Mecânica para Geociências

2º Semestre de 2013

Instituto de Física
Universidade de São Paulo

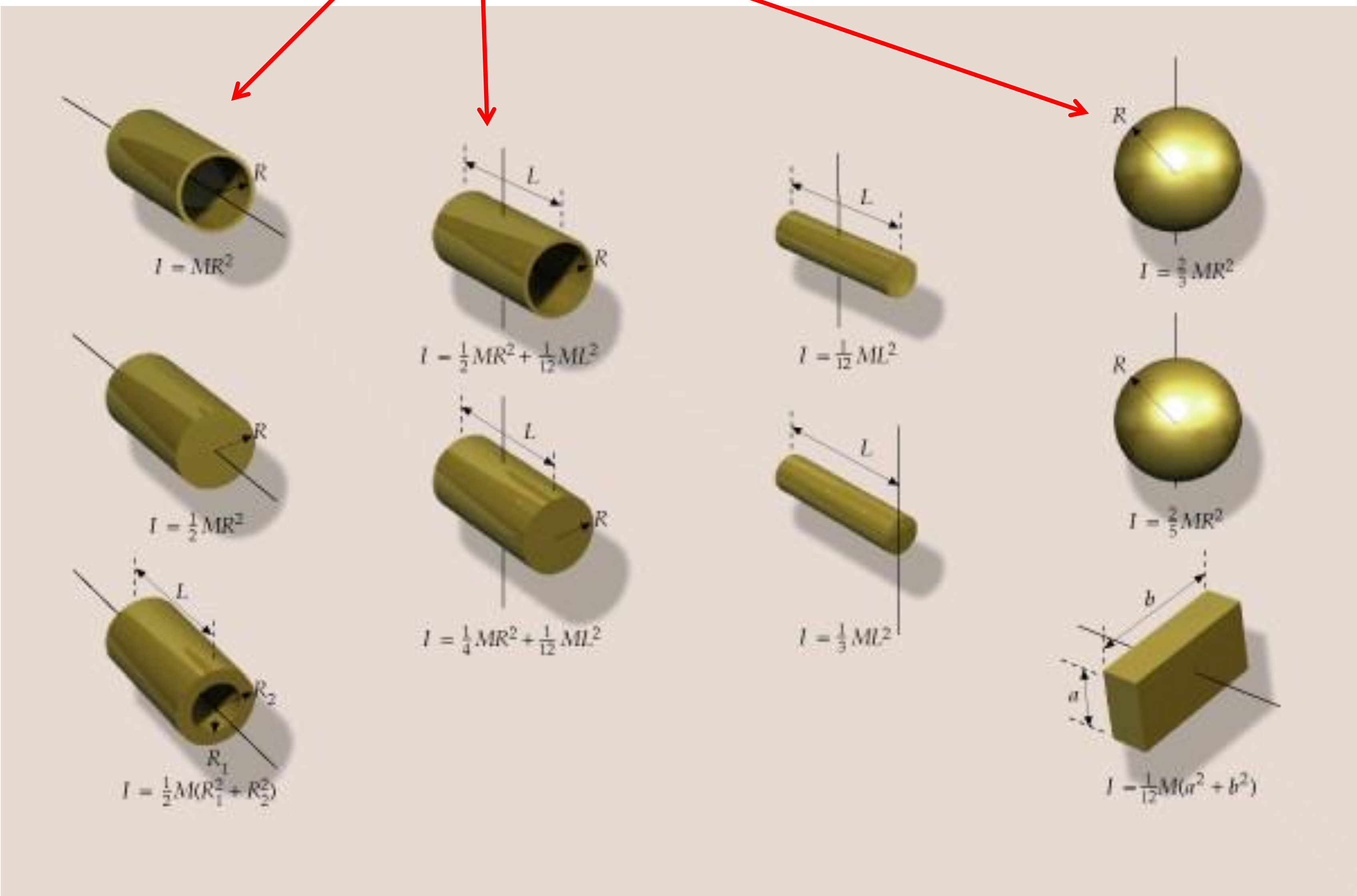
Professor: **Luiz C. C. M. Nagamine**
E-mail: nagamine@if.usp.br
Fone: 3091.6877

