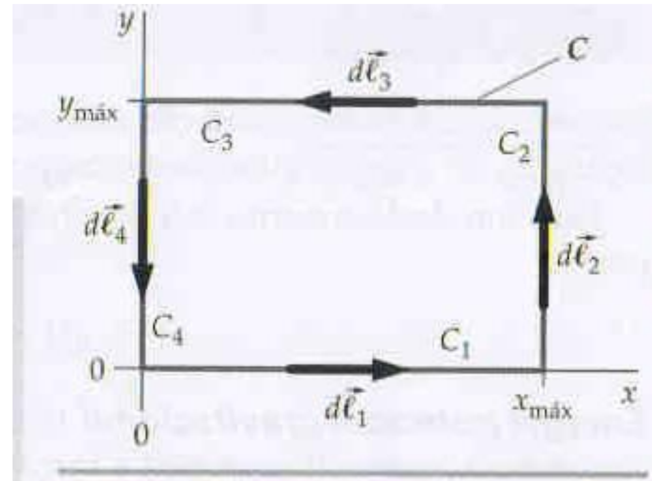
Para um deslocamento de uma posição 1 para uma posição 2, o trabalho realizado é

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F}\cdot d\vec{l}$$

Esta integral é conhecida como Integral de Linha.

Integral em um Caminho Fechado

Calcule o trabalho realizado sobre o caminho fechado, supondo que a força seja dada por



$$\vec{F} = Ax\hat{i}$$

O trabalho é dado por:

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

$$W = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{l}_1 + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{l}_2 + \int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{l}_3 + \int_{C_4} \vec{F} \cdot d\vec{l}_4 = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{l}_1 = \int_0^{x_{max}} Ax\hat{i} \cdot dx\hat{i} = A\int_0^{x_{max}} x dx = \frac{1}{2}Ax_{max}^2 \\
&\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{l}_2 = \int_0^{y_{max}} Ax\hat{i} \cdot dy\hat{j} = 0 = \int_{C_4} \vec{F} \cdot d\vec{l}_4 \\
&\int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{l}_3 = \int_{x_{max}}^0 Ax\hat{i} \cdot dx\hat{i} = A\int_{x_{max}}^0 x dx = -\frac{1}{2}Ax_{max}^2
\end{aligned}\right\}$$

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$$

Este é o caso da força elástica

Funções Energia Potencial

O trabalho realizado por uma força conservativa não depende do caminho, mas apenas dos pontos extremos do caminho.

Esta propriedade pode ser usada para definir a Função Energia Potencial U para uma força conservativa.

Quando voce desce do topo de um edifício, o trabalho realizado pela gravidade diminui a energia potencial do sistema. Portanto, definimos a Função Energia Potencial U de forma que o trabalho realizado pela força conservativa é igual à redução da Função Energia Potencial.

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{l} = -\Delta U$$

Ou

$$\Delta U = U_2 - U_1 = -\int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

Para um deslocamento infinitezimal

$$dU = -\vec{F} \cdot d\vec{l}$$

Energia Potencial Gravitacional

Para a força gravitacional, temos:

$$\vec{F} = -mg\hat{j}$$

Para um deslocamento infinitezimal

$$dU = -\vec{F} \cdot d\vec{l}$$

$$dU = -(-mg\hat{j}) \cdot (dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}) = mgdy$$

Integrando, temos

$$U = \int dU = \int mgdy = mgy + U_0$$

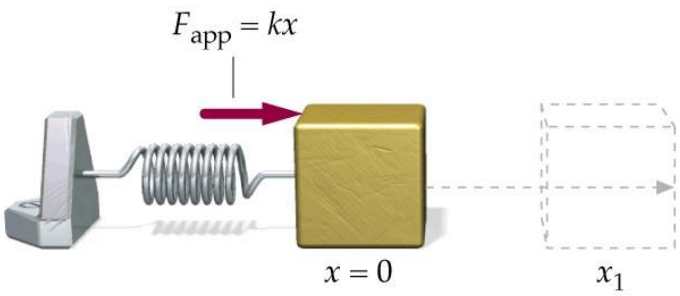
Energia Potencial Gravitacional próximo da superfície da Terra.

$$U = U_0 + mgy$$

U_0 é uma constante arbitrária, a ser definida convenientemente.

