AULA 8

Ciência e Tecnologia do Vácuo

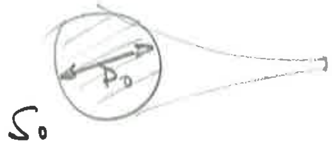
12/03/16

Passar lista de presença

Resumo da aula anterior

Condutância no regime molecular ($\lambda >> D$) - colisões com as paredes

a) Vuvuzela



$$S = S_0 e^{-\beta x}$$

$$\boxed{C = \frac{4}{3} K \frac{\bar{v}}{\int_0^L \frac{B\,dl}{A^2}}}$$

Equação Geral

$$C = \frac{K \bar{v} \pi D_0^3 \beta}{8} \left[e^{\frac{3}{2}\beta L} - 1 \right]^{-1}$$

para $\beta \to 0$ N_2, $T = 293\,K$

$$\boxed{C \simeq 12{,}3 \frac{D_0^3}{L} \quad [\ell/s]}$$

D (cm)
L (cm)

b) Duto Anular

$$\boxed{C = 12 K (D_2 - D_1)^2 (D_1 + D_2)}$$

aproximação Prof. Helcio Onusic

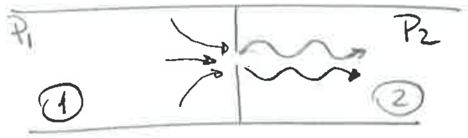
$$\boxed{C = \frac{12}{L} (D_2^3 - D_1^3)\left(1 - \frac{D_1}{D_2}\right)}$$

$\Longrightarrow$ Resolução de exercícios

Condutâncias no Regime Viscoso

$\left\{ \begin{array}{l} \lambda \ll D \\ \text{colisões elásticas entre moléculas} \end{array} \right.$

a) Condutância de uma abertura:



Velocidades altas
$V \sim 1$ MACH
$V \sim 340\,m/s$

HIPÓTESES:
1) $P_1 \sim$ atm
2) $P_2 < P_1$
3) λ menor que as dimensões da abertura

Nessas condições o gás flui do compartimento 1 para o 2
O gás tem a menor seção transversal ao atravessar a abertura
Depois dessa contração (compressão) o gás passa por vários contrações e expansões até finalmente se difundir na massa do gás em 2.

Expansão adiabática

Expansões e contrações tão rápidas que não há transferência de calor

$Q\,(\text{calor}) = 0$

equação $PV^\gamma = cte$

$\gamma = \dfrac{c_p}{c_v}$ $\left\{ \begin{array}{l} c_p \text{ é o calor específico P cte} \\ c_v \text{ é o calor específico V cte} \end{array} \right.$

variação térmica de uma substância ao receber certa quantidade de calor ($J/kg K$) ($cal/g°C$)

Num processo adiabático

$$\boxed{P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma}$$

Para gases monoatômicos $c_v = \frac{3}{2} R \Rightarrow C_v = 12{,}5 \frac{J}{mol\,K}$ (He)

$C_v = 20{,}0 \frac{J}{mol\,K}$ (N_2)

$$\boxed{c_p - c_v = R}$$

Calor específico é a quantidade de calor necessária para aumentar em 1 grau 1 mol de moléculas $\left\{ \begin{array}{l} (c_p) \text{ a pressão cte} \\ (c_v) \text{ a volume cte} \end{array} \right.$

$$\boxed{Q = A P_1 \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\gamma} \left\{ \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{R_0 T_1}{M} \left[1 - \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{2}} \right] \right\}^{1/2}} \quad (1)$$

CGS

$\gamma = \frac{C_p}{C_v}$, R_0, M massa molar, T_1 temperatura

P_1 = pressão do compartimento 1

Como $\boxed{Q = C\Delta P}$, então:

$$C = \frac{9{,}13\,A}{1-(P_2/P_1)}\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{1/\gamma}\left\{\frac{2\gamma}{\gamma-1}\left(\frac{T_1}{M}\right)\left[1-\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{(\gamma-1)}{\gamma}}\right]\right\}^{1/2}$$

A em cm^2, $C(\ell/s)$, $T(K)$, $M(g)$

Para ar $80\%\ N_2$ $20\%\ O_2$ $M \simeq 29$ $T = 293K$ $\gamma = 1{,}4$

$$\boxed{C = \frac{76{,}6\,A}{1-(P_2/P_1)}\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{0{,}712}\left[1-\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{0{,}288}\right]^{1/2}} \quad (11)$$

