Mecânica (4310192)

2º Semestre de 2013

Instituto de Física
Universidade de São Paulo

Professor: **Luiz Carlos C. M. Nagamine**
E-mail: nagamine@if.usp.br
Fone: 3091.6877

23 e 27 de setembro

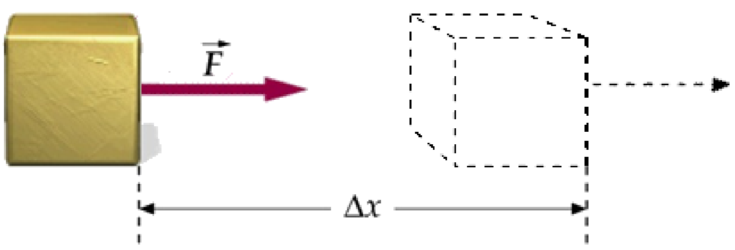
Trabalho realizado por uma força constante

Diferentemente do conceito intuitivo, o trabalho está associado com a transferência de energia devido a uma força.

Trabalho é uma grandeza escalar (positiva ou negativa).

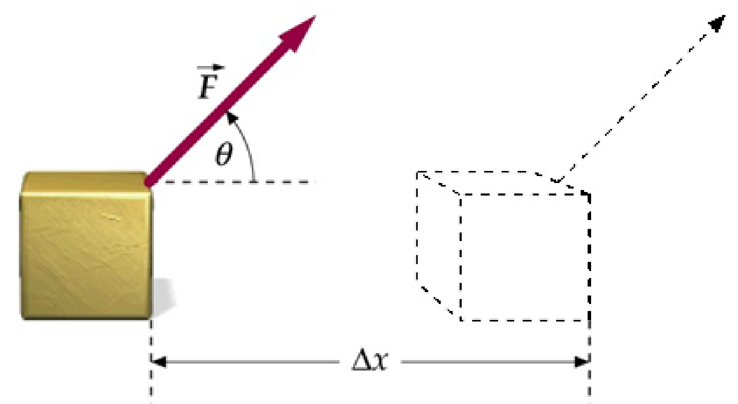
O trabalho realizado pelo corpo A sobre B é positivo se energia é transferida de A para B.

Trabalho é realizado sobre um corpo por uma força, quando o ponto de aplicação da força se desloca.



$$W = F\left|\Delta x\right|$$

W é o Trabalho realizado



$$W = F_x\left|\Delta x\right| = F\cos\theta\left|\Delta x\right|$$

Trabalho realizado por uma força constante

Faça uma estimativa sobre o trabalho realizado por voce para levar um computador de massa 2kg, da frente até o fundo da sala.

Se a aceleração é nula, então

$$W = 0$$

No SI, a unidade para o Trabalho é o Joule (J)

1 J = 1 N.m

Trabalho realizado por diversas forças

O trabalho total sobre um sistema é a soma do trabalho realizado por cada força.

$$W = F_{1x}\Delta x_1 + F_{2x}\Delta x_2 + F_{3x}\Delta x_3 + \cdots$$

Se o trabalho é realizado sobre uma partícula, então todos os deslocamentos são idênticos.

$$W = (F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + \cdots)\Delta x = F_{res_x}\Delta x$$

O teorema do Trabalho-Energia Cinética

Quando forças realizam trabalho sobre uma partícula, o resultado é uma variação da energia cinética da partícula.

Se a força resultante é constante, a aceleração é constante.

$$F_{res_x} = ma_x \qquad v_f^2 = v_i^2 + 2a_x\Delta x \longrightarrow a_x = \frac{1}{2\Delta x}(v_f^2 - v_i^2)$$

$$F_{res_x} = m\frac{1}{2\Delta x}(v_f^2 - v_i^2) \longrightarrow F_{res_x}\Delta x = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