Energia Potencial Elástica

Se voce aplica uma força sobre o bloco ao lado e o desloca da posição x=0 até a posição x1, O trabalho realizado pela mola é negativo. Se voce permite que o bloco volte a posição inicial, o trabalho total realizado pela mola é nulo.



Podemos definir a energia potencial elástica:

$$dU = -\vec{F} \cdot d\vec{l}$$

$$dU = -(-kx\hat{i}) \cdot (dx\hat{i}) = kxdx$$

Integrando, temos

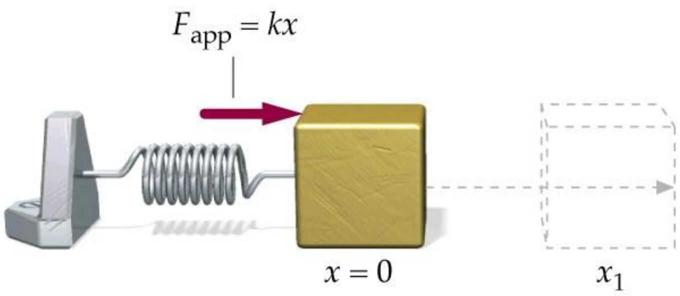
$$U = \int dU = \int kxdx = \frac{1}{2}kx^2 + U_0$$

U_0 é uma constante arbitrária, a ser definida convenientemente. Podemos escolher U_0= 0 (para elongação nula da mola).

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

Energia Potencial Elástica

Qual é o trabalho total realizado sobre o bloco, no movimento de x=0 para x_1?

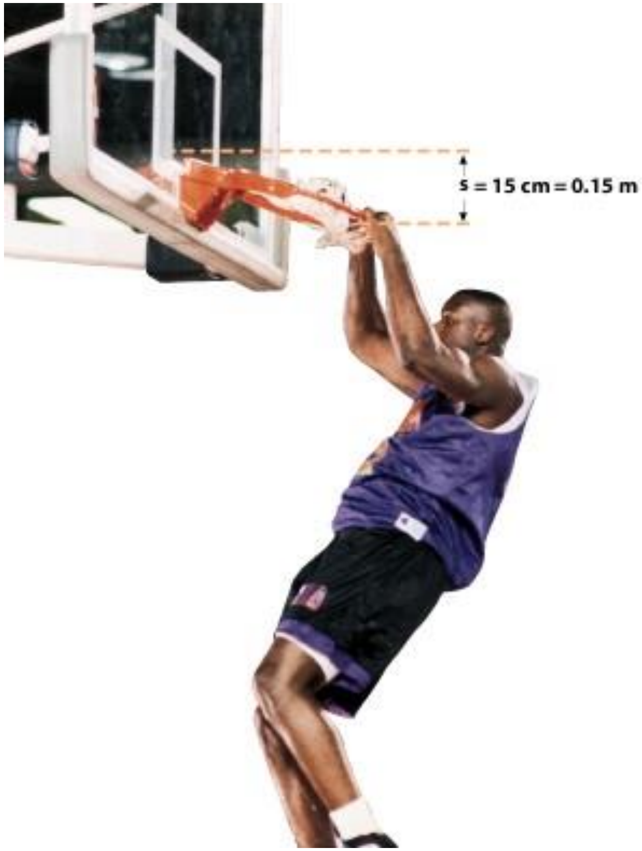


$$W_{Ap} = -W_{mola} = \frac{1}{2}kx^2$$

$$W_{Total} = 0$$

Energia Potencial

Considere o sistema constituido pelo jogador de basquete (m= 110kg), o aro e a Terra. Suponha que a energia potencial do sistema seja zero quando o jogador está no solo. Encontre a energia potencial total quando o jogador está dependurado no aro.