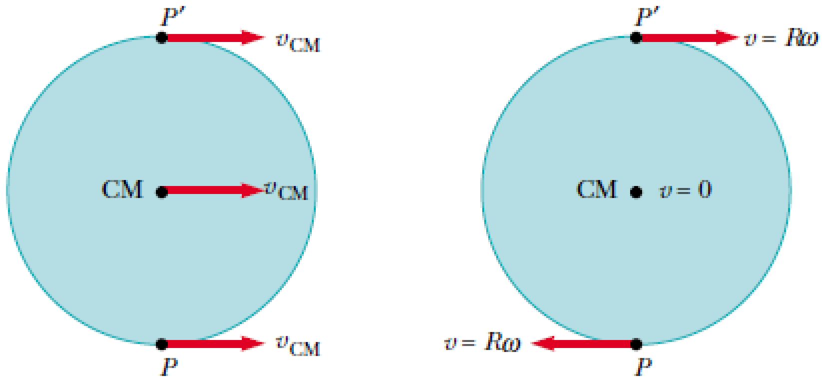
4, 8 e 11 de novembro

Tabela de Momentos de Inércia

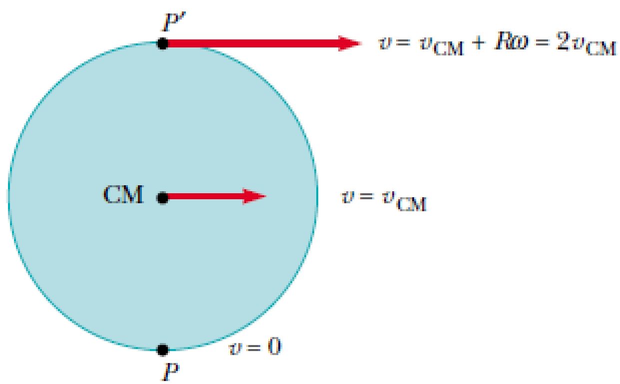
$$I = \int r^2 dm$$

cascas

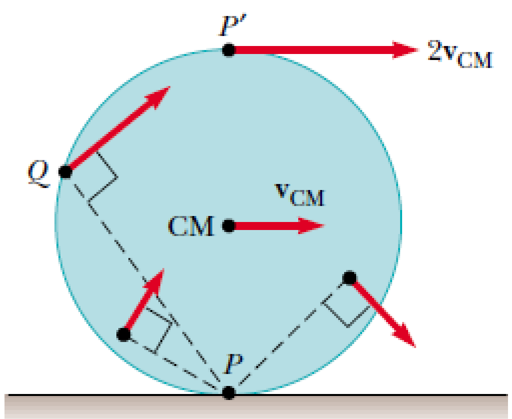




(a) Pure translation (b) Pure rotation



(c) Combination of translation and rotation



$$K = \tfrac{1}{2} I_P \omega^2$$

$$I_P = I_{CM} + MR^2$$

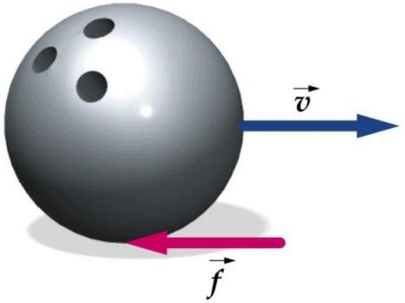
$$K = \tfrac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \tfrac{1}{2} MR^2 \omega^2$$

$$v_{CM} = R\omega,$$

$$\boxed{K = \tfrac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \tfrac{1}{2} M v_{CM}^2}$$

Atrito Estático

Rolamento sem deslizar



Quando temos atrito estático, se considera que não há perda de energia no sistema, ou seja, que o sistema é conservativo. Isto é aproximadamente correto.

Exemplo: Uma bola de boliche, com 11 cm de raio e 7,2 kg, rola sem deslizar a 2,0 m/s . Ela continua a rolar sem deslizar, ao subir uma rampa até a altura h, quando atinge o repouso. Determine h.

Vamos considerar o sistema bola-pista-Terra. Não existem forças externas e nem forças internas dissipativas, então a Energia Mecânica se conserva.

$$W_{ext} = \Delta E_{mec} + W_{nc}$$

$$0 = \Delta E_{mec} + 0$$

$$U_f + K_f = U_i + K_i$$

$$0 + mgh = 0 + \frac{1}{2} m v_{cm_i}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega_i^2$$

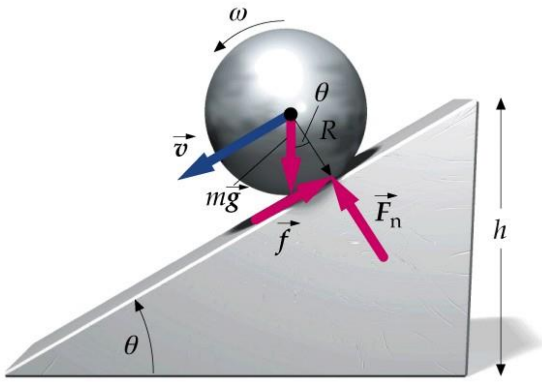
Com $I = \frac{2}{5} m R^2$

$$h = \frac{7 v_{cm_i}^2}{10 g} = 29 cm$$

Atrito Estático

Rolamento sem deslizar

Uma bola maciça, de raio R e massa m, desce rolando um plano inclinado com ângulo θ, sem deslizar. Determine a força de atrito e a aceleração do centro de massa.



Vamos aplicar a Segunda Lei de Newton à bola (rotação e translação). (o peso e a normal na polia, não geram torque)

$$\begin{cases} \tau_{ext} = I_{cm}\alpha = F_e R \\ F_{ext} = m a_{cm} \end{cases}$$

Com $a_{cm} = R\alpha$

$$mg\sin\theta - F_e = m a_{cm}$$

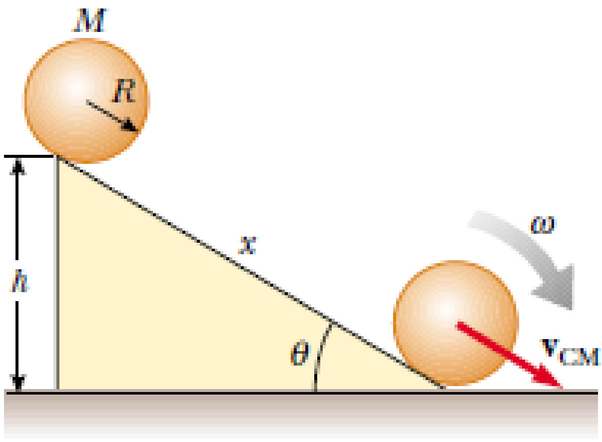
$$mg\sin\theta - \frac{I_{cm} a_{cm}}{R^2} = m a_{cm}$$