Para $P_1 = P_2$ $Q = 0$ (eq. 1)

e será máximo para $\left(\frac{P_2}{P_1}\right) = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \equiv r_c$

r_c é um valor crítico

Para $T = 293\,K$ $\quad r_c = 0{,}525$

$$\boxed{Q_c = 20\,A\,P_1}$$

$A\,(cm^2)$ $\quad P\,(Torr)$ $\quad Q\,(Torr\ l/s)$

Para $\dfrac{P_2}{P_1} \leq r_c \rightarrow Q = C\Delta P$ $\quad \dfrac{20\,A\,P_1}{P_1 - P_2} = C$

então
$$\boxed{C = \frac{20\,A}{1 - \frac{P_2}{P_1}}}$$

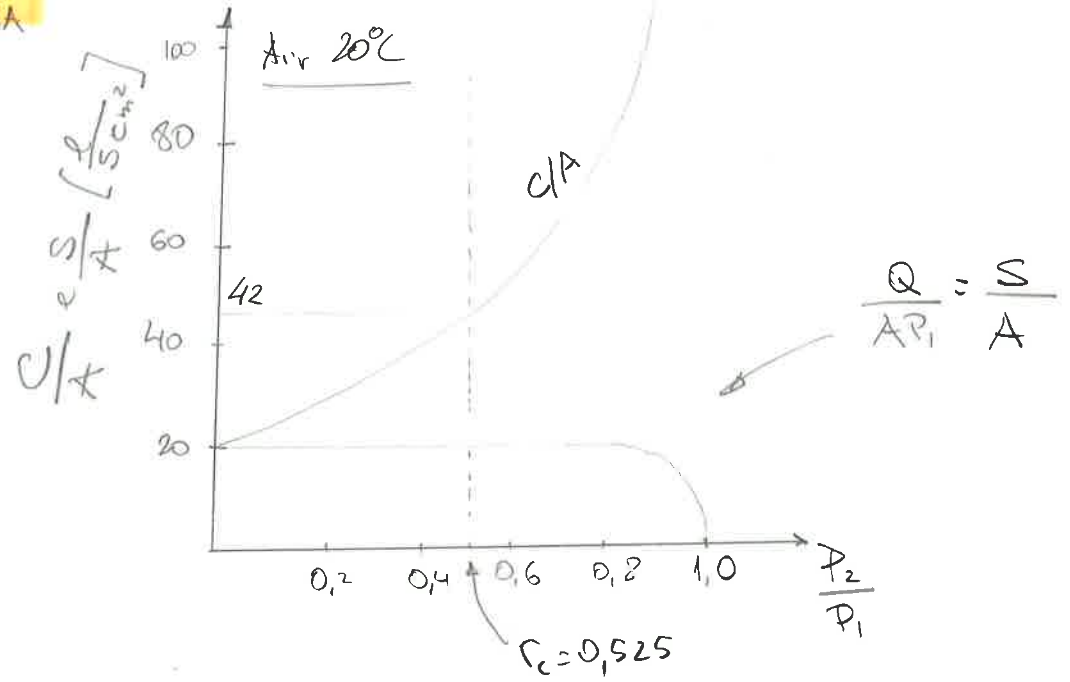
ou seja para $P_2 < 0{,}1\,P_1$; $\dfrac{P_2}{P_1} < 0{,}1$

$$\boxed{C \sim 20\,A}$$

Velocidade de bombeamento (S) através dessa abertura

$$S = \frac{Q}{P_1} = \frac{C\,(P_1 - P_2)}{P_1} = C\left(1 - \frac{P_2}{P_1}\right)$$

TRANSPARÊNCIA



$\frac{S}{A}$ é cte até r_c e cai a zero para $P_1 \simeq P_2$

C/A tende a infinito p/ $P_1 \sim P_2$

Regime Viscoso

b) Condutância de um duto

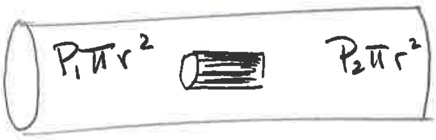
Lei de Poiseville

Em um tubo longo o fluxo acontece na região de alta pressão (P_1) para o de baixa pressão (P_2)

O perfil da velocidade do fluxo de moléculas é constante.