Suponha que o centro de massa do jogador passou de 80 cm do solo, para 130 cm quando dependurado. A constante elástica do aro é 7,2 kN/m.

$$U_{total} = U_g + U_{el} = mgy_{cm} + \frac{1}{2}kx^2$$

$$U_{total} = 540 N.m + 81 N.m = 6{,}2x10^2\, N.m$$

Conservação da Energia Mecânica

Definimos a energia mecânica de um sistema como sendo a soma da energia cinética com a energia potencial do sistema.

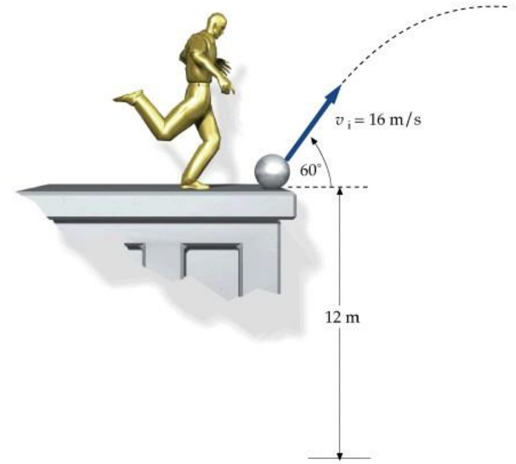
$$E_{mec} = K_{sist} + U_{sist}$$

A energia mecânica de um sistema de partículas é conservada (E_{mec} = constante) se o trabalho total realizado por todas as forças externas e por todas as forças internas não-conservativas for nulo.

$$W_{ext} = \Delta E_{mec} - W_{nc}$$

Exemplos

Próximo à borda da laje de um prédio de 12 m de altura, uma bola é chutada com uma rapidez inicial de 16 m/s a um ângulo de 60°. Desprezando a resistência do ar, encontre (a) a altura máxima atingida pela bola e (b) sua rapidez ao tocar o solo.



Tomamos a bola + Terra, como o sistema.

$$W_{ext} = \Delta E_{mec} - W_{nc} \qquad E_{mec} = K_{sist} + U_{sist}$$

Como não existem forças externas ao sistema, W_{ext}= 0. Como não existem forças internas não-conservativas, W_{nc}= 0. Portanto, a Energia Mecânica do sistema se conserva.

$$0 = \Delta E_{mec} - 0 \qquad \Delta E_{mec} = \Delta K_{sist} + \Delta U_{sist} = 0$$

$$E_{mec_{laje}} = K_{sist_{laje}} + U_{sist_{laje}} = E_{mec_{alto}} = K_{sist_{alto}} + U_{sist_{alto}}$$

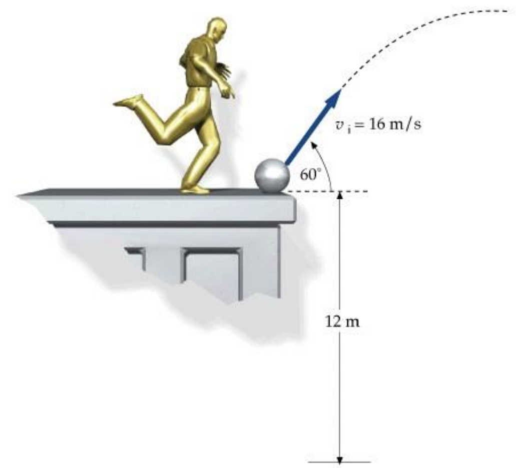
$$\frac{1}{2}mv_{laje}^2 + mgy_{laje} = \frac{1}{2}mv_{alto}^2 + mgy_{alto}$$

Mas, y_{laje}=0, e v_{alto}= $v_{laje}\cos\theta$

$$y_{alto} = \frac{v_{laje}^2 - v_{alto}^2}{2g} = \frac{v_{laje}^2(1-\cos^2\theta)}{2g} = 9{,}8m$$

Exemplos

Próximo à borda da laje de um prédio de 12 m de altura, uma bola é chutada com uma rapidez inicial de 16 m/s a um ângulo de 60°. Desprezando a resistência do ar, encontre (a) a altura máxima atingida pela bola e (b) sua rapidez ao tocar o solo.