$$a_{cm} = \frac{g\sin\theta}{1 + \frac{I_{cm}}{mR^2}}$$

$$F_e = \frac{mg\sin\theta}{1 + \frac{mR^2}{I_{cm}}}$$

Com

$$I_{cm} = \frac{2}{5} mR^2$$



$$K_f + U_f = K_i + U_i$$

$$K = \tfrac{1}{2} I_{CM} \left(\frac{v_{CM}}{R}\right)^2 + \tfrac{1}{2} M v_{CM}{}^2$$

$$K = \tfrac{1}{2} \left(\frac{I_{CM}}{R^2} + M\right) v_{CM}{}^2$$

$$\tfrac{1}{2} \left(\frac{I_{CM}}{R^2} + M\right) v_{CM}{}^2 + 0 = 0 + Mgh$$

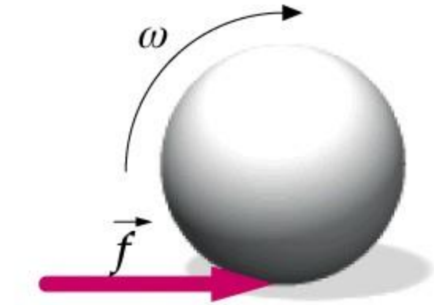
$$v_{CM} = \left(\frac{2gh}{1 + (I_{CM}/MR^2)}\right)^{1/2}$$

$$I_{CM} = \tfrac{2}{5} MR^2$$

$$v_{CM} = \left(\frac{2gh}{1 + (\frac{2}{5} MR^2/MR^2)}\right)^{1/2} = \boxed{(\tfrac{10}{7} gh)^{1/2}}$$

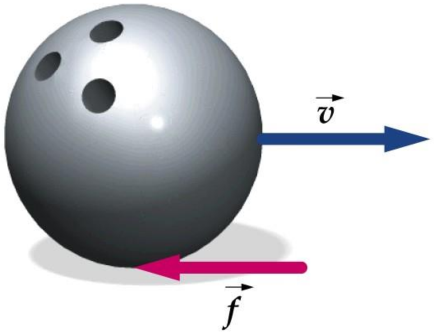
Atrito Dinâmico

Rolamento com deslizamento



Quando temos atrito dinâmico, se considera que haja perda de energia no sistema, ou seja, que o sistema não é conservativo. Parte da energia é convertida em calor.

O sentido da força de atrito é definido pela relação entre a velocidade angular e a velocidade do centro de massa.



Exemplo: Uma bola de boliche, de massa m e raio R, é lançada sem rolamento, com velocidade de 5,0 m/s. O coeficiente de atrito cinético é 0,08. Determine (a) o tempo que a bola leva derrapando. (b) o tempo deste trajeto.

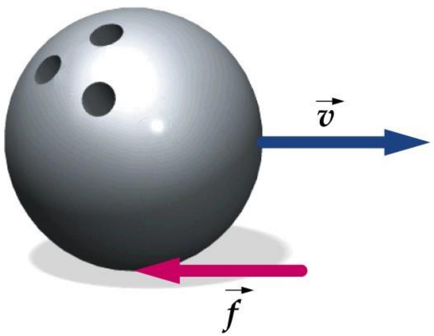
Vamos aplicar a Segunda Lei de Newton à bola (rotação e translação).

$$\begin{cases} \tau_{ext} = I_{cm}\alpha = F_e R \\ F_{ext} = m a_{cm} \end{cases}$$

Com $a_{cm} = R\alpha$

Atrito Dinâmico

Rolamento com deslizamento



$$\begin{cases} \tau_{ext} = I_{cm}\alpha = F_c R \\ F_{ext} = ma_{cm} \end{cases}$$

Com $a_{cm} = R\alpha$

$$-F_c = ma_{cm} = -\mu_c mg$$

$$a_{cm} = -\mu_c g$$

$$v_{cm} = v_0 - \mu_c gt$$

$$\alpha = \frac{F_c R}{I_{cm}} = \frac{\mu_c mgR}{\frac{2}{5}mR^2} = \frac{5\mu_c g}{2R}$$

$$\omega = \omega_0 + \frac{5\mu_c g}{2R}t$$

Mas, quando não deslizar

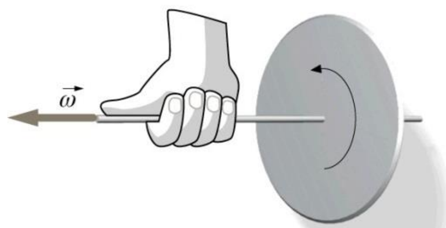
$$v_{cm} = R\omega$$

$$v_0 - \mu_c gt = \frac{5\mu_c g}{2R}t \quad \begin{cases} t = \dfrac{2v_0}{7\mu_c g} \\ \Delta x = v_0 t + \dfrac{1}{2}a_{cm}t^2 = \dfrac{12v_0^2}{49\mu_c g} \end{cases}$$

Momento Angular

A natureza vetorial da rotação

Agora, vamos considerar os casos em que o eixo de rotação pode alterar a sua direção. Isto explicita a natureza vetorial da rotação. Definimos a direção do vetor velocidade angular como perpendicular ao plano de rotação e o sentido dado pela regra da mão direita.