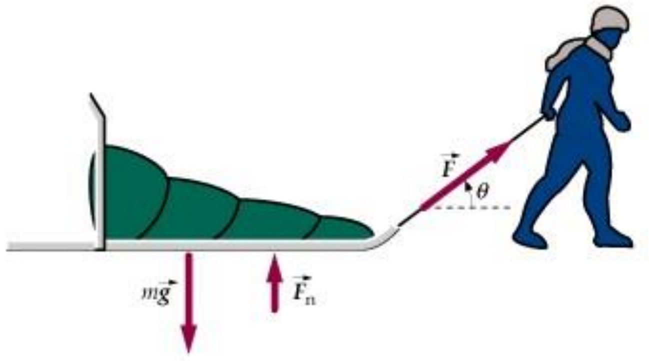
Definimos a energia cinética como sendo: $K = \frac{1}{2}mv^2$

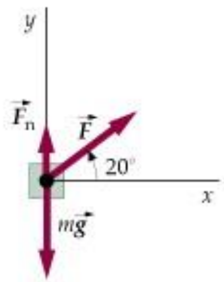
Teorema do Trabalho-Energia Cinética: $W_{total} = \Delta K$

No SI, a unidade para a Energia Cinética é o Joule (J)

O teorema do Trabalho-Energia Cinética

Suponha que voce puxa um trenó de massa 80 kg, com uma força de 180 N a 40° em relação à horizontal. Encontre (a) o trabalho que voce realiza. (b) a rapidez do trenó após se deslocar 5,0 m, tendo partido do repouso.





(a)

$$W_{total} = W_{voce} = F_x \Delta x = F\cos\theta \Delta x$$

$$W_{voce} = 689 J$$

(b)

$$W_{total} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

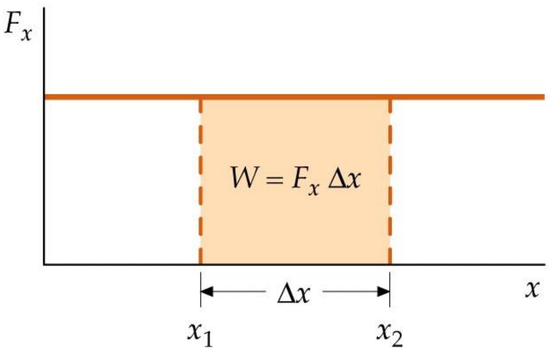
$$v_f^2 = \frac{2W_{total}}{m}$$

$$v_f = 4{,}2 m/s$$

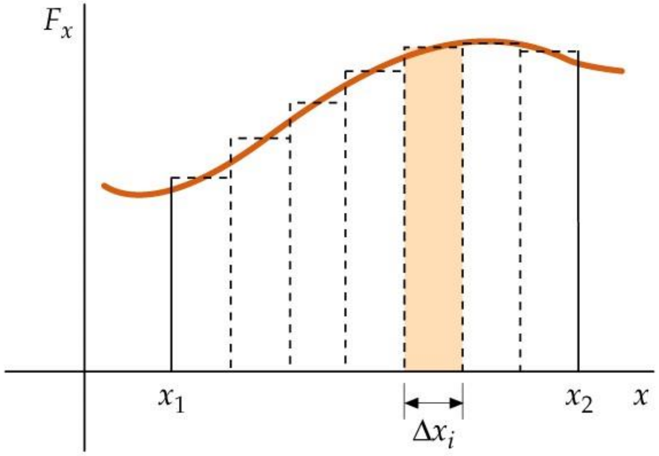
O Trabalho realizado por força variável

Frequentemente as forças têm intensidade ou direção de aplicação variável.

Para força constante, temos



Se a força varia, podemos dividir o movimento em pequenas seções



$$W = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_i F_{xi} \Delta x_i$$

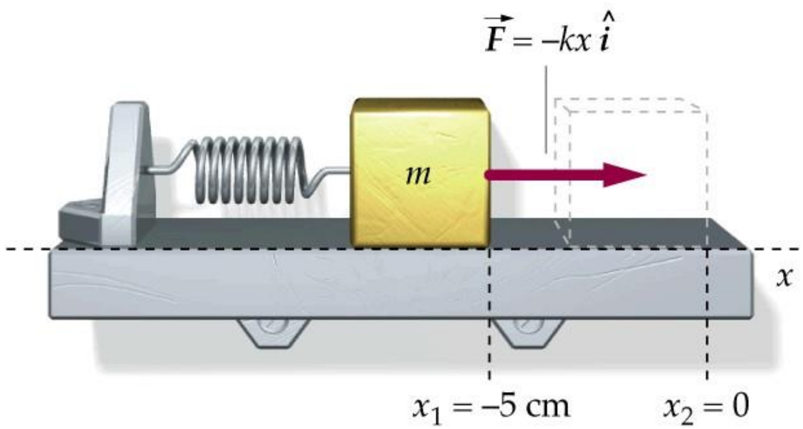
$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx$$

Área sob a curva F_x versus x

O Trabalho realizado por uma mola (Lei de Hooke)

Considere um bloco sob a ação de uma mola.