Não tem movimento turbulento

A velocidade do fluxo de moléculas nas paredes é zero!



forças viscosas

supondo um pequeno cilindro de raio r em equilíbrio ≡ veloc. constante

Forças atuando no cilindro

$$P = \frac{F}{A}$$

① Diferença de pressão $\underline{dP \pi r^2}$

② Força viscosa ≡ oposta ao fluxo

$$\boxed{F = -\eta A \frac{dv}{dr}}$$

$$F = -\eta \underbrace{2\pi r dx}_{\text{área da superfície do cilindro}} \frac{dv}{dr}$$

Igualando as duas forças

$$-\eta 2\pi r dx \frac{dv}{dr} = dP \pi r^2$$

$$\boxed{-dv = \frac{dP}{dx} \frac{1}{2\eta} r dr}$$

integrando, temos

$$\int_0^v dv = \frac{dP}{dx} \frac{1}{2\eta} \int_0^r r dr \Longrightarrow -v = \frac{dP}{dx} \frac{1}{2\eta} \frac{r^2}{2} + C$$

A constante C pode ser obtida das condições de contorno

$v = 0 \qquad r = R$

$$0 = \frac{dP}{dx}\frac{1}{2\eta}\frac{R^2}{2} + C \Rightarrow C = -\frac{dP}{dx}\frac{R^2}{4\eta}$$

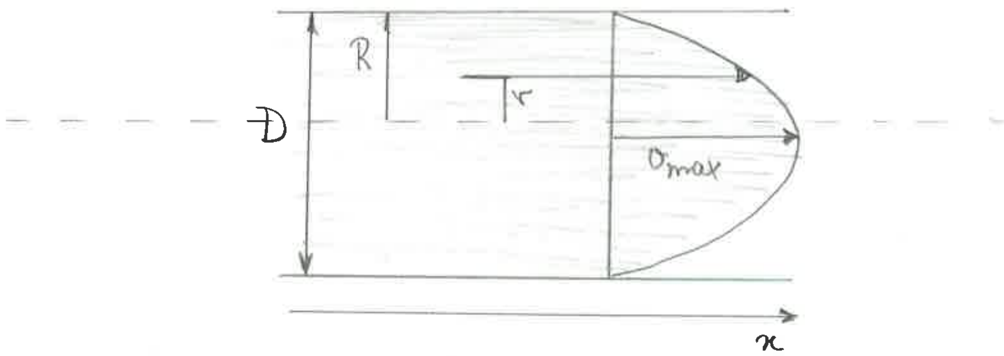
O perfil da velocidade das moléculas será:

$$\boxed{v = -\frac{1}{4\eta}\frac{dP}{dx}\left(R^2 - r^2\right)}$$

→ O fluxo de gás (velocidade) vai na direção da queda da pressão

→ Tem perfil parabólico

Distribuição das velocidades no regime viscoso



Cálculo do Throughput (Q)

$Q = \frac{PdV}{dt}$ $\boxed{dV = v\,dt\,dA}$ análise dimensional $\frac{cm}{s}\, s\, cm^2 = cm^3$

$$\left.\begin{aligned} A &= \pi R^2 \\ dA &= 2\pi r\,dr \\ \frac{dV}{dt} &= v\,dA \end{aligned}\right\}$$

substituindo na equação da distribuição de velocidade,

$$\boxed{v = -\frac{1}{4\eta}\frac{dP}{dx}(R^2 - r^2)}$$

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{4\eta}\frac{dP}{dx}(R^2 - r^2)\,2\pi r\,dr$$

O volume total de gás fluindo através da seção reta do tubo por unidade de tempo é obtido integrando de $r=0$ a $r=R$

$$= -\int_0^R \frac{2\pi}{4\eta}\frac{dP}{dx}(R^2 r - r^3)\,dr = -\frac{2\pi}{4\eta}\frac{dP}{dx}\left[\frac{R^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^R$$

$$= -\frac{2\pi}{4\eta}\frac{dP}{dx}\left[\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4}\right] = -\frac{\pi}{8\eta}\frac{dP}{dx}R^4$$

então $\boxed{\frac{dV}{dt} = -\frac{\pi}{8\eta}\frac{dP}{dx}R^4}$

depende inversamente da viscosidade

Essa equação só tem sentido no

Regime Viscoso

$$Q = \frac{P\,dV}{dt} = P\left[\frac{-\pi}{8\eta} R^4 \frac{dP}{dx}\right]$$

$$\boxed{Q = \frac{-\pi}{8\eta} R^4 P \frac{dP}{dx}}$$

integrando de P_1 a P_2 e de 0 a L, vem: (*)

$$Q = \frac{-\pi}{8\eta} R^4 \frac{\int_{P_1}^{P_2} P \frac{dP}{dx} dx}{\int_0^L dx} = \frac{-\pi}{8\eta} \frac{R^4}{2} (P_2^2 - P_1^2) \frac{1}{L}$$

$$\boxed{Q = \frac{\pi R^4}{16\eta L} (P_1 - P_2)(P_1 + P_2)}$$

definindo $\overline{P} = \frac{P_1 + P_2}{2}$, temos

$$Q = \frac{\pi R^4}{16\eta L} 2\overline{P} (P_1 - P_2)$$

Mas, $Q = C\Delta P$, então $\boxed{C = \frac{\pi R^4}{8\eta L} \overline{P}}$

logo $\boxed{C = \frac{\pi D^4}{128\eta L} \overline{P}}$ $\qquad \underline{D = 2R}$