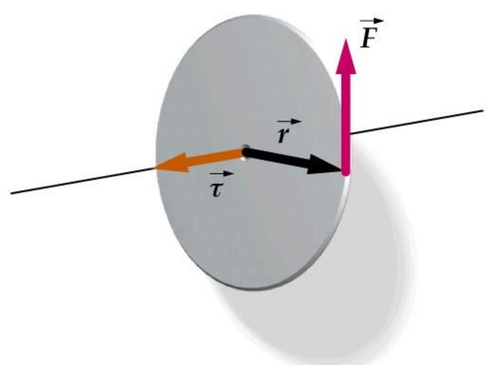


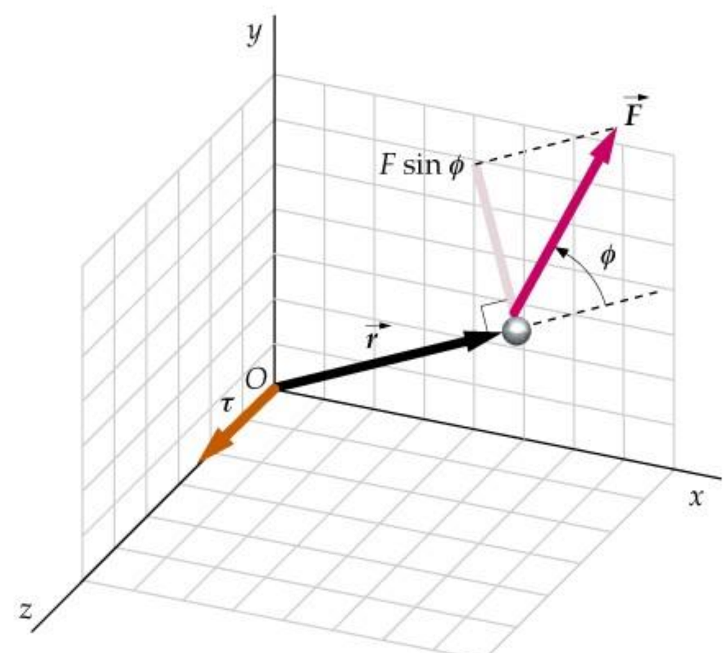
(a)

A natureza vetorial da Torque

A definição mais completa do torque é dada em termos do produto vetorial

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

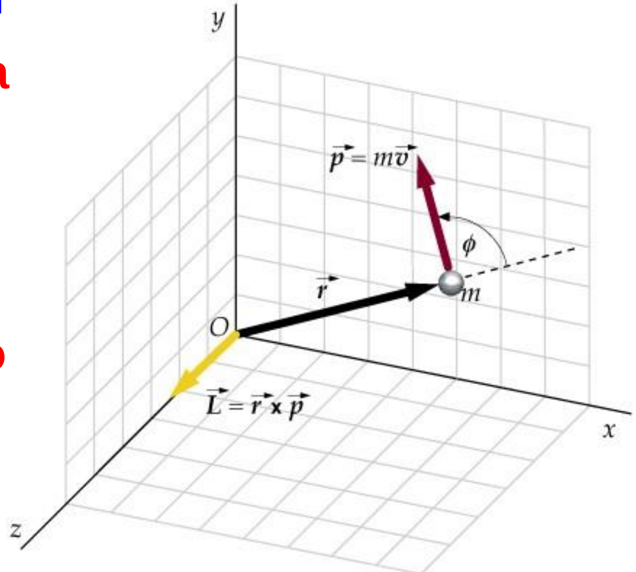




Momento Angular

Quantidade de Movimento Angular

A figura ao lado, mostra uma partícula de massa m, na posição r, se movendo com uma velocidade v. Ela possui uma quantidade de movimento linear $\vec{p} = m\vec{v}$



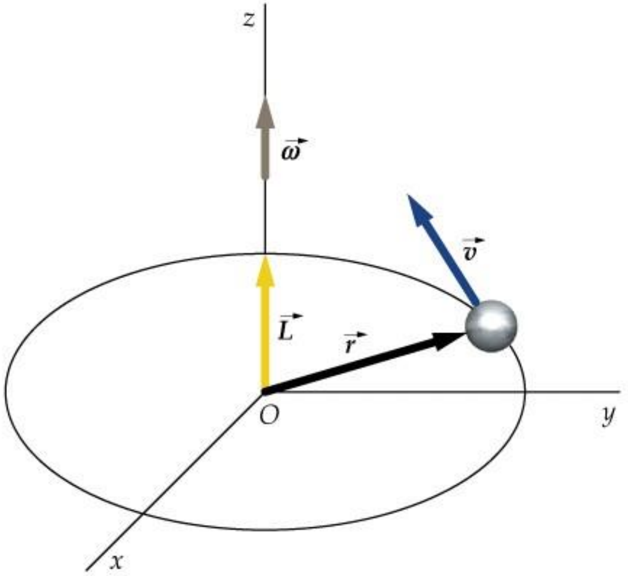
Definimos a Quantidade de Movimento Angular (ou Momento Angular) em relação à origem, como sendo

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Ou ainda, por analogia à quantidade de movimento linear podemos também escrever

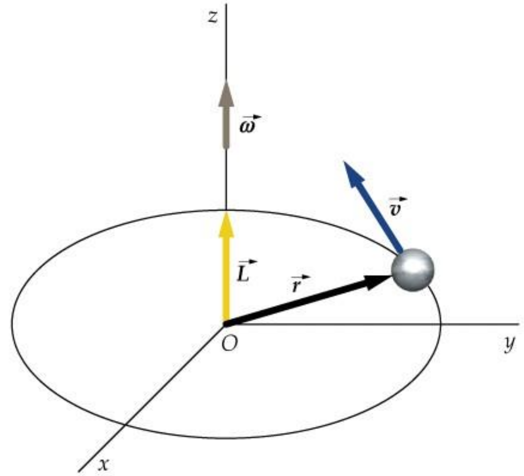
$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$



