Mecânica para Geologia -FAP0192

2º Semestre de 2012

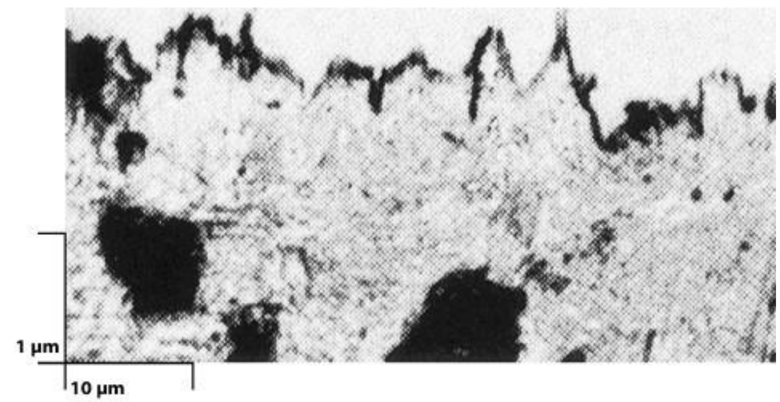
Instituto de Física
Universidade de São Paulo

Professor: **Luiz Carlos C. M. Nagamine**
E-mail: nagamine@if.usp.br
Fone: 3091.6877

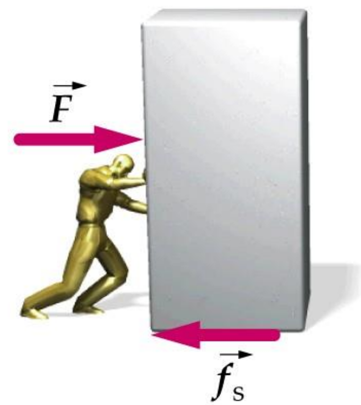
24, 26 e 31 de agosto

Atrito

Objetos comuns que parecem lisos, são ásperos e corrugados em escala atômica. Quando as superfícies entram em contato, elas se tocam apenas nas saliências (asperezas). Assim, apenas algumas moléculas de sua superfície iteragem quimicamente (atração eletromagnética) com as moléculas do corpo vizinho. Essas interações são responsáveis pelas forças de atrito.



Atrito Estático



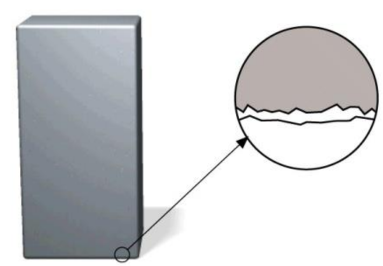
$$f_{e_{max}} = \mu_e F_n$$

μ_e é o coeficiente de atrito estático

-Atrito estático é a força de atrito que atua quando não existe deslizamenteo entre as duas superfícies em contato.

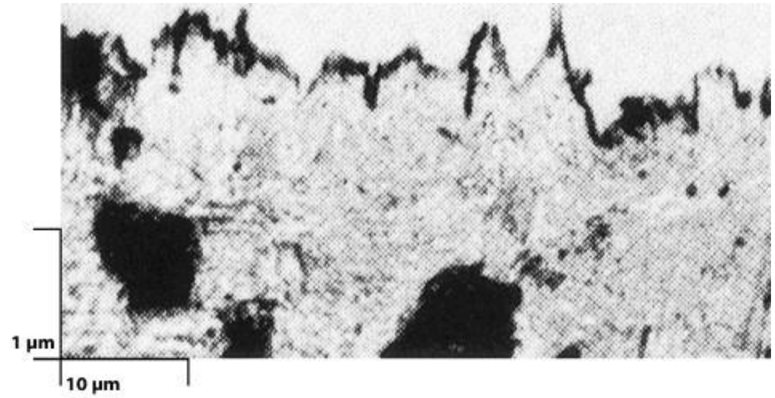
-Ele se opõe ao movimento relativo entre as superfícies.

- É proporcional às forças que pressionam as duas superfícies entre si.



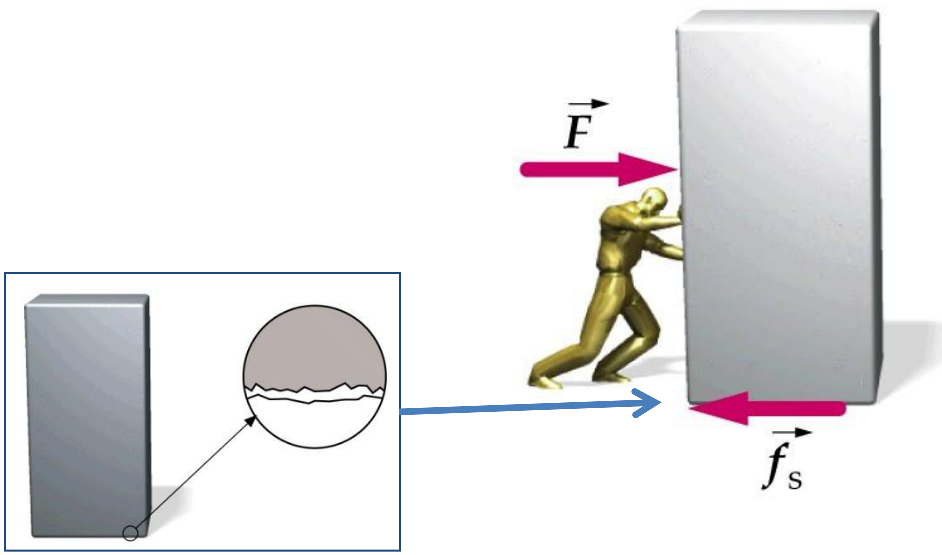
Atrito Estático

f_{emax} é um limite superior para a força de atrito estático. Além deste limite, as interações químicas se rompem, permitindo o movimento relativo entre as superfícies.



$$f_e \leq \mu_e F_n$$

μ_e é o coeficiente de atrito estático

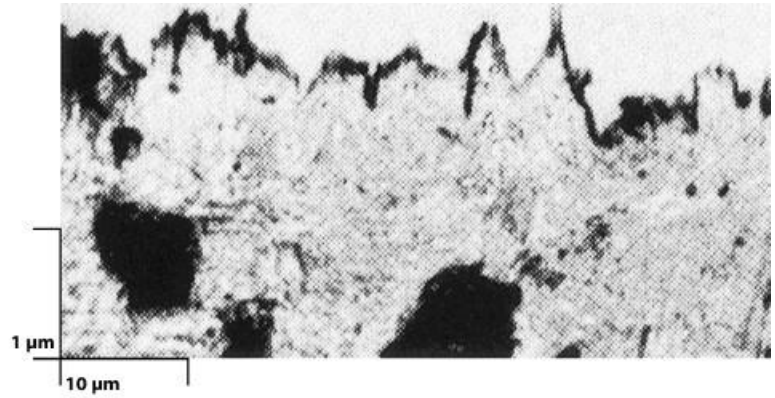


A orientação da força de atrito estático é tal que se opõe à tendência dos deslizamentos.

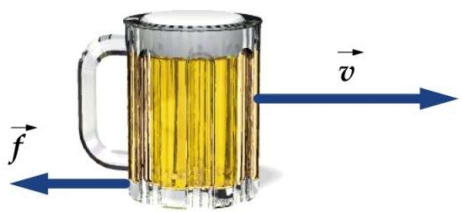
Atrito Cinético

Se o esforço entre as superfícies for alto, pode haver movimento relativo. Nestas circunstâncias haverá um atrito entre as superfícies, chamado de atrito cinético (de deslizamento) que se opõe ao movimento.

Este atrito é também proporcional às forças de interação entre as superfícies.