A força exercida pela mola é dada pela Lei de Hooke



$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx = \int_{x_i}^{x_f} (-kx) dx$$

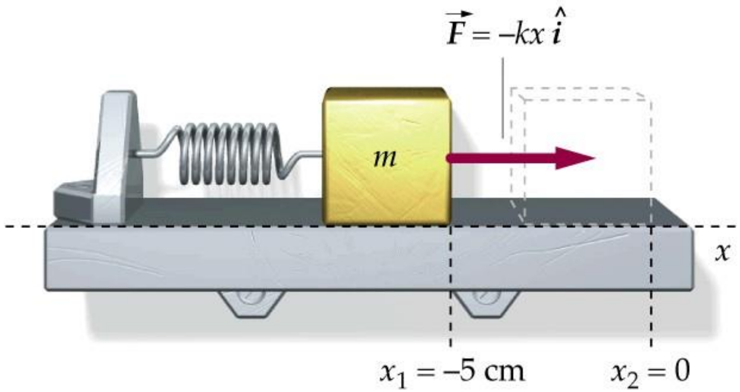
$$W = -k \int_{x_i}^{x_f} x dx = -k\left(\frac{x_f^2}{2} - \frac{x_i^2}{2}\right)$$

$$W = \frac{1}{2} k x_i^2 - \frac{1}{2} k x_f^2$$

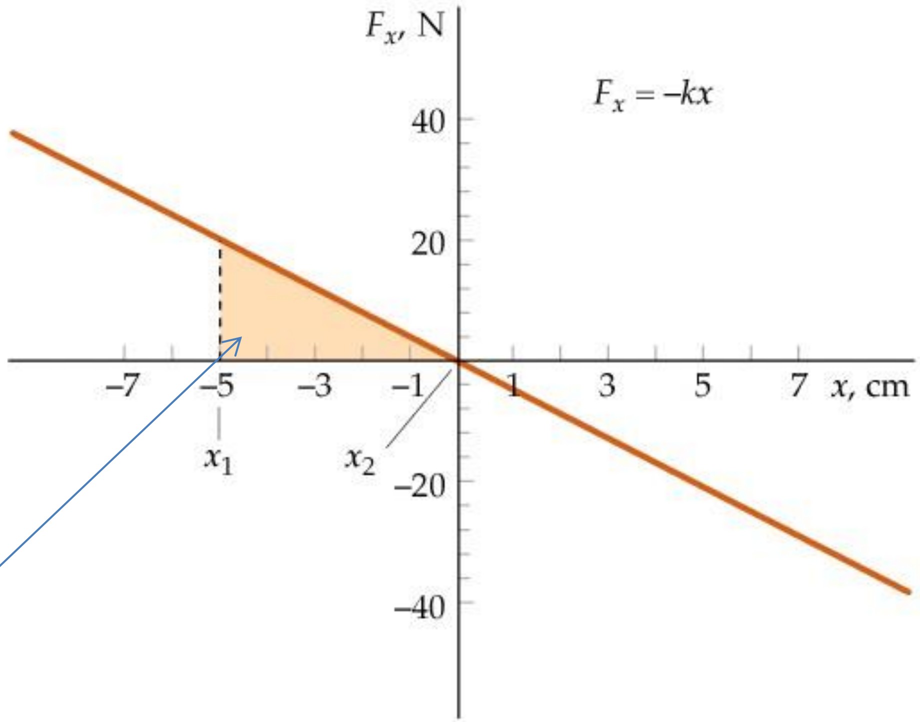
O Trabalho realizado por uma mola (Lei de Hooke)

Considere um bloco sob a ação de uma mola.