Tomamos a bola + Terra, como o sistema.

$$W_{outras} = \Delta K + \Delta U \qquad E_{mec} = K_{sist} + U_{sist}$$

Como não existem forças externas ao sistema e nem forças internas não-conservativas, **W_{outras}= 0. Portanto, a Energia Mecânica do sistema se conserva.**

$$\Delta K_{sist} + \Delta U_{sist} = 0$$

$$E_{mec_{laje}} = K_{sist_{laje}} + U_{sist_{laje}} = E_{mec_{solo}} = K_{sist_{solo}} + U_{sist_{solo}}$$

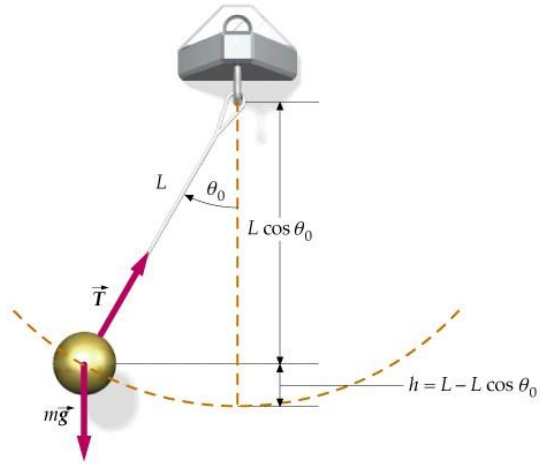
$$\frac{1}{2}mv_{laje}^2 + mgy_{laje} = \frac{1}{2}mv_{solo}^2 + mgy_{solo}$$

Mas, y_{laje}=0, y_{laje}=0 e v_{alto}= $v_{laje}\cos\theta$

$$v_{solo}^2 = v_{laje}^2 - 2gy_{solo} \qquad v_{solo} = \sqrt{v_{laje}^2 - 2gy_{solo}} = 22m/s$$

Exemplos

Um pêndulo consiste de bola de massa m presa a um fio de comprimento L. A bola é largada do repouso, com o fio fazendo um ângulo θ_0. Quando passa pelo ponto inferior, (a) qual a rapidez da bola e (b) a tensão no fio. Despreze a resistência do ar.



Tomamos a pêndulo + Terra, como o sistema.

$$W_F + W_{Fat} = \Delta K + \Delta U \qquad E_{mec} = K_{sist} + U_{sist}$$

Como não existem forças externas ao sistema, W_{ext}= 0. A tensão no fio é uma força interna não-conservativa, mas como esta força é perpendicular à trajetório, W_{nc}= W_T= 0. Portanto, a Energia Mecânica do sistema se conserva.

$$0 = \Delta E_{mec} - 0 \qquad \Delta E_{mec} = \Delta K_{sist} + \Delta U_{sist} = 0$$

$$\frac{1}{2}mv_i^2 + mgy_i = \frac{1}{2}mv_f^2 + mgy_f$$

Mas, y_i=Lcosθ_0, y_i=0 e y_f= L

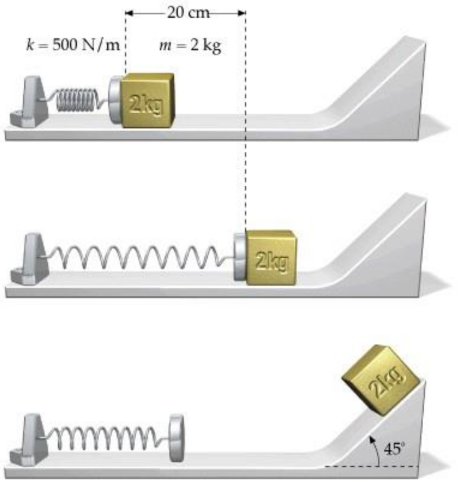
$$v_f^2 = 2gL(1-\cos\theta_0) \qquad v_f = \sqrt{2gL(1-\cos\theta_0)}$$

