Mecânica: Pêndulo simples

Lagrangiana:

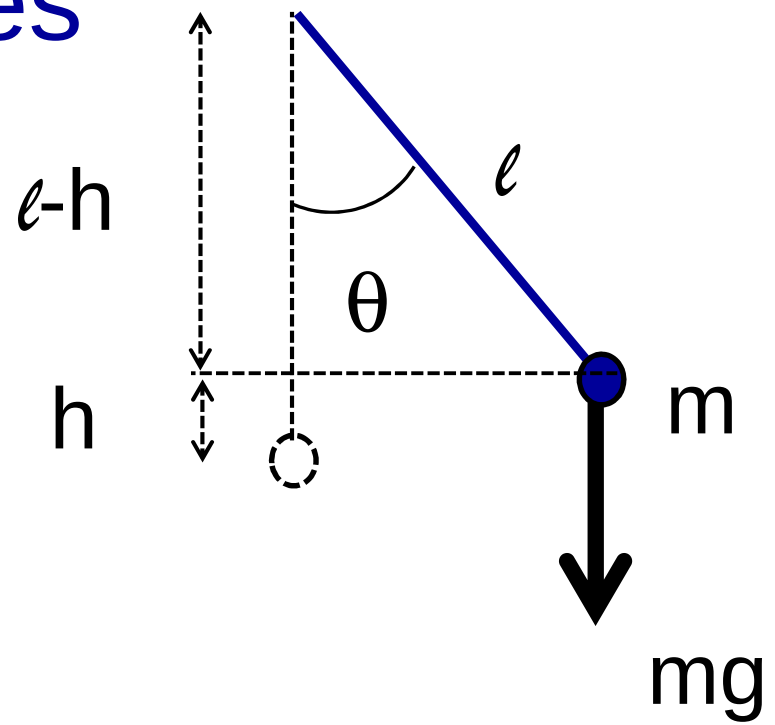
$$\boxed{\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}mv^2 - mgh}$$

Coordenada generalizada: θ

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta})^2 - mgl(1-\cos(\theta))}$$

Equações de Lagrange:

$$\left\{\begin{array}{ccl} p_\theta & = & \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta}(t) \Rightarrow \dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{p_\theta}{ml^2} \\ \dfrac{dp_\theta}{dt} & = & \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -mgl\sin\theta \end{array}\right.$$

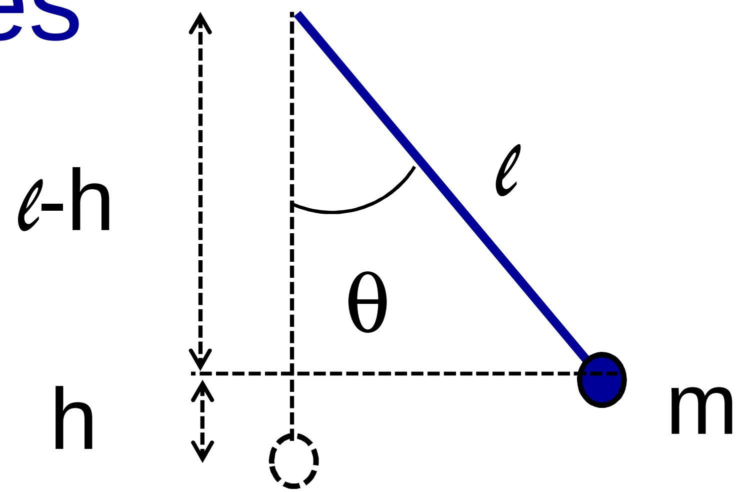


$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} x = l\sin\theta + x_0 \\ y = l(1-\cos\theta) + y_0 \end{array}\right.}$$

Mecânica: Pêndulo simples

Sistema de Equações diferenciais

$$\begin{cases} \dfrac{d\theta(t)}{dt} &= \dfrac{p_\theta(t)}{ml^2} \\[2ex] \dfrac{dp_\theta(t)}{dt} &= -mgl\sin\theta(t) \end{cases}$$



Condições iniciais: $\theta(0)$ e $p_\theta(0)$.