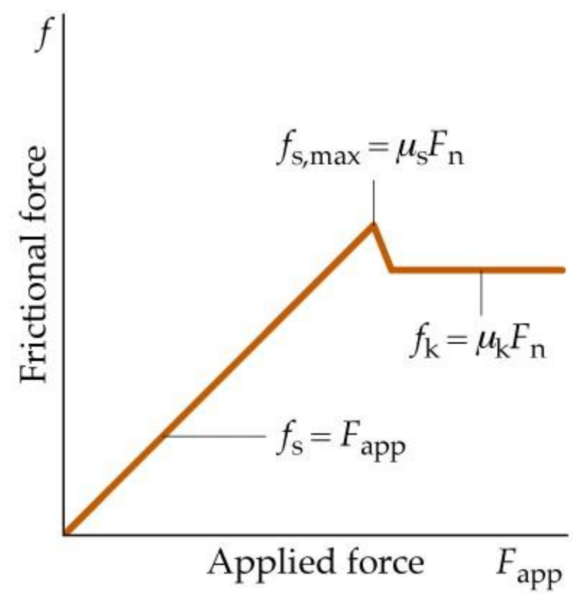


$$f_c = \mu_c F_n$$



μ_c é o coeficiente de atrito cinético

$$\mu_c \le \mu_e$$



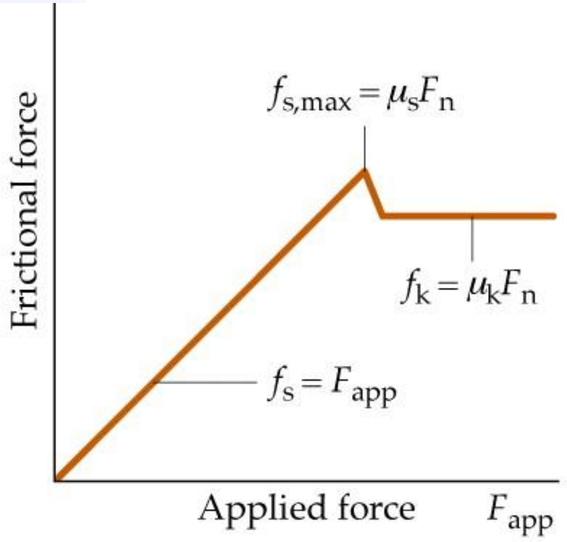
A orientação da força de atrito estático é tal que se opõe à tendência dos deslizamentos.

Atrito Estático e Cinético

Tabela 5-1 Valores Aproximados de Coeficientes de Atrito

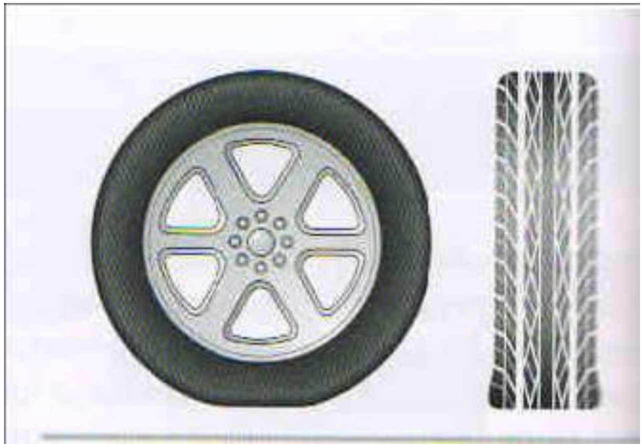
Materiais	μ_e	μ_c
Aço sobre aço	0,7	0,6
Latão sobre aço	0,5	0,4
Cobre sobre ferro moldado	1,1	0,3
Vidro sobre vidro	0,9	0,4
Teflon sobre Teflon	0,04	0,04
Teflon sobre aço	0,04	0,04
Borracha sobre concreto (seco)	1,0	0,80
Borracha sobre concreto (molhado)	0,30	0,25
Esqui parafinado sobre neve (0°C)	0,10	0,05

$$\mu_c \leq \mu_e$$



Atrito de Rolamento

Os materiais reais (pneus e estradas) estão continuamente se deformando, o que gera calor e portanto dissipação de energia. Assim, existe uma força de atrito de rolamento, que se opõe ao movimento e depende da dissipação de energia.



$$f_r = \mu_r F_n$$

μ_r é o coeficiente de atrito de rolamento

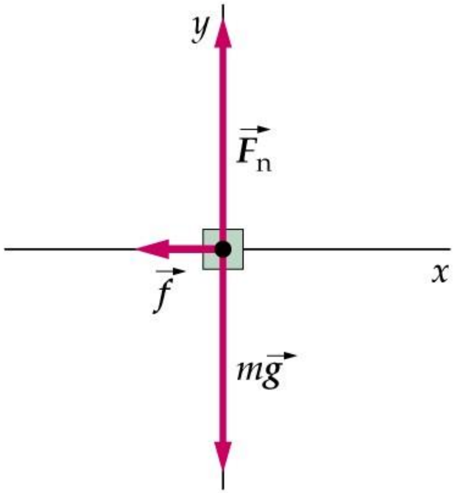
$$\mu_r << \mu_c \leq \mu_e$$

Forças de atrito de rolamento são frequentemente desprezadas.

Valores típicos para μ_r são de 0,01 a 0,02 entre pneus de borracha e concreto e 0,001 e 0,002 entre rodas de aço e trilhos de aço.

Exemplos

Em um jogo de hockey, o jogador dá uma tacada no disco (massa= 0,40 kg) que está inicialmente em repouso. O disco parte inicialmente com uma rapidez de 8,5 m/s e desliza por uma distância de 8,0 m antes de parar. Encontre o coeficiente de atrito cinético entre o disco e o chão.



$$\vec{F}_n + \vec{F}_g + \vec{f}_c = m\vec{a}$$

$$\begin{cases} F_n - mg = 0 \\ f_c = -ma_x \end{cases} \qquad \begin{cases} F_n = mg \\ f_c = -\mu_c F_n \end{cases}$$

$$\mu_c mg = -ma_x$$

$$a_x = -\mu_c g$$

Usando Torricelli, temos:

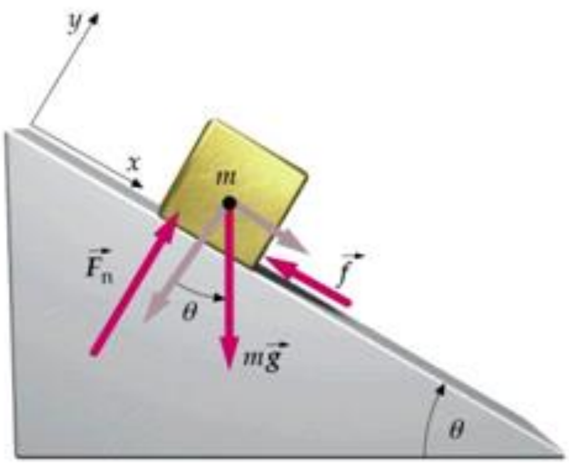
$$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$$

$$v^2 = -2\mu_c g\Delta x$$

$$\mu_c = 0{,}46$$

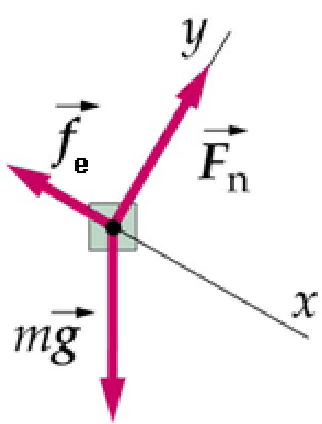
Exemplos

Uma moeda foi colocada sobre a capa de um livro, que está sendo aberto progressivamente. O ângulo θmax é o ângulo que a capa forma com a horizontal, quando a moeda começa a se mover. Encontre o coeficiente de atrito estático entre a capa e a moeda.



$$\vec{F}_n + \vec{F}_g + \vec{f}_e = m\vec{a}$$

$$\begin{cases} F_n - mg\cos\theta = 0 \\ f_e - mg\sin\theta = 0 \end{cases} \qquad \left\{ f_e = F_n \tan\theta \right.$$



mas: $f_e \leq \mu_e F_n$

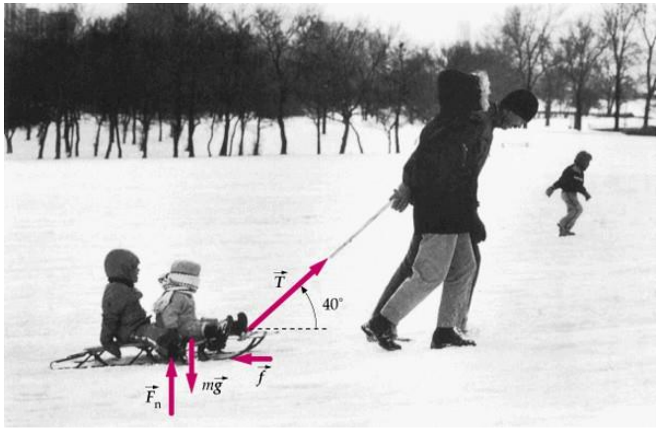
No limite de escorregamento

$$\mu_e = \tan\theta_{\max}$$

Exemplos

Duas crianças estão sentadas em um trenó em repouso. Voce começa a puxá-las por uma corda que faz um ângulo de 40° em relação à horizontal. A massa total das crianças é 45 kg e do trenó 5 kg. Os coeficientes de atrito estático e cinético são 0,20 e 0,15. Encontre a força de atrito entre o trenó e a neve e a aceleração do trenó, se a tensão na corda for (a) 100 N e (b) 140 N.