$$T - mg = ma_{cp} = m\frac{v_f^2}{L} \qquad T = m(g + \frac{v_f^2}{L}) = m[g + 2g(1-\cos\theta_0)]$$

$$T = mg(3 - 2\cos\theta_0)$$

Exemplos

Um bloco de massa 2kg, em uma superfície sem atrito é empurrado 30 cm contra uma mola (K= 500N/m). O bloco é liberado e a mola se descomprime. O bloco desliza e sobe um plano sem atrito, com ângulo de 45°. Qual é a altura final atingida pelo bloco sobre a rampa, ao parar.



Tomamos a todos os elementos da figura + Terra, como o sistema.

$$W_{ext} + W_{F_{at}} = \Delta E_{mec} \qquad E_{mec} = K_{sist} + U_{sist}$$

Como não existem forças externas ao sistema, W_{ext}= 0. Como não existem forças internas não-conservativas, W_{nc}= 0. Portanto, a Energia Mecânica do sistema se conserva.

$$\frac{1}{2}mv_i^2 + mgy_i + \frac{1}{2}kx_i^2 = \frac{1}{2}mv_f^2 + mgy_f + \frac{1}{2}kx_f^2$$

Mas, v_i=0, y_i=0, v_f=0, e x_f= 0

$$\frac{1}{2}kx_i^2 = mgy_f \qquad y_f = \frac{kx_i^2}{2mg} = 0{,}51m$$

O carrinho em uma montanha russa parte de uma altura H. Quando ele está entrando no loop, cai um saco de areia sobre ele, que reduz a velocidade em 25%. Considere que o loop tem metade da altura inicial e despreze os atritos. O carrinho conseguirá completar o loop?

Tomamos a todos os elementos da figura + Terra, como o sistema.

$$W_{ext} = \Delta E_{mec} - W_{nc} \qquad E_{mec} = K_{sist} + U_{sist}$$

W_{ext}= 0 e W_{nc}= 0. Portanto, a Energia Mecânica do sistema se conserva.

$$\frac{1}{2}mv_i^2 + mgy_i = \frac{1}{2}mv_1^2 + mgy_1 \qquad mg4R = \frac{1}{2}mv_1^2 \qquad v_1 = \sqrt{8Rg}$$

$$v_2 = 0{,}75v_1 = 0{,}75\sqrt{8Rg}$$

$$\frac{1}{2}mv_2^2 + mgy_2 = \frac{1}{2}mv_{topo}^2 + mgy_{topo}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}mv_{topo}^2 + mg2R \\ v_{topo}^2 = 0{,}75^2 8Rg - 4Rg = 0{,}5Rg \end{cases}$$

$$F_n + mg = m\frac{v_{topo}^2}{R} \qquad F_n = -0{,}5mg$$

O carrinho não completa o loop !!!

Um trenó está deslizando no plano com uma rapidez inicial de 4,0 m/s. Se o coeficiente de atrito cinético for 0,14, que distância o trenó percorrerá?