A força exercida pela mola é dada pela Lei de Hooke



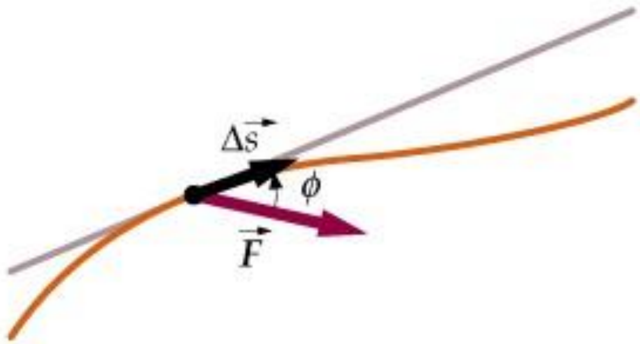
Área sob a curva F_x versus x



$$W = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2$$

O Produto Escalar – Movimento tridimensional

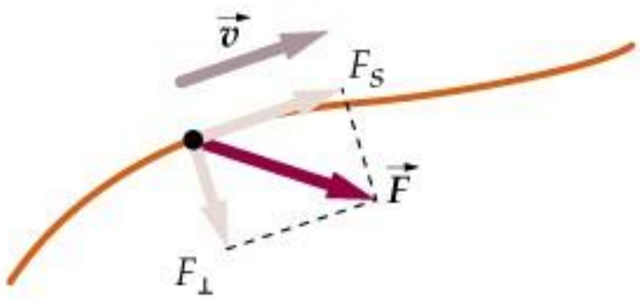
O trabalho depende da componente da força na direção do movimento.



(a)

$$dW = F_{//}dl = F\cos\phi dl$$

Esta combinação de dois vetores com o cosseno do ângulo entre suas orientações é chamada de Produto Escalar dos vetores.

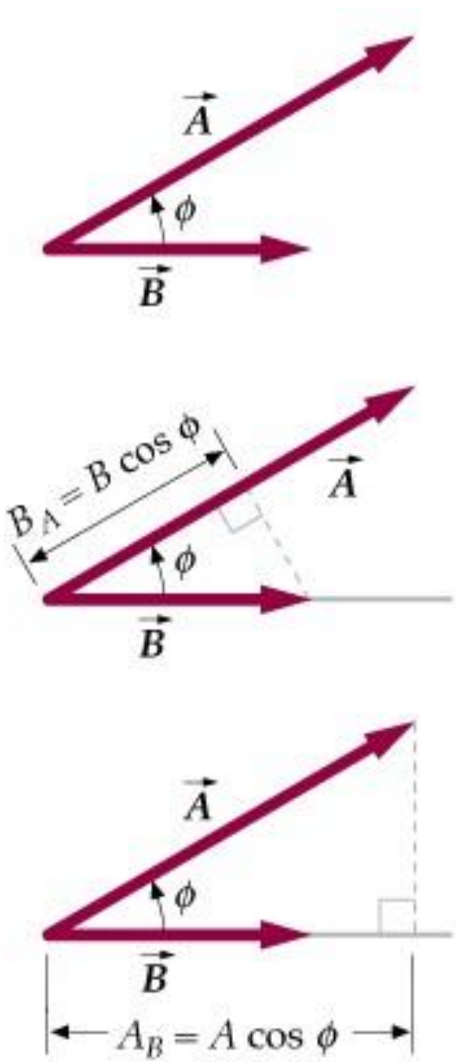


(b)

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\phi$$

O Produto Escalar

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\phi$$



Ou alternativamente,

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k})\cdot(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$$

Mas, como: $\begin{cases} \hat{i}\cdot\hat{i} = 1 \\ \hat{i}\cdot\hat{j} = 0 \end{cases}$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

Se	Então
$\vec{A}$ e $\vec{B}$ são perpendiculares,	$\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$ (porque $\phi = 90°$, $\cos\phi = 0$)
$\vec{A}$ e $\vec{B}$ são paralelos,	$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB$ (porque $\phi = 0°$, $\cos\phi = 1$)
$\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$,	Ou $\vec{A} = 0$ ou $\vec{B} = 0$ ou $\vec{A}\perp\vec{B}$
Ademais,	
$\vec{A}\cdot\vec{A} = A^2$	Porque $\vec{A}$ é paralelo a si mesmo
$\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$	Regra comutativa da multiplicação
$(\vec{A}+\vec{B})\cdot\vec{C} = \vec{A}\cdot\vec{C} + \vec{B}\cdot\vec{C}$	Regra distributiva da multiplicação

O Produto Escalar

a) Determine o ângulo entre os vetores $\vec{A} = (3{,}0\hat{i} + 2{,}0\hat{j})m$ e $\vec{B} = (4{,}0\hat{i} - 3{,}0\hat{j})m$

b) Determine a componente de A na direção de B.