Condutância depende da

PRESSÃO!!

* é feita uma média do throughput no tubo

$$\langle Q \rangle = \frac{\int_0^L Q\,dx}{L} = \frac{-\pi a^4}{8\eta L} \int_0^L P \frac{dP}{dx} dx = \frac{-\pi a^4}{8\eta L} \int_{P_1}^{P_2} P\,dP$$

Para N_2 ; $T = 293K$; $\eta = 175 \mu$ Poise

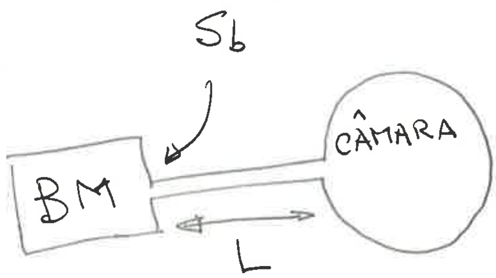
$$\boxed{C_{N_2} \simeq \frac{180 D^4 \bar{P}}{L}}$$

P (Torr)
D (cm)

$$\bar{P} = \frac{P_1 + P_2}{2}$$

Exercício 17 - lista 2

$$\begin{cases} S = 60\ \ell/min = 1\ \ell/s \\ L = 80\ cm \\ D = 1'' = 2,5\ cm \end{cases}$$



Qual a velocidade de bombeamento efetiva (S_{ef})?

N_2 $T = 300K$

(a) No regime molecular

$$C_{N_2} = \frac{12 D^3}{L} \ (\ell/s)$$

$$S_{ef} = \frac{S_b C}{S_b + C} \Longrightarrow C_{N_2} = \frac{12 (2,5)^3}{80} = 2,3\ \ell/s$$

$$\boxed{S_{ef} = \frac{1 \times 2,3}{1 + 2,3} = 0,7\ \ell/s}$$

(b) No regime viscoso

$$\boxed{C_{N_2 \text{ viscoso}} = \frac{180 D^4 \bar{P}}{L}}$$

Depende da pressão

$DP \leqslant 10^{-2}$ cm Torr → regime molecular

$DP \geqslant 1$ cm Torr → regime viscoso

$$C_{N_2 \text{ viscoso}} = \frac{180 D^3 D\bar{P}}{L}$$

$DP \geqslant 1$ condição limite, então

$$C_{N_2} = \frac{180 D^3}{L} \times 1 = 35 \ l/s$$

Neste caso : $S_{ef} = \frac{S_b C}{S_b + C} \sim S_b = 1 \ l/s$

Comparação das condutâncias

$$\frac{C_{\text{viscoso}}}{C_{\text{MOLECULAR}}} = \frac{180 D^3 D\bar{P}}{\cancel{L}} \frac{\cancel{L}}{12 D^3} \simeq 15$$

No início do bombeamento as condutâncias são ENORMES !!!

i.e. As impedâncias são pequenas.

Condutâncias dependentes do gás

No regime viscoso

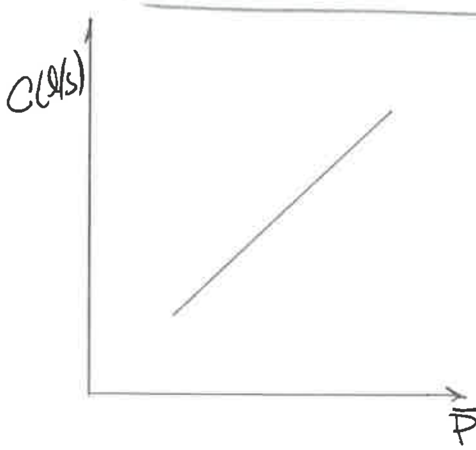
$$\boxed{C = \frac{1}{\eta}\,\frac{\pi D^4 \bar{P}}{128 L}}$$

gases diferentes
η diferentes

Reta

$y = AX$

$A \equiv 1/\eta$



Pode-se extrair o valor da viscosidade do gás experimentalmente a partir do gráfico.