Quantidade de Movimento Angular

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$



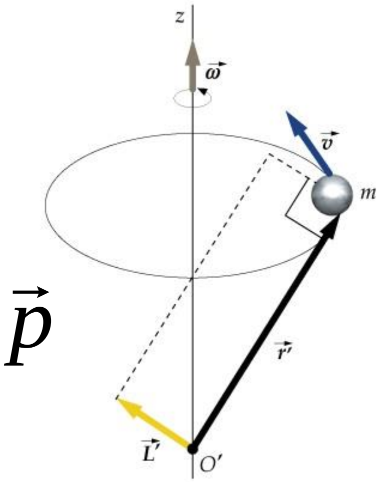
Ou ainda, por analogia à quantidade de movimento linear podemos também escrever

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

Porém, se mudarmos a origem do sistema de coordenadas, em relação ao plano da órbita, obtemos um novo valor de L que não é paralelo a ω.

Isto indica que a última definição não é universal.

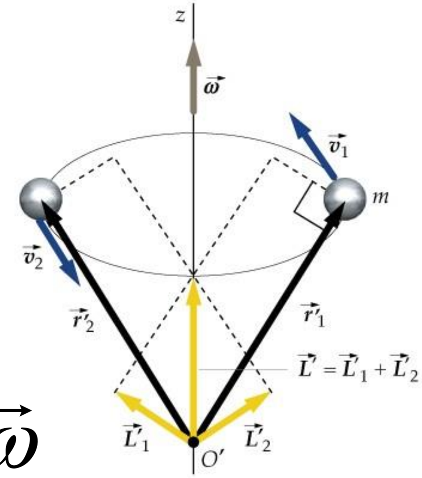


$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

No entanto, se tivéssemos duas massas simétricas em relação ao eixo z, L seria paralelo a ω.

Isto mostra que a última definição é válida apenas quando temos simetria em relação ao eixo de rotação.

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$



Quantidade de Movimento Angular

Mais analogias

A segunda lei de Newton para a translação pode ser escrita como:

$$\vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}_{sis}}{dt}$$

A segunda lei de Newton para a rotação pode ser escrita em termos do torque e momento angular como:

$$\vec{\tau}_{ext} = \frac{d\vec{L}_{sis}}{dt}$$

Impulso angular – Quantidade de movimento angular

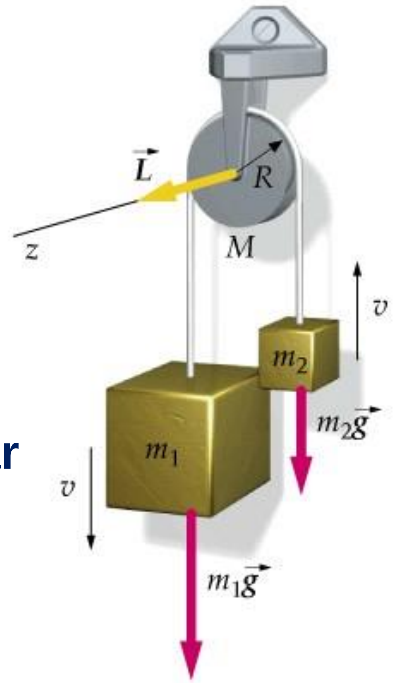
$$\Delta\vec{L}_{sis} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{\tau}_{ext}\,dt$$

Que é o análogo de

$$\Delta\vec{P}_{sis} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{ext}\,dt$$

Exemplo

Uma polia sem atrito nos mancais, tem dois blocos, de massas m1 > m2, ligadas por um fio de massa desprezível. A polia é disco de massa M e raio R. Determine a aceleração dos blocos.



Vamos fixar o sistema de coordenadas no eixo da polia, com o eixo z paralelo ao eixo da polia.

Vamos considerar o sistema como constituído das massas, polia e fio.

$$\vec{\tau}_{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Como os vetores torque, velocidade angular e quantidade de movimento angular são paralelos ao eixo z, podemos tratar este problema, como unidimensional e trabalhar escalarmente.

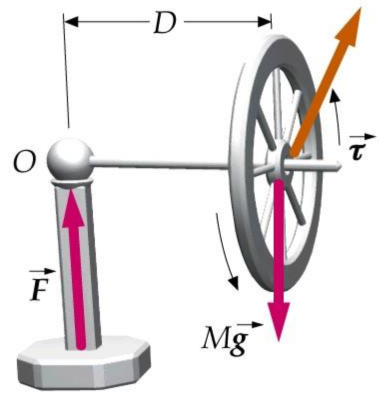
$$\left.\begin{aligned}
\tau_{ext} &= \tau_n + \tau_g + \tau_1 + \tau_2 \\
\tau_{ext} &= m_1 gR - m_2 gR \\
L_z &= L_p + L_1 + L_2 \\
L_z &= I\omega + m_1 vR + m_2 vR
\end{aligned}\right\}$$

$$\tau_{ext} = \frac{dL}{dt} = I\alpha + (m_1 + m_2)aR$$

$$a = R\alpha \qquad I = 1/2MR^2$$

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + M/2}g$$

Roda de bicicleta



A “roda de bicicleta” vista na aula consiste em um corpo em rotação, com o seu eixo livre para alterar a sua direção.