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\phi \longrightarrow \cos\phi = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{AB}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y = 6{,}0m^2$$

$$A = \sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}} = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{13{,}0}m$$

$$B = \sqrt{\vec{B}\cdot\vec{B}} = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = 5{,}0m$$

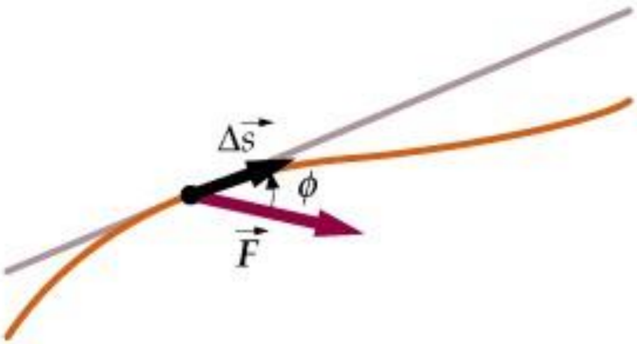
$$\cos\phi = 0{,}333 \longrightarrow \phi = 71^\circ$$

$$A\cos\phi = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{B}$$

$$A\cos\phi = 1{,}2m$$

O Trabalho em notação de Produto Escalar

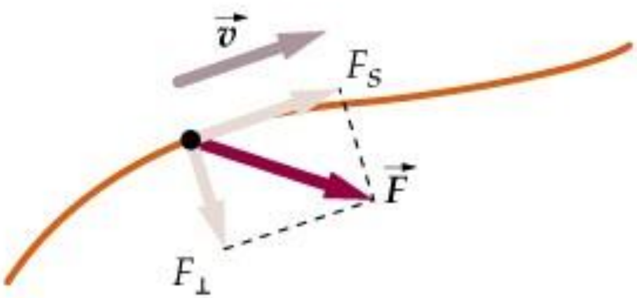
Considerando-se deslocamentos infinitesimais (dl)



(a)

$$dW = F_{//}dl = F\cos\phi\, dl$$

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{l}$$



(b)

Para um deslocamento de uma posição 1 para uma posição 2, o trabalho realizado é

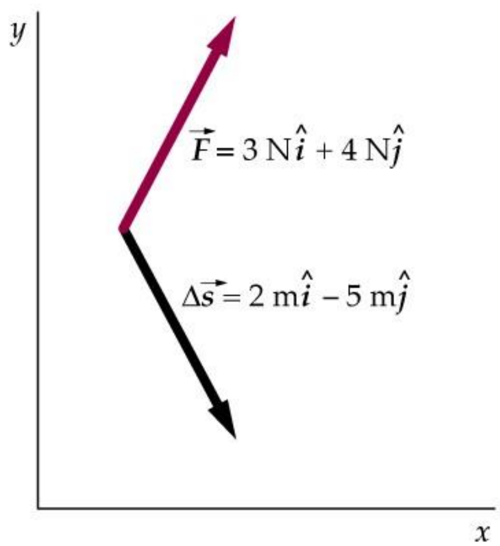
$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F}\cdot d\vec{l}$$

Esta integral é conhecida como Integral de Linha.

O Trabalho em notação de Produto Escalar

Uma partícula sofre um deslocamento l. Durante esse deslocamento, uma força constante F atua sobre a partícula. Determine (a) o trabalho realizado pela força e (b) a componente da força na direção do deslocamento.

$$\vec{l} = (2{,}0i - 5{,}0\,\hat{j})m \qquad \vec{F} = (3{,}0i + 4{,}0\,\hat{j})N$$