$$\eta \sim \frac{n m \bar{v} \lambda}{2} \qquad n = \frac{P}{kT} \qquad \bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi n \delta^2} = \frac{kT}{\sqrt{2}\,\pi \delta^2 P}$$

$$\boxed{\lambda = 2{,}3 \times 10^{-20}\,\frac{T}{\delta^2 P} \quad \text{(cm)}}$$

Para T em K
δ em cm
P em Torr

CGS $\quad 1 \text{ Poise} = \frac{1\,g}{cm\,s} = \frac{dina\,s}{cm^2}$

SI $\quad 10 \text{ Poise} = \frac{1\,kg}{m\,s} = 1\,Pa.s$

$$\eta = \frac{n m \bar{v} \lambda}{2} = \frac{\cancel{P}}{\cancel{kT}}\,\frac{m}{2}\,\bar{v}\,\frac{\cancel{kT}}{\sqrt{2}\,\pi \delta^2 \cancel{P}} = \frac{m \bar{v}}{2\sqrt{2}\,\pi \delta^2}$$

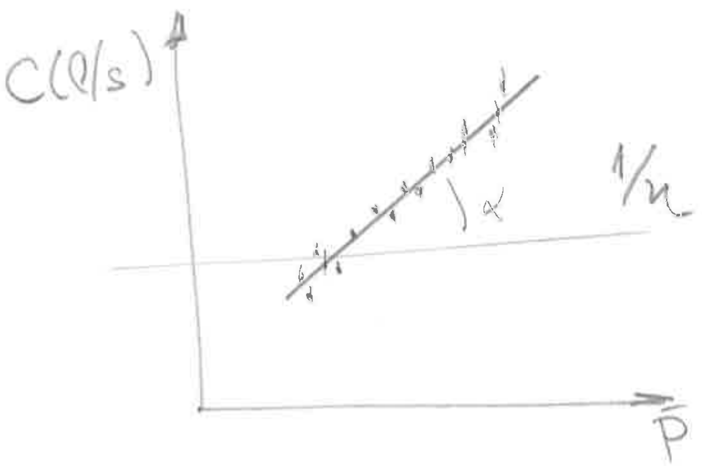
$$\eta = \frac{m\bar{v}}{2\sqrt{2}\pi\delta^2} \simeq \frac{1}{\pi\delta^2}\sqrt{\frac{mkT}{\pi}}$$

$$\boxed{\lambda = \frac{5\times10^{-3}\,(\mathrm{cm})}{P\,(\mathrm{Torr})}}$$

gás	η (μPoise a 20°C)	$C_{gás}/C_{N_2}$
N_2	175	1
O_2	203	0,86
Ar	182	0,96
H_2	88	2
He	196	0,89
H_2O	94	1,9

$$\boxed{C_{viscoso} = \frac{\pi}{128}\,\frac{D^4}{L}\,\frac{1}{\eta}\,\bar{P}}$$

É possível medir no laboratório



proporcional ao inverso da viscosidade.

Regime Intermediário

$$\boxed{10^{-2} \leq D\bar{P} \leq 1}$$

$C_I \propto C_v + a\, C_m$ $\qquad f(x) = a + bx$

C_I = condutância no regime intermediário

C_v = no regime viscoso

C_m = condutância no regime molecular

$$a = \frac{1 + \left(\frac{m}{kT}\right)^{1/2} \frac{D\bar{P}}{\eta}}{1 + 1{,}24 \left(\frac{m}{kT}\right)^{1/2} \frac{D\bar{P}}{\eta}}$$

$$\eta \sim \lambda P \left(\frac{2m}{\pi k T}\right)^{1/2}$$

$$\eta = \frac{n m \bar{v} \lambda}{2} \; ; \quad n = \frac{P}{kT} \; ; \quad \bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

$$\eta = \frac{P}{kT} \frac{m\lambda}{2} \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = P\lambda \sqrt{\frac{2m}{T k \pi}}$$

$$\boxed{a = \frac{1 + 1{,}25 \frac{D}{\lambda}}{1 + 1{,}55 \frac{D}{\lambda}}}$$

Equação aproximada

$$C_I = C_m \left(0{,}0736 \frac{D}{\bar{\lambda}} + 1 \right)$$

$$\boxed{\bar{\lambda} = \frac{5 \times 10^{-3}\ (cm)}{\bar{P}\ (Torr)}}$$