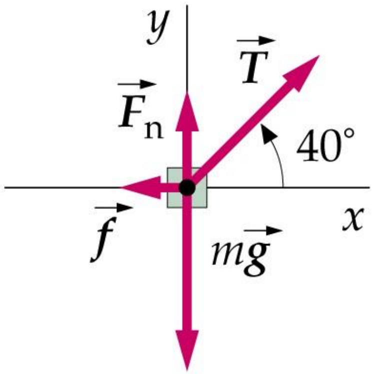
Verificar se a condição é estática $f_e \leq \mu_e F_n$



$$\vec{F}_n + \vec{F}_g + \vec{f} + \vec{T} = m\vec{a}$$

$$\begin{cases} F_n + T\sin 40^\circ - mg = 0 \\ -f_e + T\cos\theta = 0 \end{cases}$$

$$f_e = T\cos\theta$$



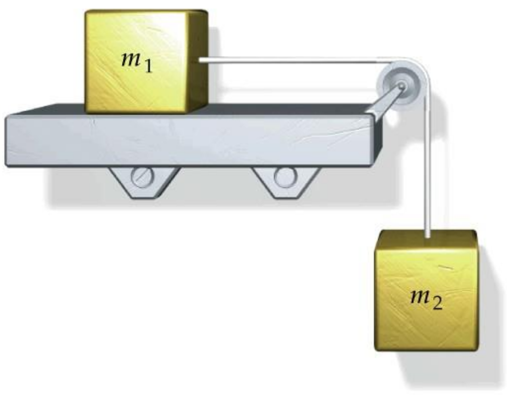
Para T= 100 N

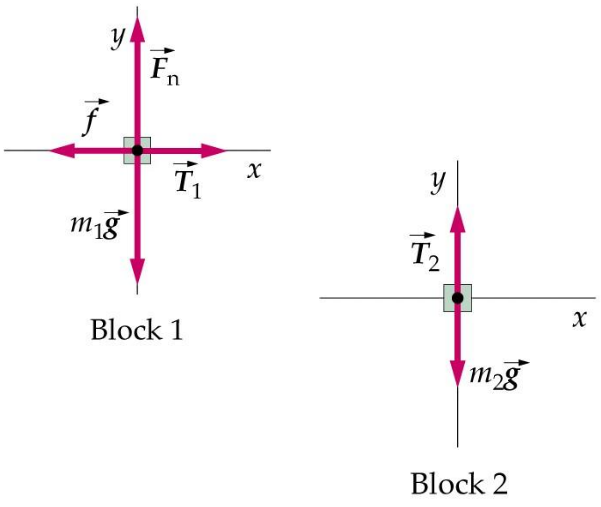
$$\left.\begin{array}{l} f_e = 77N \\ \mu_e F_n = 85N \end{array}\right\} \quad f_e \leq \mu_e F_n$$

Para T= 140 N

$$\left.\begin{array}{l} f_e = 107N \\ \mu_e F_n = 80N \end{array}\right\} \quad f_e \geq \mu_e F_n$$

Na figura abaixo, o bloco m2 (=5,0 kg) está ajustado para que o bloco m1 (=7,0kg) esteja na iminência de escorregar. (a) Qual é o coeficiente de atrito estático entre a mesa e o bloco? (b) Com um pequeno toque, os blocos se movem. Encontre a aceleração, sabendo que o coeficiente de atrito cinético entre bloco e mesa é de 0,54.





(a) Condição estática

$$\begin{cases} F_n - m_1 g = 0 \\ -f_e + T = 0 \\ m_2 g - T = 0 \end{cases}$$

$$F_n = m_1 g$$

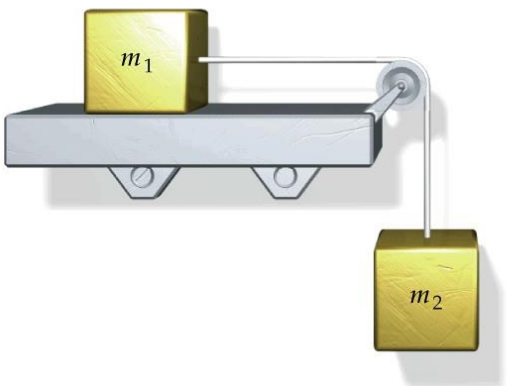
$$f_e = m_2 g$$

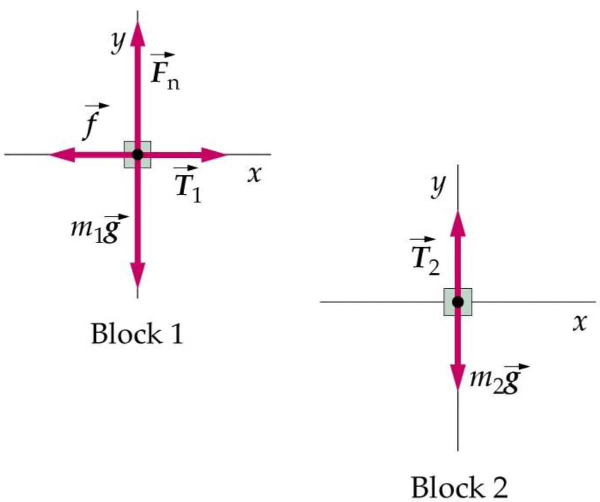
No limite de escorregamento

$$f_e = \mu_e F_n$$

$$\mu_e = \frac{m_2}{m_1} = 0{,}71$$

Na figura abaixo, o bloco m2 (=5,0 kg) está ajustado para que o bloco m1 (=7,0kg) esteja na iminência de escorregar. (a) Qual é o coeficiente de atrito estático entre a mesa e o bloco? (b) Com um pequeno toque, os blocos se movem. Encontre a aceleração, sabendo que o coeficiente de atrito cinético entre bloco e mesa é de 0,54.





(b) Em movimento

$$\begin{cases} F_n - m_1 g = 0 \\ -f_c + T = m_1 a \end{cases}$$

$$f_c = \mu_c F_n$$

$$m_2 g - T = m_2 a$$

$$F_n = m_1 g$$

$$-f_c + m_2 g = (m_1 + m_2) a$$

$$a = \frac{m_2 - \mu_c m_1}{m_1 + m_2} g = 1{,}0 m/s^2$$

Forças de arraste

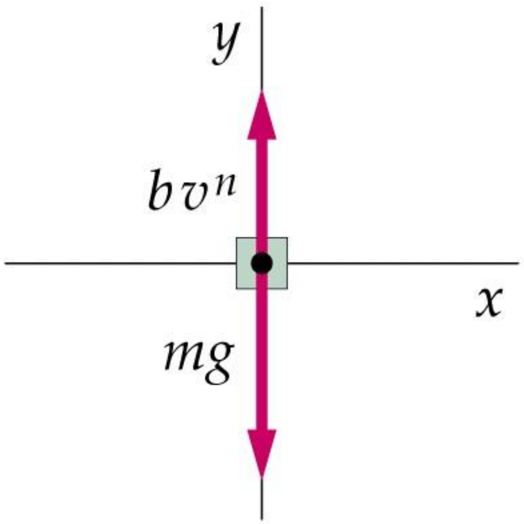
Quando um objeto se move através de um fluido, este exerce uma força de arraste, que se opõe ao movimento do objeto.

A força de arraste depende da forma do objeto, das propriedades do fluido e da rapidez do objeto em relação ao fluido.

Tipicamente a força de arraste é do tipo $F_a = bv^n$, onde b é uma constante.

Porém, para pequenas velocidades, n= 1.