$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{l}$$

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F}\cdot d\vec{l}$$

Como a força é constante

$$W = \vec{F}\cdot\vec{l}$$

$$W = (3{,}0i + 4{,}0\,\hat{j})\cdot(2{,}0i - 5{,}0\,\hat{j})$$

$$W = -14{,}0J$$

$$W = \vec{F}\cdot\vec{l} = F_{//}l$$

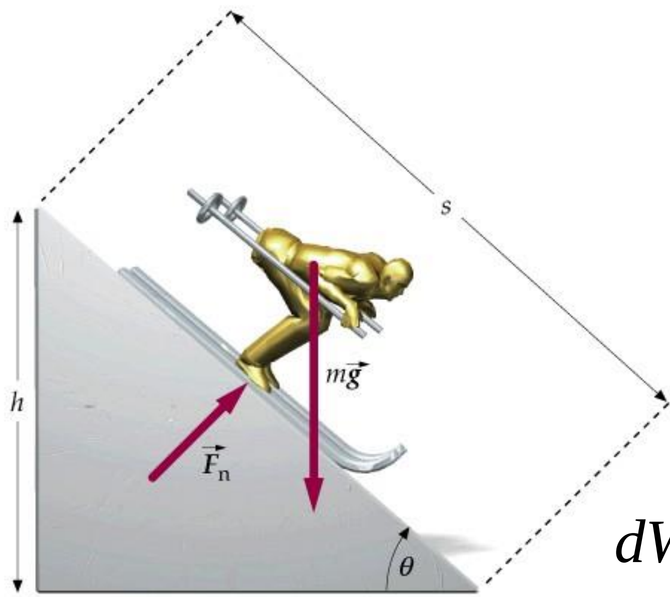
$$F_{//} = \frac{\vec{F}\cdot\vec{l}}{l}$$

$$l = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$$

$$F_{//} = -2{,}6N$$

O Trabalho e Energia Cinética

Dois esquiadores partem de um mesmo ponto em uma colina e chegam na base da colina, através de caminhos diferentes. Um caminho é mais curto e íngreme do que o outro. Qual esquiador terá maior velocidade no ponto de chegada?



Os esquiadores podem ser tomados como partículas, portanto vale o Teorema do Trabalho-Energia Cinética.

$$W_{total} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

Temos a força peso e a força normal.

$$W_{total} = W_n + W_g$$

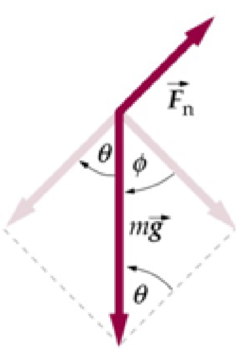
$$dW_n = \vec{F}_n \cdot d\vec{l} = 0$$

$$W_n = 0$$

$$dW_g = \vec{F}_g \cdot d\vec{l}$$

$$W_g = \vec{F}_g \cdot \vec{l} = -mg\hat{j} \cdot (\Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j})$$

$$W_g = -mg\Delta y = mgh$$



$$W_{total} = W_g = \frac{1}{2}mv_f^2$$

$$v_f = \sqrt{2gh}$$

O mesmo para os dois esquiadores.

O Trabalho no Centro de Massa

No caso de sistemas que não podem ser tratados como partículas, uma alternativa é tratar apenas do centro de massa do sistema.

Para um sistema de partículas podemos considerar apenas as forças externas agindo sobre as partículas.

$$\vec{F}_{ext_{res}} = \sum \vec{F}_{ext_i} = M\vec{a}_{cm}$$

$$M = \sum m_i$$

Fazendo-se o produto escalar desta equação pelo vetor velocidade do centro de massa, temos

$$\vec{F}_{ext_{res}} \cdot \vec{v}_{cm} = M\vec{a}_{cm} \cdot \vec{v}_{cm}$$

$$\vec{F}_{ext_{res}} \cdot \vec{v}_{cm} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} M v_{cm}^2\right)$$

$$\vec{F}_{ext_{res}} \cdot \vec{v}_{cm} = \frac{dK_{trans_{cm}}}{dt}$$

Vamos estabelecer uma relação matemática útil

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v^2\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}(\vec{v}\cdot\vec{v})\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}\right) =$$