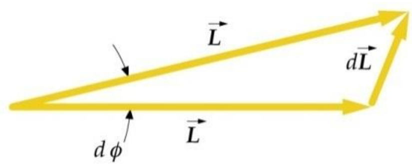
A quantidade de movimento angular da roda é:

$$\vec{L} = I_{cm}\vec{\omega}$$

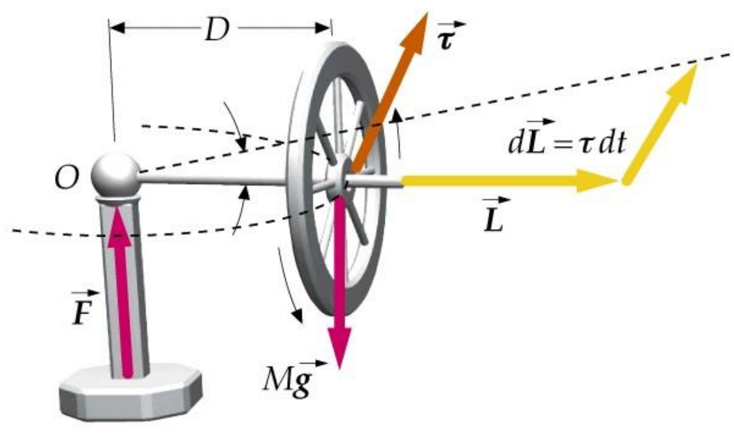
Aplicando-se a segunda lei de Newton para a rotação, temos:

$$\vec{\tau}_{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt} \qquad \vec{\tau}_{ext} = \vec{r}_{cm} \times M\vec{g}$$

$$d\vec{L} = \vec{\tau}_{ext}dt$$



$$dL = Ld\phi$$



A velocidade de precessão da roda em torno do eixo vertical é dada por:

$$\omega_p = \frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{L}\frac{dL}{dt} = \frac{\tau_{ext}}{L} = \frac{MgD}{I_{cm}\omega}$$

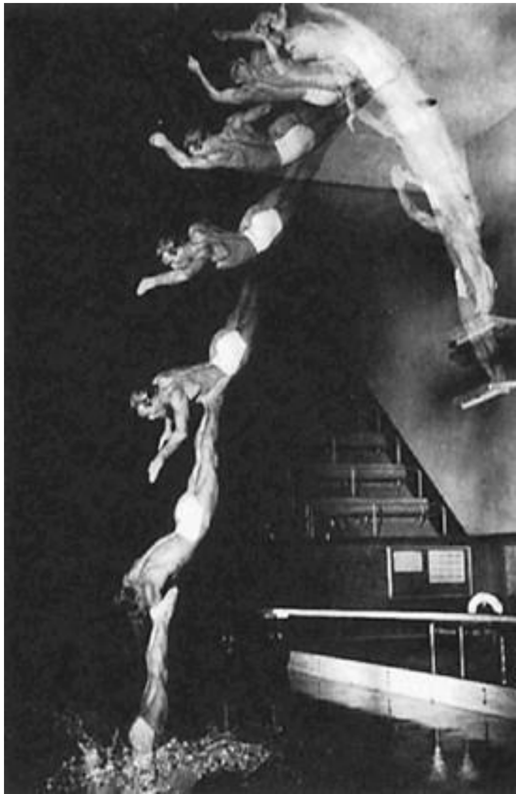
Conservação da Quantidade de Movimento Angular

Quando o torque externo resultante sobre um sistema é nulo, temos:

$$\vec{\tau}_{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{L}_{sis} = cte$$

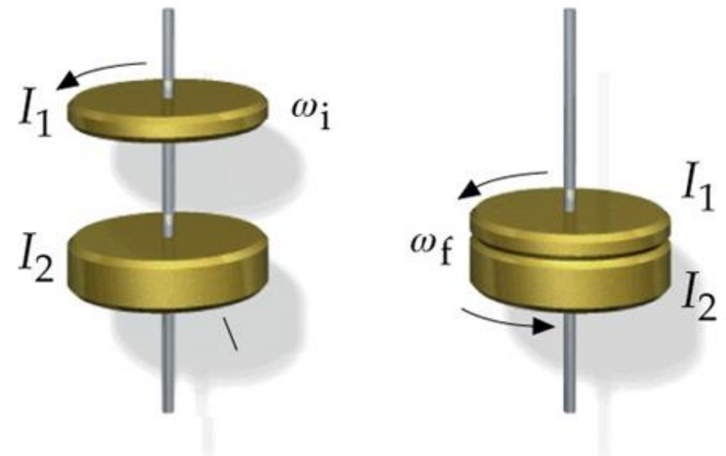
Temos a Conservação da Quantidade de Movimento Angular do sistema.

O peso não gera torque em relação ao eixo que passa pelo centro de massa.



Exemplo

O disco 1 gira livremente com velocidade angular ω_i. Seu momento de inércia é I_1. Ele cai sobre o disco 2, com momento de inércia I_2, que está em repouso. Devido ao atrito cinético, os dois discos tendem a ter a mesma velocidade. Determine ω_f



Temos a Conservação da Quantidade de Movimento Angular do sistema.

$$\vec{\tau}_{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad \Longrightarrow \quad L_i = L_f = cte$$