Considere um objeto largado do repouso, caindo no ar.



$$mg - bv^n = ma$$

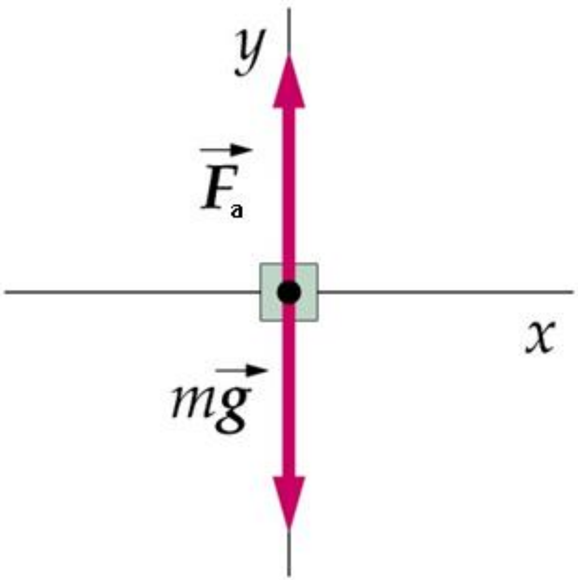
$$a = g - \frac{b}{m} v^n$$

Na medida que o objeto cai, sua velocidade aumenta, até que a aceleração se torne nula, atingindo uma velocidade limite v_l.

$$v_l = \left(\frac{mg}{b} \right)^{1/n}$$

Exemplos

Um para-quedista de 64 kg cai com uma rapidez terminal de 180 km/h, com seus braços e pernas estendidos. (a) Qual a magnitude da força de arraste, sobre o para-quedista? (b) Se n=2, qual é o valor de b?



(a) Força de arraste

$$F_a = mg$$

$$F_a = 628N$$

(b) Valor de b

$$F_a = bv^2$$

$$b = \frac{mg}{v^2} = 0{,}251 kg/m$$

Movimento em Trajetória Curva

Naturalmente, devido à inércia, os corpos se movem em linha reta. Trajetórias curvas envolvem acelerações e forças centrípetas.

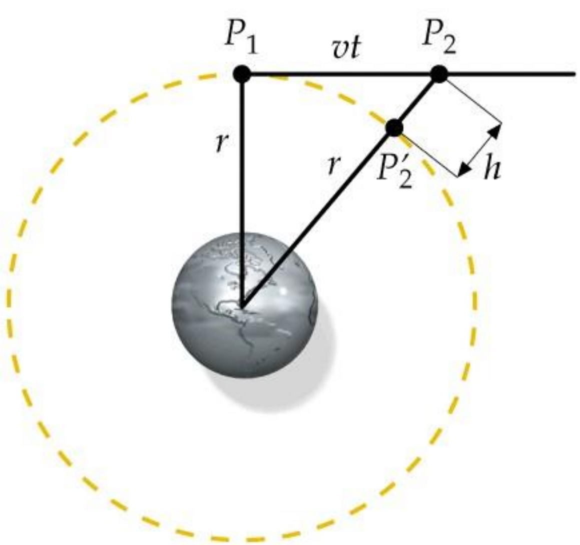
Vamos analisar vários casos particulares.

Movimento de um satélite em órbita terrestre

Considere que o satélite esteja a 200 km da superfície da Terra, onde o valor de g é próximo ao da superfície.

Se não houvesse g, a trajetória seria P_1-P_2.

Devido à g, a trajetória é P_1-P_2' .



$$(r+h)^2 = (vt)^2 + r^2$$

$$r^2 + 2hr + h^2 = v^2t^2 + r^2$$

$$h(2r+h) = v^2t^2$$

Para t pequeno, h é desprezível frente a 2r

$$2rh \approx v^2t^2$$

$$h \approx \frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{r}\right)t^2$$

Portanto,

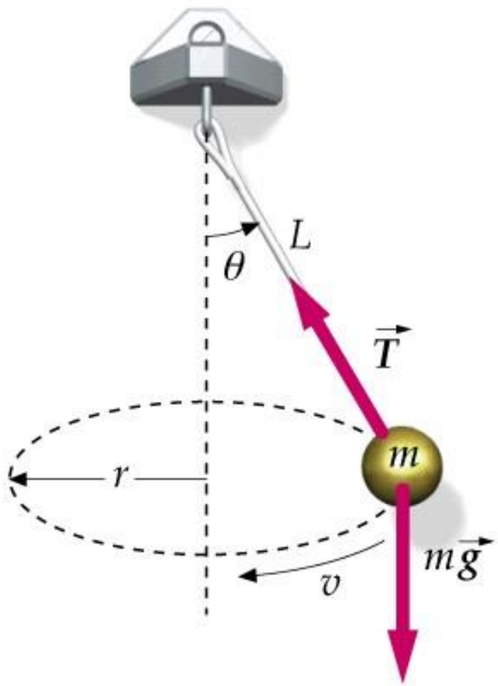
$$a = \frac{v^2}{r}$$

$$F_{res} = m\frac{v^2}{r}$$

Força centrípeta

Movimento Pendular Cônico

Considere um corpo de massa m, suspenso por um fio, fazendo um movimento circular de raio r e com rapidez constante v.

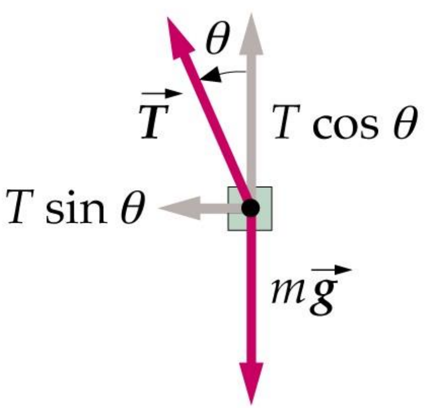


$$\vec{T} + \vec{F}_g = m\vec{a}$$

$$\begin{cases} T\cos\theta - mg = 0 \\ T\sin\theta = ma_r \end{cases}$$

$$a_r = \frac{v^2}{r}$$

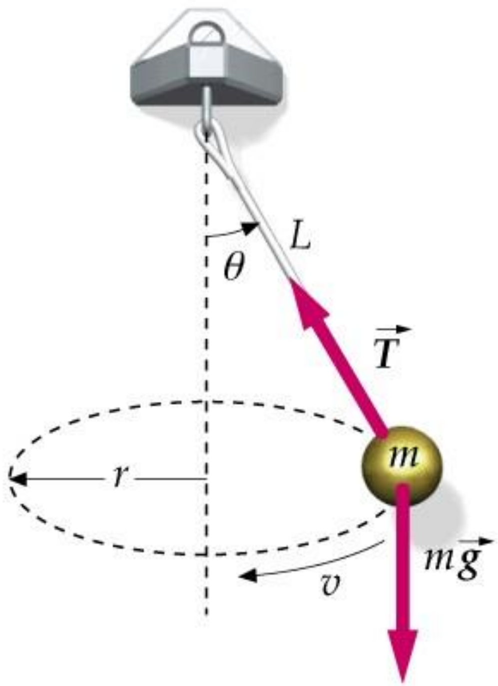
$$F_{cp} = m\frac{v^2}{r} = T\sin\theta$$



Chamamos de Força Centrípeta a componente da resultante que é responsável pelo movimento circular.

Movimento Pendular Cônico

Considere um corpo de massa m, suspenso por um fio, fazendo um movimento circular de raio r e com rapidez constante v.



$$\vec{T} + \vec{F}_g = m\vec{a}$$

$$\begin{cases} T\cos\theta - mg = 0 \\ T\sin\theta = m\dfrac{v^2}{r} \end{cases}$$

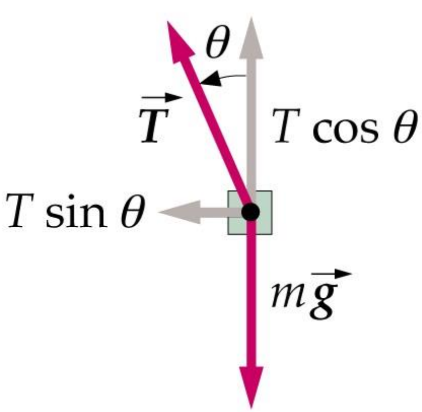
Determine:

(a) A tensão no fio.

(b) A rapidez da esfera.