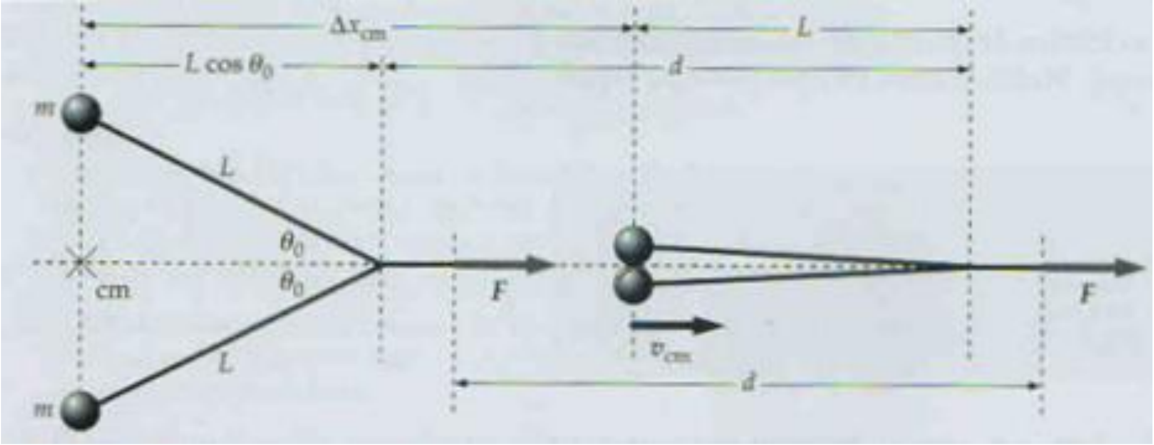
$$= \frac{1}{2}\left(2\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}\right) = \vec{a}\cdot\vec{v}$$

Energia cinética de translação, é a energia cinética associada ao centro de massa.

$$W_{cm} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F}_{ext_{cm}} \cdot d\vec{l}_{cm} = \Delta K_{trans_{cm}}$$

O Trabalho no Centro de Massa

Dois discos idênticos estão sobre uma mesa de ar, ligados por um fio. Os discos têm massa m e estão inicialmente em repouso. Uma força F constante acelera o sistema para a direita. Após o ponto de aplicação da força ter se movido uma distância d, os discos colidem e grudam. Qual é a rapidez dos discos imediatamente após a colisão?



$$W_{cm} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F}_{ext_{cm}} \cdot d\vec{l}_{cm} = \Delta K_{trans_{cm}}$$

$$\int_{P_1}^{P_2} F\hat{i} \cdot dx_{cm}\hat{i} = \Delta K_{trans_{cm}} = K_{trans_f}$$

Determinando Δx

$$\Delta x_{cm} + L = L\cos\theta_0 + d$$

$$\Delta x_{cm} = d - L(1-\cos\theta_0)$$

$$F\Delta x_{cm} = K_{trans_f} = \frac{1}{2}(2m)v_{cm}^2 \longrightarrow v_{cm}^2 = \frac{F}{m}\Delta x_{cm} \longrightarrow v_{cm} = \sqrt{\frac{F[d - L(1-\cos\theta_0)]}{m}}$$

Potência

A definição de Trabalho não informa sobre o tempo tomado para a sua realização.

Em física, a taxa na qual uma força realiza trabalho é chamada de Potência (P). Ou seja, a Potência é a taxa de transferência de Energia, através da realização de um Trabalho.

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{l} = \vec{F} \cdot \vec{v} dt \xrightarrow[\text{Potência}]{} \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = P$$

Dois motores que elevam uma certa carga até uma dada altura gastam a mesma quantidade de energia, mas a potência é maior para a força que realiza o trabalho no menor tempo.

No SI, a unidade para a Potência é o Watt (W)

1 W = 1 J/s

As companhias de energia elétrica usam o kW.h como unidade de energia. Esta é a energia transferida em 1 hora a uma taxa constante de 1 kW.

1 kW.h = (10^3W)(3600s) = 3,6x10^6 W.s = 3,6 MJ

Potência

Um pequeno motor é usado para operar como um elevador que levanta uma carga de tijolos que pesa 500 N até a altura de 10 m, em 20 s, com rapidez constante. O elevador pesa 300 N. Qual é a potência desenvolvida pelo motor?

Potência

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = Fv\cos\phi = Fv$$

$$P = (800N)\frac{10m}{20s} = 400W$$