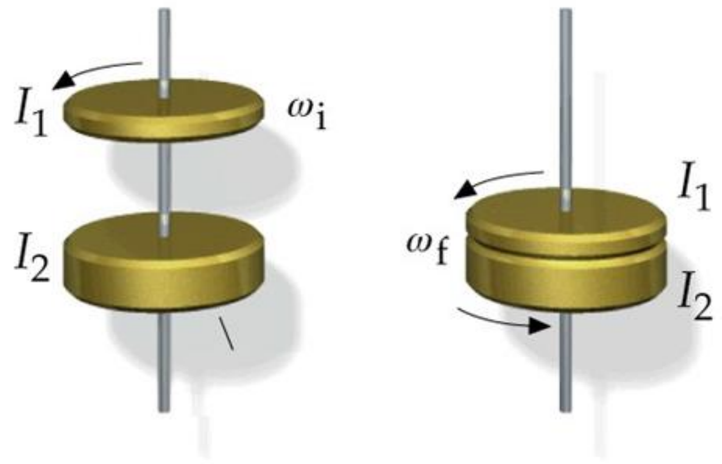
$$I_1\omega_i = (I_1 + I_2)\omega_f$$

$$\omega_f = \frac{I_1}{I_1 + I_2}\omega_i = \frac{1}{1 + I_2/I_1}\omega_i$$

Exemplo

Podemos escrever a Energia Cinética de Rotação como:

$$K = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{(I\omega)^2}{2I} = \frac{L^2}{2I}$$



Vamos verificar a conservação da energia cinética

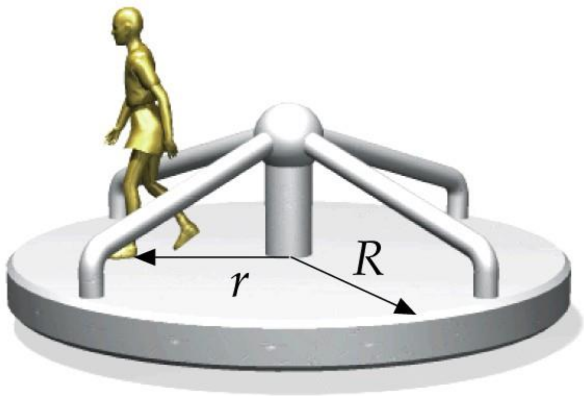
$$K_i = \frac{L_i^2}{2I_1} \qquad K_f = \frac{L_f^2}{2(I_1 + I_2)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{K_f}{K_i} = \frac{I_1}{I_1 + I_2}$$

Portanto, a Energia Cinética não se conservou.

Exemplo

Um parque possui um pequeno carrossel, cuja plataforma tem 3,0 m de diâmetro e 130 kg.m² de momento de inércia. Cinco colegas se colocam próximo à borda, com o carrossel girando a 20 rpm. Considere que quatro dos colegas se movam rapidamente para o centro do carrossel (r= 30 cm). Se a aceleração centrípeta necessária para atirar o quinto colega para fora do carrossel é de 4g, determine se este foi arremessado. (a massa de cada colega é 60 kg)



Como o torque externo em relação ao eixo do carrossel é nulo, há conservação da quantidade de movimento angular

$$L_f = L_i \Rightarrow I_f \omega_f = I_i \omega_i$$

$$I_i = 5mR^2 + I_{carr}$$

$$I_i = 805 kg.m^2$$

$$I_f = mR^2 + 4mr^2 + I_{carr}$$

$$I_f = 287 kg.m^2$$

$$\omega_f = 56{,}2 rpm = 5{,}88 rad/s$$

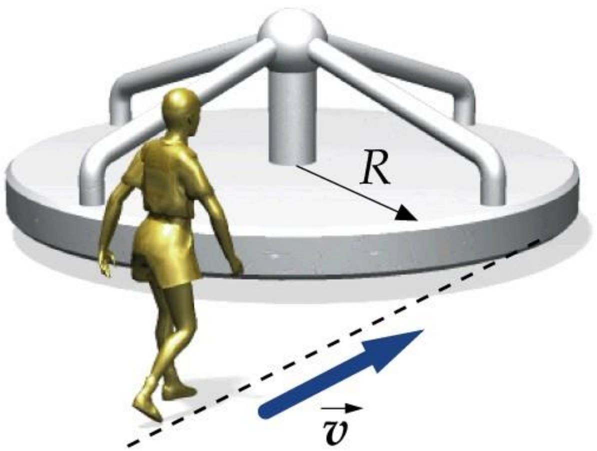
$$a_c = \omega^2 R = 51{,}9 m/s^2 > 5g$$

Arremessado !

Como é a força de atrito entre os pés dos 4 colegas e o carrossel, enquanto se movem?

Exemplo

Uma criança de 25 kg, corre a 2,5 m/s, tangente à borda de um carrossel de raio 2,0 m. O carrossel inicialmente em repouso, tem momento de inércia de 500 kg.m². A criança pula sobre o carrossel. Determine a velocidade angular final do conjunto.



Como o torque externo em relação ao eixo do carrossel é nulo, há conservação da quantidade de movimento angular