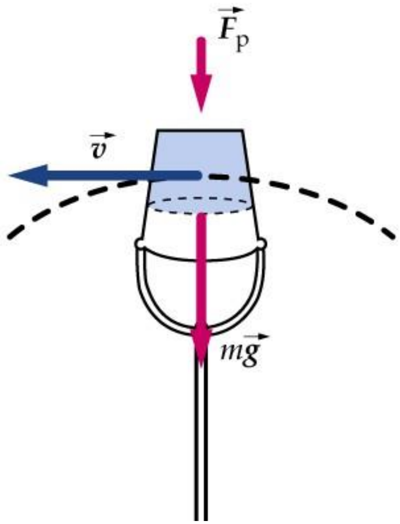
$$\begin{cases} T = mg/\cos\theta \\ rT\sin\theta/m = v^2 \end{cases}$$

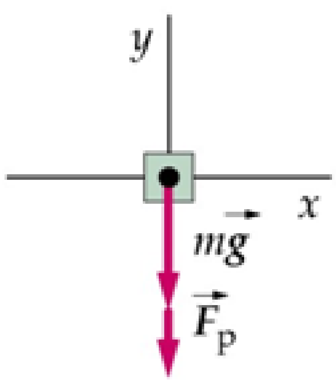
$$v = \sqrt{rg\tan\theta}$$



Girando um balde com água

Considere um balde com uma massa m de água, preso a um fio, girando em um plano vertical em uma trajetória circular de raio r. Se a velocidade no topo do movimento é v_{topo}, encontre (a) a força exercida pelo balde sobre a água. (b) O valor mínimo de v_{topo} para que a água permaneça no balde. (c) qual é a força do balde sobre a água, na base do círculo (use v_{base}):





(a)

$$\vec{P} + \vec{F}_p = m\vec{a}$$

$$F_p + mg = m\frac{v_{topo}^2}{r}$$

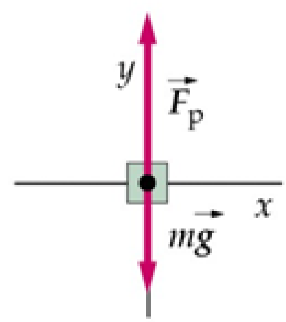
$$F_p = m\left(\frac{v_{topo}^2}{r} - g\right)$$

(b) $F_p = 0$

$$0 = m\left(\frac{v_{topo_{min}}^2}{r} - g\right)$$

$$v_{topo_{min}} = \sqrt{rg}$$

(c)

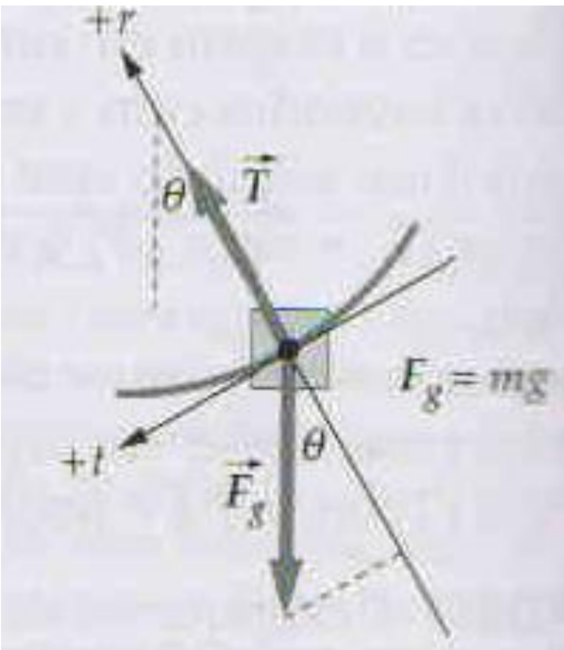


$$F_p - mg = m\frac{v_{base}^2}{r}$$

$$F_p = m\left(\frac{v_{base}^2}{r} + g\right)$$

Brincando de Tarzan

Voce abandona um galho de uma árvore agarrado a um cipó de 30 m de comprimento, que está preso em outro galho, na mesma altura e distante 30 m. Qual é a taxa de aumento da sua rapidez no instante em que o cipó faz um ângulo de 25° com a vertical.



$$\vec{T} + \vec{F}_g = m\vec{a}$$

componentes:

$$\begin{cases} T - mg\cos\theta = ma_{cp} \\ mg\sin\theta = ma_t \end{cases}$$

radial

tangencial

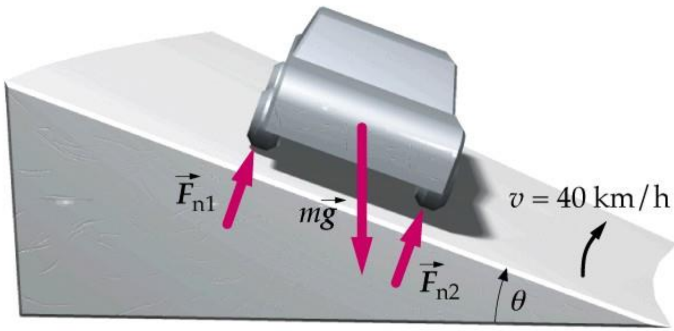
$$a_t = g\sin\theta = 4{,}1 m/s^2$$

Percorrendo uma curva inclinada

Uma curva de 30,0 m de raio é inclinada de um ângulo θ. Encontre θ para que o carro percorra a curva a 40,0 km/h, mesmo se a estrada estiver coberta de gelo.

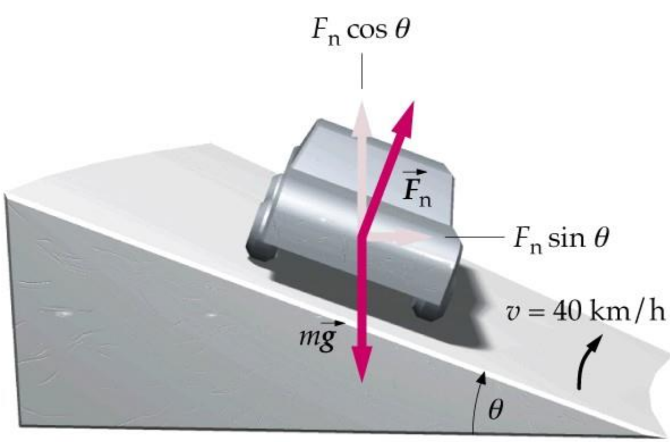
$$\vec{P} + \vec{F}_n = m\vec{a}$$

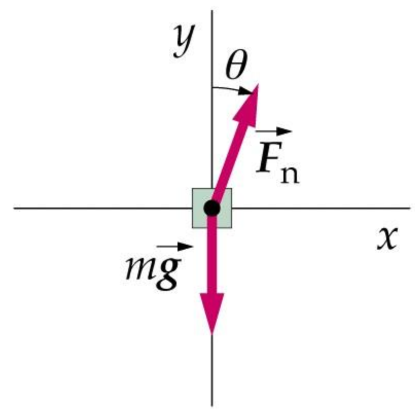
$$\begin{cases} F_n \cos\theta - mg = 0 \\ F_n \sin\theta = m\dfrac{v^2}{r} \end{cases}$$



$$\tan\theta = \frac{v^2}{rg}$$

$$\theta = 22{,}8°$$





Método de Euler

Podemos determinar o movimento de uma partícula, calculando a posição, velocidade e aceleração em um instante, a partir destes valores em um instante imediatamente anterior, se soubermos como que as forças se comportam durante o movimento.

Vamos supor que no instante inicial conhecemos x_0, v_0 e a_0 e que o movimento seja unidimensional. Em um instante posterior temos:

$$x_1 = x_0 + v_0 \Delta t$$

$$v_1 = v_0 + a_0 \Delta t$$

$$t_1 = t_0 + \Delta t$$

Conhecendo as forças envolvidas, podemos calcular a aceleração no instante posterior a_1 e repetir todo o processo para os instantes futuros.