Energia (conservada):

$$\boxed{E = \frac{1}{2}mv^2 + mgh = \frac{(p_\theta(t))^2}{2ml^2} + mgl\left[1 - \cos\left(\theta(t)\right)\right] = \text{ constante}}$$

Dica: fixar a Energia *E* e $\theta(0)=0$ e $p_\theta(0)$ será então:

$$\boxed{\theta(0) = 0 \Rightarrow p_\theta(0) = \pm l\sqrt{2mE}}$$

Pêndulo: Runge-Kutta 2a ordem (RK2)

Definimos os “k1”:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} k_1^\theta & = & (p_\theta(t)/ml^2)\ \Delta t \\ k_1^p & = & -mgl \sin\theta(t)\ \Delta t \end{array} \right.$$

“Valores em meio passo”:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \theta(t+\Delta t/2) & = & \theta(t) + k_1^\theta/2 \\ p_\theta(t+\Delta t/2) & = & p_\theta(t) + k_1^p/2 \end{array} \right.$$

Definimos os “k2”:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} k_2^\theta & = & (p_\theta(t+\Delta t/2)/ml^2)\ \Delta t \\ k_2^p & = & -mgl\ \sin\theta(t+\Delta t/2)\ \Delta t \end{array} \right.$$

Método de Runge-Kutta de 2a ordem (**RK2**):

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{rcl} \theta(t+\Delta t) & = & \theta(t) + k_2^\theta \\ p_\theta(t+\Delta t) & = & p_\theta(t) + k_2^p \end{array} \right.}$$

Ou seja, **dados** $\theta(t)$ e $p_\theta(t)$ (e a Energia tb), podemos calcula-los em t+ Δt:

Pêndulo: Runge-Kutta de 2a ordem

Para cada passo, calcula-se:

$$\boxed{t_n = n\,\Delta t}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} k_1^\theta & = & (p_n/ml^2)\;\Delta t \\ k_1^p & = & -mgl\sin(\theta_n)\;\Delta t \\ \theta_{1/2} & = & \theta_n + k_1^\theta/2 \\ p_{1/2} & = & p_n + k_1^p/2 \\ k_2^\theta & = & (p_{1/2}/ml^2)\;\Delta t \\ k_2^p & = & -mgl\sin(\theta_{1/2})\;\Delta t \end{array}\right.$$

RK2:

$$\boxed{\left\{\begin{array}{rcl} \theta_{n+1} & = & \theta_n + k_2^\theta \\ p_{n+1} & = & p_n + k_2^p \\ E_{n+1} & = & \dfrac{(p_{n+1})^2}{2ml^2} + mgl(1-\cos(\theta_{n+1})) \end{array}\right.}$$

- Começando em t=0 [dados x(0),v(0)] podemos calcular em t_1 [x_1,$(v)_1$].
- Temos tudo em t_1, calculamos tudo em t_2.... e assim por diante!

Aula 8 – Tarefa (Fazer upload!)

Considere um pêndulo simples de massa m=0,1 kg e comprimento l=50 cm partindo da posição de equilíbrio (θ_0=0) em t=0 com energia E. Determine o momento angular inicial a partir de *E* (escolha o sinal).

- *Varie a energia de E=0,1J até E=1,6J (escolha um passo).*
- *Para cada valor de energia E, calcule o ângulo $\theta(t)$ e o momento angular $p_\theta(t)$ do corpo usando o método de Runge-Kutta (RK2).*
- *Para cada Energia e tempo, plote o par [$\theta(t)$, $p_\theta(t)$] como um ponto em um gráfico (use a mesma figura para todas as energias).*
- *Qual a interpretação da figura final?*

Aula 8 – Tarefa - Dicas

- *O tempo máximo deve ser suficiente para, pelo menos, uma oscilação para cada energia. Um bom procedimento é usar o período de pequenas oscilações* $\boxed{T = \sqrt{l/g}}$ *como parâmetro.*

- *Uma sugestão é usar* $t_n = n.\Delta t$ *de 0 até* $t_N = 1.5T$ *com* $\Delta t = 0.01T$.
- *Utilize a opção* 'k.' *para plotar pontos pretos ao invés de simbolos.*
- *Utilize letras gregas (sintaxe tipo Latex) fontes grandes nos labels do gráfico. Por exemplo:*

```
xlabel('\theta(t)','FontSize',22);
ylabel('p_{\theta}','FontSize',22);
```

- *Para gerar um pdf da figura, use:*

```
print -r300 -dpdf PenduloSimples.pdf
```

Aula 8 – Tarefa – Dicas (cont)

- *O gráfico final deve ficar mais ou menos assim.*
- *Qual a interpretação Física? Por que está assimétrico em p_θ?*