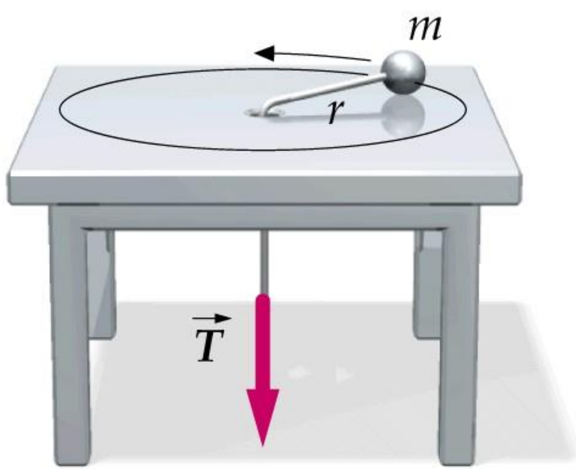
$$L_f = L_i \quad \Longrightarrow \quad I_f \omega_f = \left| \vec{r}_c \times m\vec{v}_i \right| = Rmv_i$$

$$I_f = mR^2 + I_{carr}$$

$$\omega_f = \frac{Rmv_i}{mR^2 + I_{carr}} = 0,21 rad/s$$

Exemplo

Uma partícula de massa m se move sem atrito com velocidade v_0 em um círculo de raio r_0. A partícula está presa a um fio que passa por um furo na mesa. O fio é puxado até que o raio do movimento passe a ser r_f. (a) Determine a velocidade final. (b) Determine a tensão no fio. (c) Determine o trabalho realizado pela tensão sobre a partícula.



Como a tensão é radial, não realiza torque sobre a partícula, então há conservação da quantidade de movimento angular da partícula.

$$L_f = L_i \Rightarrow \left|\vec{r}_f \times m\vec{v}_f\right| = \left|\vec{r}_0 \times m\vec{v}_0\right| \Rightarrow v_f = \frac{r_0 v_0}{r_f}$$

$$\left.\begin{array}{l} T = m\dfrac{v^2}{r} \\ \\ L = mrv \end{array}\right\} \quad T = \frac{L^2}{mr^3}$$

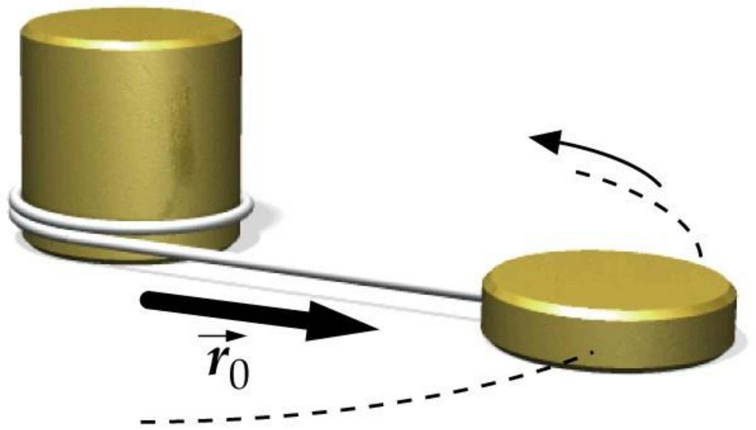
$$dW = \vec{T}\cdot d\vec{l} = -T dr$$

$$W = -\int_{r_0}^{r_f} T dr = -\int_{r_0}^{r_f} \frac{L^2}{mr^3} dr$$

$$W = \frac{L^2}{2m}\left(\frac{1}{r_f^2} - \frac{1}{r_0^2}\right)$$

Exemplo

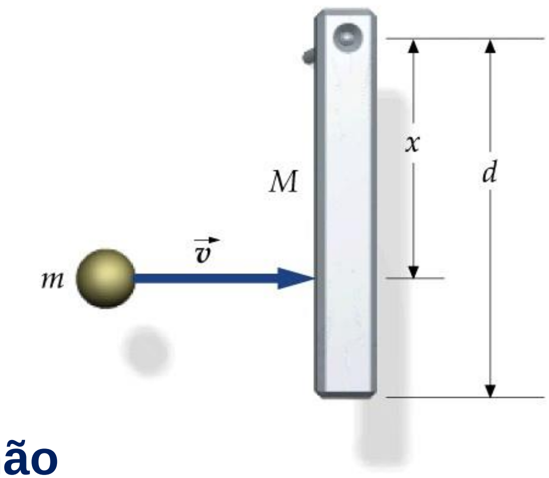
Considere a situação ao lado. Ela é semelhante à do problema anterior? A quantidade de movimento se conserva? Como varia ω em função do raio?



Como a tensão não é radial, existe um torque sobre a partícula, então não há conservação da quantidade de movimento angular da partícula.

Exemplo

Uma barra fina de massa M e comprimento d está pendurada em um pivô. Um pedaço de massa de modelar de massa m e velocidade v, atinge a barra a uma distância x do pivô e se prende a ela. Determine a razão entre as energias cinéticas antes e depois da colisão.



A colisão é inelástica, não há conservação da energia mecânica do sistema.

Durante a colisão há uma grande força no pivô, portanto não há conservação da quantidade de movimento linear.

A força no pivô é radial, não existe torque e temos conservação da quantidade de movimento angular.

$$L_f = L_i \quad \Longrightarrow \quad L_f = \left|\vec{r} \times m\vec{v}\right| = mvx$$

$$K_i = \frac{1}{2}mv^2$$

$$K_f = \frac{1}{2}I_f\omega_f^2 = \frac{L_f^2}{2I_f}$$

$$I_f = mx^2 + \frac{1}{3}Md^2$$

$$\frac{K_f}{K_i} = \frac{\frac{3}{2}\frac{(mrv)^2}{(3mx^2 + Md^2)}}{\frac{1}{2}mv^2}$$

$$\frac{K_f}{K_i} = \frac{1}{1 + \frac{Md^2}{3mx^2}}$$

Para pensar !

Uma pessoa está sobre uma cadeira giratória, com a roda de bicicleta com seu eixo na vertical. Se ela gira a roda, o que acontece com a cadeira?

A mesma condição anterior, porém com o eixo da roda na horizontal.

Como fazer para colocar o eixo na vertical?

O que acontece com a cadeira?