$$x_{n+1} = x_n + v_n \Delta t$$

$$v_{n+1} = v_n + a_n \Delta t$$

$$t_{n+1} = t_n + \Delta t$$

Método de Euler

Vamos considerar o caso do corpo (massa m) caindo em queda livre (com n= 2)

$$a_n = g - \frac{b}{m} v_n^2$$

$$x_{n+1} = x_n + v_n \Delta t$$

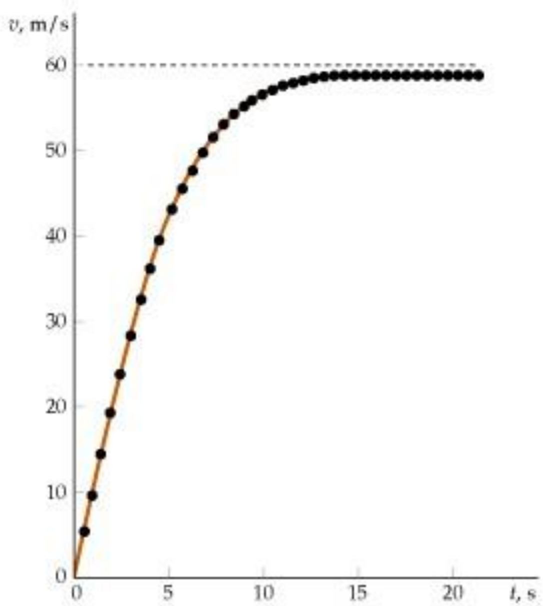
$$v_{n+1} = v_n + a_n \Delta t$$

$$t_{n+1} = t_n + \Delta t$$

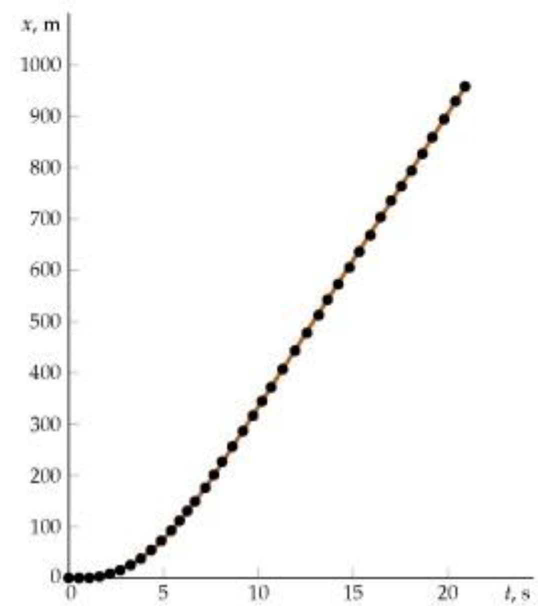
	A	B	C	D
1	Δt =	0.5	s	
2	x0 =	0	m	
3	v0 =	0	m/s	
4	a0 =	9.81	m/s^2	
5	vt =	60	m/s	
6				
7	t	x	v	a
8	(s)	(m)	(m/s)	(m/s^2)
9	0.00	0.0	0.00	9.81
10	0.50	0.0	4.91	9.74
11	1.00	2.5	9.78	9.55
12	1.50	7.3	14.55	9.23
13	2.00	14.6	19.17	8.81
14	2.50	24.2	23.57	8.30
15	3.00	36.0	27.72	7.72
41	16.00	701.0	59.55	0.15
42	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

	A	B	C	D
1	Δt =	0.5	s	
2	x0 =	0	m	
3	v0 =	0	m/s	
4	a0 =	9.81	m/s^2	
5	vt =	60	m/s	
6				
7	t	x	v	a
8	(s)	(m)	(m/s)	(m/s^2)
9	0	=B2	=B3	=$B$4*(1-C9^2/$B$5^2)
10	=A9+$B$1	=B9+C9*$B$1	=C9+D9*$B$1	=$B$4*(1-C10^2/$B$5^2)
11	=A10+$B$1	=B10+C10*$B$1	=C10+D10*$B$1	=$B$4*(1-C11^2/$B$5^2)
12	=A11+$B$1	=B11+C11*$B$1	=C11+D11*$B$1	=$B$4*(1-C12^2/$B$5^2)
13	=A12+$B$1	=B12+C12*$B$1	=C12+D12*$B$1	=$B$4*(1-C13^2/$B$5^2)
14	=A13+$B$1	=B13+C13*$B$1	=C13+D13*$B$1	=$B$4*(1-C14^2/$B$5^2)
15	=A14+$B$1	=B14+C14*$B$1	=C14+D14*$B$1	=$B$4*(1-C15^2/$B$5^2)
41	=A40+$B$1	=B40+C40*$B$1	=C40+D40*$B$1	=$B$4*(1-C41^2/$B$5^2)
42	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Adotando-se valores adequados para b e m, foi realizada a simulação do movimento



(a)



(b)

Centro de Massa

Centro de Massa de um corpo é um ponto que se move como se toda a massa do corpo estivesse nele concentrada e como se todas as forças externas estivessem aplicadas sobre ele.

Para um corpo constituído de N partículas, o Centro de Massa é dado por

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\left(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots\right) = \frac{1}{M}\left(\sum_i m_i\vec{r}_i\right)$$

onde $$\vec{r}_{cm} = x_{cm}\hat{i} + y_{cm}\hat{j} + z_{cm}\hat{k}$$

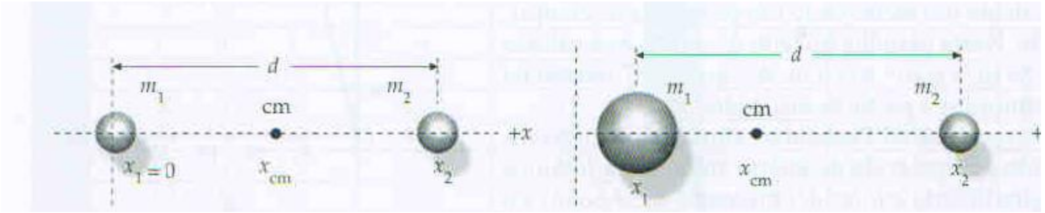
e $$x_{cm} = \frac{1}{M}\left(\sum_i m_i x_i\right)$$

$$y_{cm} = \frac{1}{M}\left(\sum_i m_i y_i\right)$$

$$z_{cm} = \frac{1}{M}\left(\sum_i m_i z_i\right)$$

Centro de Massa

Centro de Massa de um corpo é um ponto que se move como se toda a massa do corpo estivesse nele concentrada e como se todas as forças externas estivessem aplicadas sobre ele.



$$x_{cm} = \frac{1}{M}\left(m_1 x_1 + m_2 x_2\right)$$

Para duas partículas unidas por uma haste de comprimento d

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\left(m_1 x_1 + m_2 (x_1 + d)\right)$$

$$x_{cm} = x_1 + \frac{m_2 d}{m_1 + m_2}$$

Colocando o referencial na partícula 1

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\left(m_2 d\right) = \frac{m_2 d}{m_1 + m_2}$$

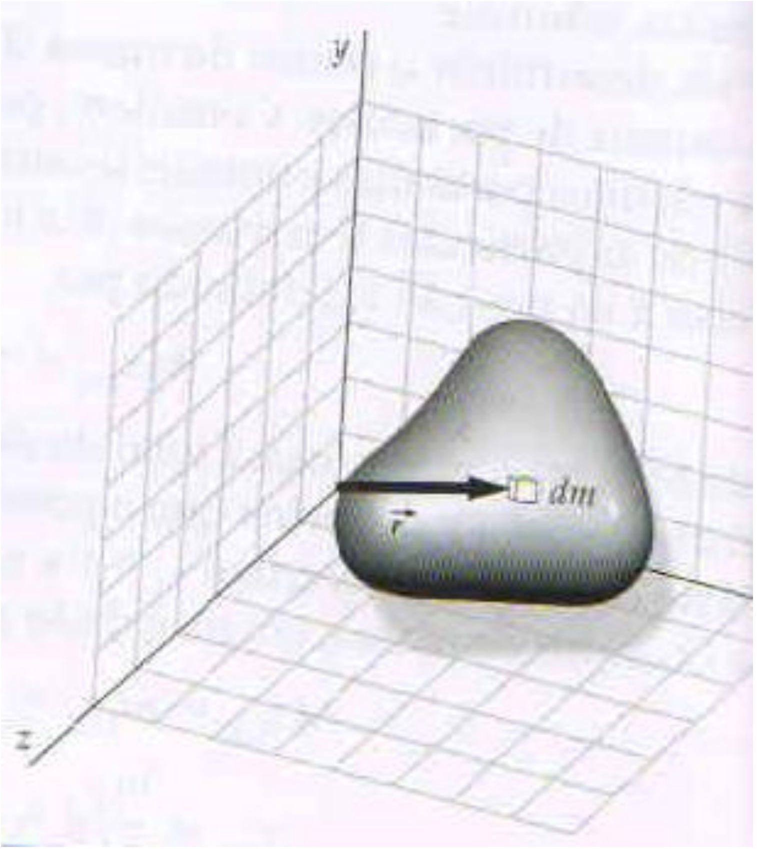
Centro de Massa de um corpo é um ponto que se move como se toda a massa do corpo estivesse nele concentrada e como se todas as forças externas estivessem aplicadas sobre ele.