Tomamos o trenó + Terra, como o sistema.

$$W_{ext} = \Delta E_{mec} - W_{nc} \qquad E_{mec} = K_{sist} + U_{sist}$$

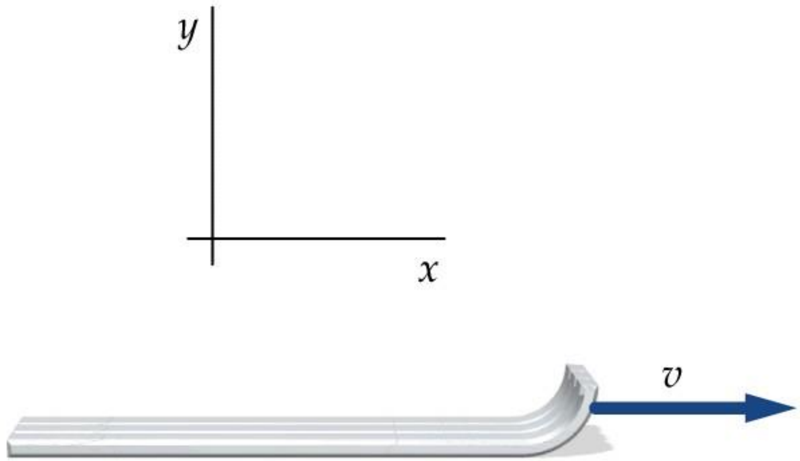
W_{ext}= 0 e $W_{nc} \neq$ 0. Portanto, a Energia Mecânica do sistema não se conserva.

$$W_{ext} = \Delta E_{mec} - W_{nc} = 0 \qquad \Delta K + \Delta U - W_{nc} = \Delta K + f_c x = \Delta K + \mu_c mgx = 0$$

$$\frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2) + \mu_c mgx = 0$$

$$\mu_c gx = \frac{1}{2}v_i^2$$

$$x = \frac{v_i^2}{2\mu_c g} = 5{,}8m$$



Exemplos

Uma criança com 40 kg desce por um escorregador de 4 m de altura, com inclinação de 30°. O seu coeficiente de atrito cinético é 0,35. Partindo do repouso no topo, qual é a sua velocidade ao chegar na base?

Tomamos os elementos da figur + Terra, como o sistema.

$$W_{ext} = \Delta E_{mec} - W_{nc} \qquad E_{mec} = K_{sist} + U_{sist}$$

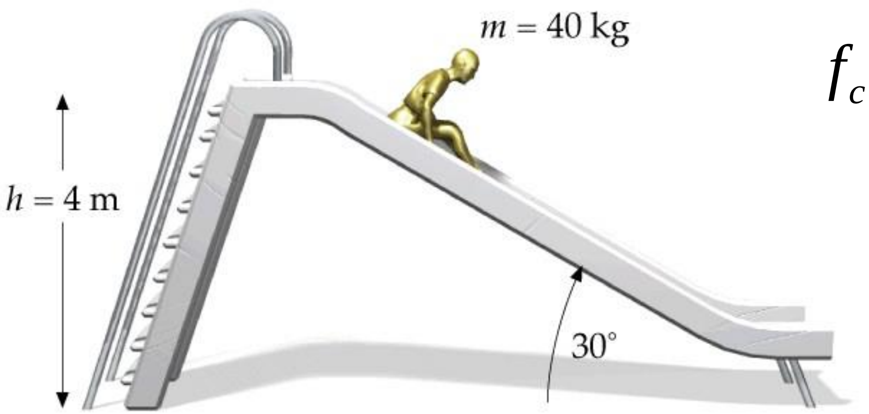
W_{ext}= 0 e W_{nc}≠ 0. Portanto, a Energia Mecânica do sistema não se conserva.

$$W_{ext} = \Delta E_{mec} - W_{nc} = 0$$

$$\Delta K + \Delta U - W_{nc} = \Delta K + \Delta U + f_c s = 0$$

$$\Delta K = \frac{1}{2} m(v_f^2 - v_i^2) = \frac{1}{2} m v_f^2$$

$$\Delta U = -mgh$$



$$f_c s = \mu_c mg \cos\theta \frac{h}{\sin\theta}$$

$$v_f^2 = 2gh\left(1 - \mu_c \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$$