Para um corpo extenso com distribuição contínua de massa

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\,dm$$

onde

$$M = \int dm$$

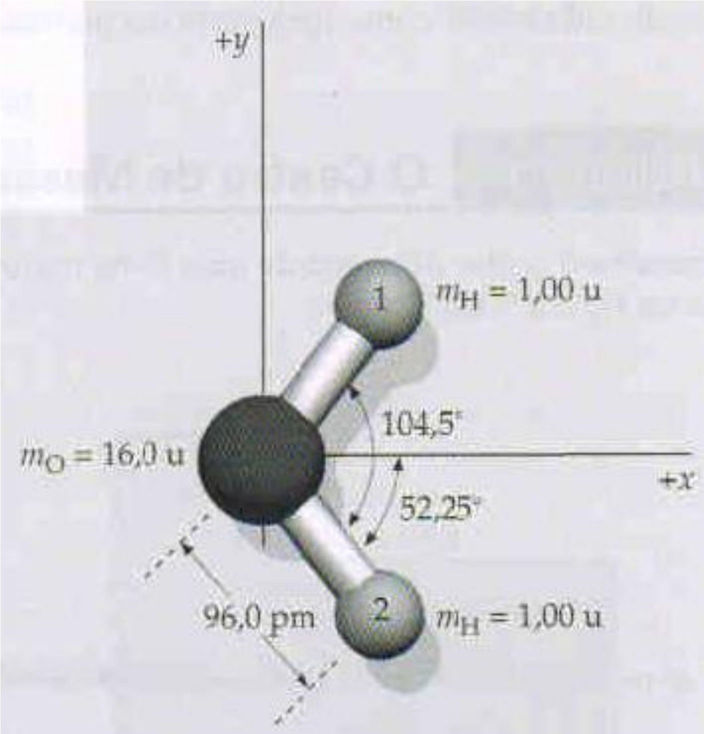


Se o corpo possuir simetricas geométricas, o Centro de Massa está no centro de simetria.

Centro de Massa da molécula de água (H_20).

Com m_O= 16,0 uma e m_H= 1,0 uma, distância entre o oxigênio e o hidrogênio de 96,0 pm e ângulo de abertura da molécula de 104,5°.

Para 3 partículas, temos



$$x_{cm} = \frac{\sum m_i x_i}{M}, y_{cm} = \frac{\sum m_i y_i}{M}$$

$$x_{cm} = \frac{m_{H_1} x_{H_1} + m_{H_2} x_{H_2} + m_O x_O}{m_{H_1} + m_{H_2} + m_O}$$

$$y_{cm} = \frac{m_{H_1} y_{H_1} + m_{H_2} y_{H_2} + m_O y_O}{m_{H_1} + m_{H_2} + m_O}$$

onde

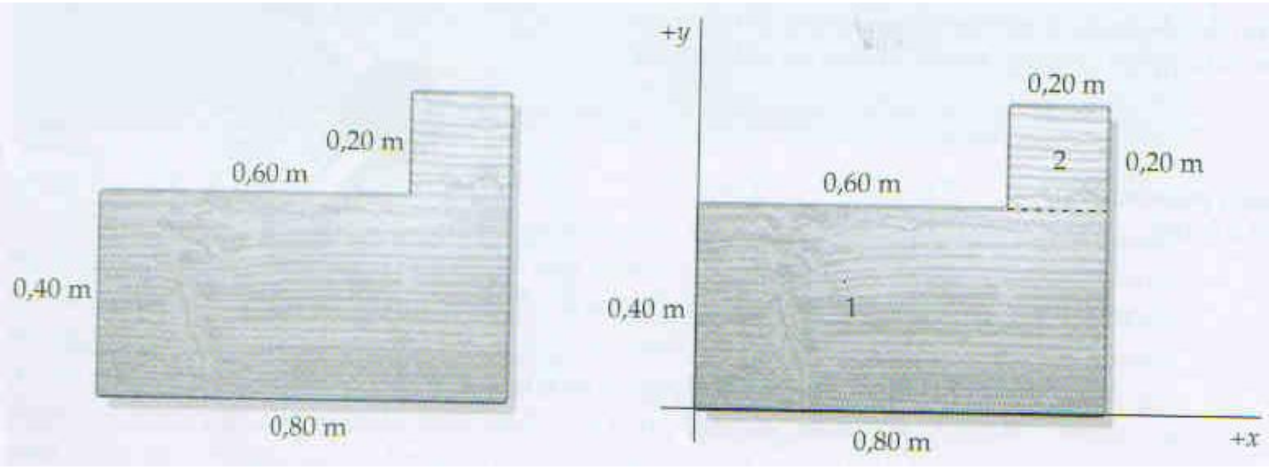
$$x_O = y_O = 0$$

$$x_{H_1} = x_{H_2} = 96x10^{-12} \cos 52{,}25°$$

$$y_{H_1} = -y_{H_2} = 96x10^{-12} \sin 52{,}25°$$

$$\vec{r}_{cm} = (6{,}53x10^{-12}\hat{i} + 0\,\hat{j})m$$

Centro de Massa de uma folha uniforme de madeira.



$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

$$y_{cm} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}$$

Onde a massa de cada parte é

$$m_1 = A_1 \cdot \sigma = 0{,}32 \cdot \sigma$$

$$m_2 = A_2 \cdot \sigma = 0{,}04 \cdot \sigma$$

Vamos determinar o centro de massa de cada parte

$$x_{cm1} = 0{,}40m$$

$$y_{cm1} = 0{,}20m$$

$$x_{cm2} = 0{,}70m$$

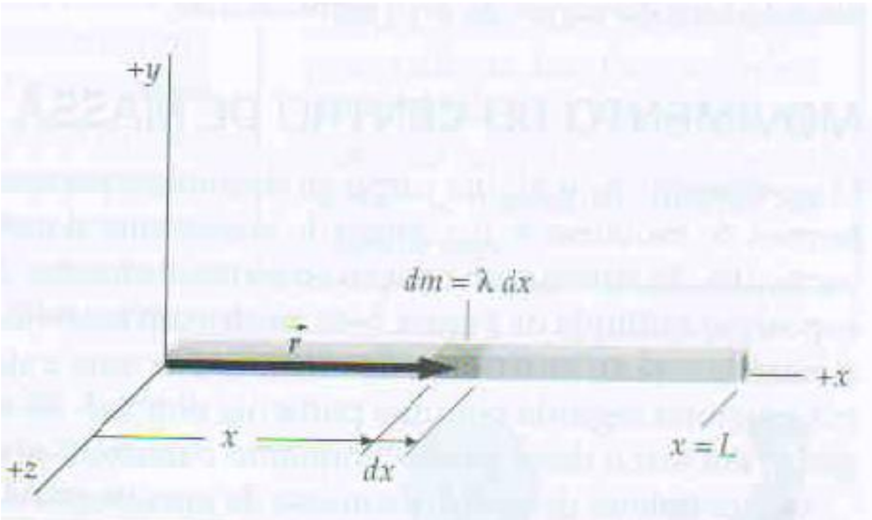
$$y_{cm2} = 0{,}50m$$

Sendo σ, a densidade superficial de massa

$$x_{cm} = 0{,}43m$$

$$y_{cm} = 0{,}23m$$

Centro de Massa de uma barra uniforme de comprimento L e densidade linear de massa λ.



$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\,dm = \frac{1}{M}\int x\hat{i}\,dm$$

$$M = \int dm$$

A massa total M está distribuida ao longo do comprimento L, portanto a densidade linear de massa λ=M/L.

Para um pedaço infinitezimal dx, temos uma massa dm=λdx

$$M = \int_0^L dm = \int_0^L \lambda dx = \lambda L$$

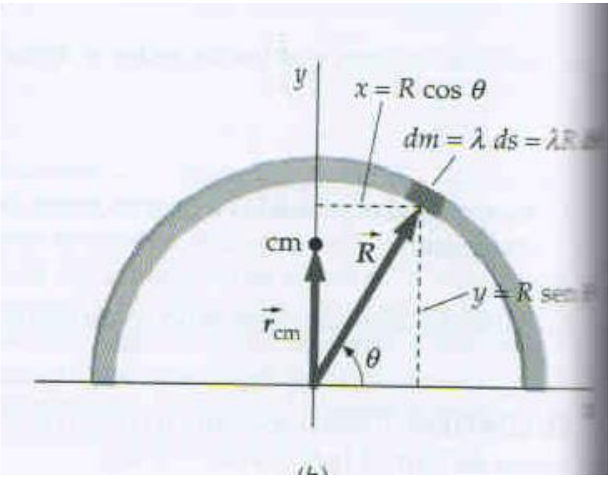
Para o centro de massa temos

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\int_0^L x\hat{i}\,dm = \frac{1}{M}\hat{i}\int_0^L x\lambda dx$$

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\lambda\hat{i}\int_0^L x dx = \frac{1}{M}\lambda\hat{i}\,\frac{L^2}{2}$$

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{\lambda L}\lambda\hat{i}\,\frac{L^2}{2} = \frac{L}{2}\hat{i}$$

Centro de Massa de um anel semicircular uniforme de raio R e densidade linear de massa λ.



A massa total M está distribuida ao longo do comprimento πR, portanto a densidade linear de massa λ=M/ πR.

Para um pedaço infinitezimal ds, temos uma massa dm=λds

Mas, um pedaço ds pode ser escrito como Rdθ

$$M = \int_0^L dm = \int_0^L \lambda ds = \int_0^\pi \lambda R d\theta = \lambda \pi R$$

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\int (x\hat{i} + y\hat{j})dm$$

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\int R(\cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j})dm$$

Para o centro de massa temos

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\int_0^\pi R(\cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j})\lambda R d\theta$$

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\lambda R^2}{M}\int_0^\pi (\cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j})d\theta$$

$$\vec{r}_{cm} = \frac{R}{\pi}\left(\sin\theta\Big|_0^\pi \hat{i} - \cos\theta\Big|_0^\pi \hat{j}\right)$$

$$\vec{r}_{cm} = \frac{2}{\pi}R\hat{j}$$

Movimento do Centro de Massa

Podemos decompor o movimento de um corpo como o movimento do Centro de Massa mais o movimento individual das partículas constituintes em relação ao Centro de Massa.

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\left(\sum_i m_i \vec{r}_i\right) \xrightarrow{\text{derivando}} \frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} = \frac{1}{M}\left(\sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}\right) = \frac{1}{M}\left(\sum_i m_i \vec{v}_i\right) = \vec{v}_{cm}$$

$$\xrightarrow{\text{derivando}} \frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = \frac{1}{M}\left(\sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}\right) = \frac{1}{M}\left(\sum_i m_i \vec{a}_i\right) = \vec{a}_{cm}$$

$$\vec{a}_{cm} = \frac{1}{M}\left(\sum_i m_i \vec{a}_i\right) = \frac{1}{M}\left(\sum_i \vec{F}_i\right)$$

$$\vec{a}_{cm} = \frac{1}{M}\left(\sum_i \vec{F}_{i_{\mathrm{int}}} + \sum_i \vec{F}_{i_{ext}}\right)$$

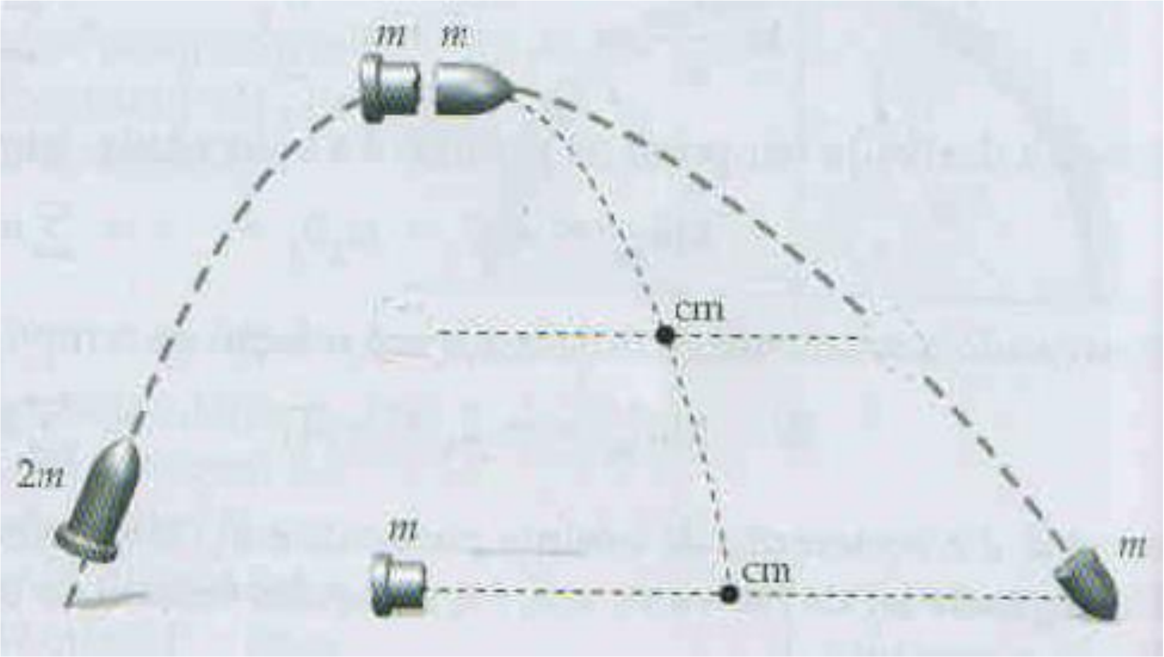
Mas, da terceira Lei de Newton, as forças internas aparecem aos pares e se cancelam.

$$\vec{a}_{cm} = \frac{1}{M}\sum_i \vec{F}_{i_{ext}} = \frac{1}{M}\vec{F}_{R_{ext}}$$

O Centro de Massa de um sistema se move como uma partícula pontual com a massa total do sistema, sob a influência da força externa resultante que atua sobre o sistema.

Exemplos

Um projétil é disparado em uma trajetória que o faria pousar 56 m adiante. Ele explode no topo da trajetória, partindo-se em dois pedaços iguais. Um dos fragmentos tem velocidade nula. Onde aterriza o outro pedaço?



X_2= 84 m

Exemplos

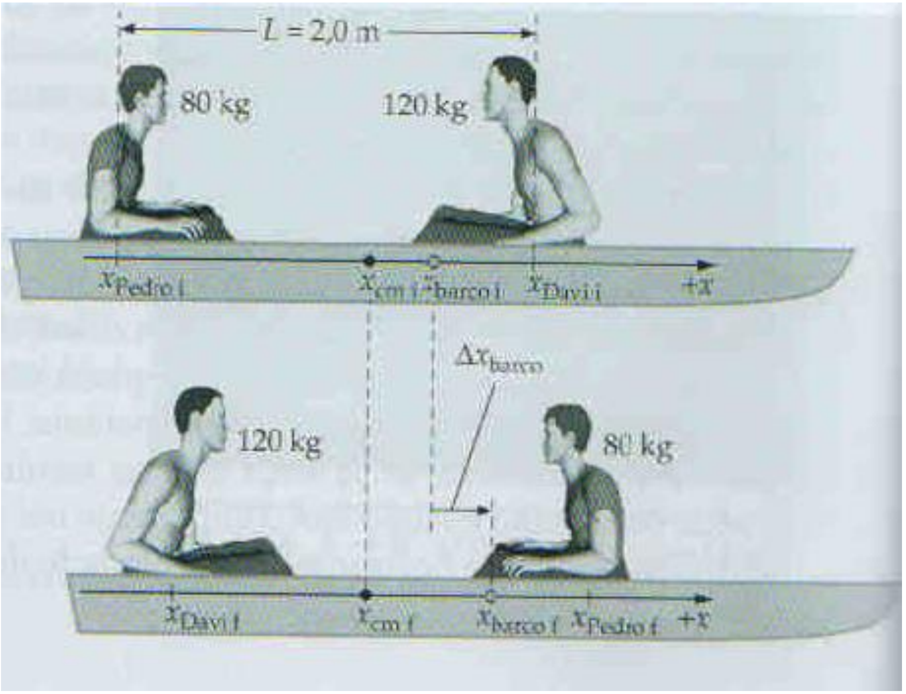
Pedro (80 kg) e Davi (120 kg) estão em um barco de massa 60 kg. Davi está na proa e Pedro na popa, a 2,0 m de Davi. O barco está em repouso e ele trocam de lugar. De quanto o barco se move, devido à troca de lugares?

Situação inicial

$$Mx_{cm1} = m_p x_{p1} + m_d x_{d1} + m_b x_{b1}$$

Situação final

$$Mx_{cm2} = m_p x_{p2} + m_d x_{d2} + m_b x_{b2}$$



$$M\Delta x_{cm} = m_p \Delta x_p + m_d \Delta x_d + m_b \Delta x_b$$

Supondo que o barco se moveu d

$$0 = m_p(d+L) + m_d(d-L) + m_b d$$

$$d = \frac{m_d - m_p}{m_d + m_p + m_b} L$$

$$d = 0{,}31m$$