Crescimento Endógeno I: Modelo AK

Mauro Rodrigues (USP)

2020

Introdução

- Modelo neoclássico de crescimento (Solow, Ramsey-Cass-Koopmans)
  - Capital apresenta retornos marginais decrescentes
  - No longo prazo, economia tende para o estado estacionário, em que não há crescimento
  - Modelo não tem motor próprio
  - Necessário introduzir progresso técnico exógeno para gerar crescimento de longo prazo
- Crescimento endógeno:
  - Modelos com motor próprio
  - AK – não há retornos marginais decrescentes
  - Inovação (Romer, Schumpeter) – abrir "caixa preta" do progresso técnico
- Referência: Acemoglu, cap.11.

Modelo AK

- Tempo contínuo: $t \in [0, \infty)$
- **Função de produção**:
$$Y = AK$$
  - Apenas um insumo: Capital
- Produtividade marginal do Capital: A
  - **Não** há retornos marginais decrescentes
- Modelo de crescimento idêntico ao neoclássico, mas com função de produção AK

Famílias

- Há um contínuo de famílias idênticas distribuídas no intervalo $[0,1]$
- Preferências:

$$\mathbb{U}_0 = \int_0^\infty e^{-\rho t} u(c_t) dt$$

$\rho > 0$

- Utilidade CRRA:

$$u(c) = \frac{c^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma}$$

$\gamma > 0$

- c, k, y: consumo, capital e produto per capita
- C, K, Y: consumo, capital e produto totais

Restrição Orçamentária

- Em t, renda da família = renda do capital = $r_t K_t$
- Renda dividida entre consumo (C_t) e investimento (I_t)
- Lei de movimento do capital:

$$\dot{K}_t = I_t - \delta K_t$$

- Restrição orçamentária em t:

$$C_t + \dot{K}_t + \delta K_t = r_t K_t \Rightarrow$$
$$\boxed{\dot{K}_t = (r_t - \delta) K_t - C_t}$$

- População (Número de membros de cada família) cresce à taxa n

$$\frac{\dot{L}_t}{L_t} = n$$

Restrição Orçamentária

- Dividindo por L_t ambos os lado da RO:

$$\frac{\dot{K}_t}{L_t} = (r_t - \delta)\frac{K_t}{L_t} - \frac{C_t}{L_t} \Rightarrow$$
$$\frac{\dot{K}_t}{L_t} = (r_t - \delta)k_t - c_t$$

- Note que:

$$k_t = \frac{K_t}{L_t} \Rightarrow$$
$$\dot{k}_t = \frac{\dot{K}_t L_t - K_t \dot{L}_t}{L_t^2} = \frac{\dot{K}_t}{L_t} - k_t n$$
$$\therefore \frac{\dot{K}_t}{L_t} = \dot{k}_t + k_t n$$

- Substituindo na expressão acima:

$$\boxed{\dot{k}_t = (r_t - \delta - n)k_t - c_t}$$

Problema da Família Representativa

- Dados k_0 e $\{r_t\}_{t\in[0,\infty)}$, família resolve:

$$\max_{\{c_t\}_{t\in[0,\infty)},\{k_t\}_{t\in(0,\infty)}} \int_0^\infty e^{-\rho t}u(c_t)dt$$
$$\text{s.a: } \dot{k}_t = (r_t - \delta - n)k_t - c_t$$

- Hamiltoniano:

$$\mathscr{H} = e^{-\rho t}\frac{c_t^{1-\gamma}-1}{1-\gamma} + \lambda_t[(r_t-\delta-n)k_t - c_t]$$

- c é controle e k é variável de estado

$$\mathscr{H}_c = 0 \Rightarrow e^{-\rho t}c_t^{-\gamma} - \lambda_t = 0 \Rightarrow \boxed{e^{-\rho t}c_t^{-\gamma} = \lambda_t} \tag{1}$$
$$\mathscr{H}_k = -\dot{\lambda}_t \Rightarrow \boxed{-\dot{\lambda}_t = \lambda_t(r_t-\delta-n)} \tag{2}$$
$$\lim_{t\to\infty}\lambda_t k_t = 0 \tag{3}$$

Problema da Família Representativa

De (1)

$$-\rho t - \gamma \ln(c_t) = \ln(\lambda_t)$$

Diferenciando em relação ao tempo

$$-\rho - \gamma \frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t}$$

Combinando com a eq (2)

$$-\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} = \rho + \gamma \frac{\dot{c}_t}{c_t} = r_t - \delta - n$$

Equação de Euler:

$$\boxed{\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{r_t - \delta - n - \rho}{\gamma}}$$

Equilíbrio

- Firmas contratam capital da família para produzir:

$$\pi_t = AK_t - r_t K_t$$

- Portanto: $r_t = A$
- Em equilíbrio:

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{A - \delta - n - \rho}{\gamma}$$

- Se $A > \delta + n + \rho$, então existe crescimento de longo prazo

Balanced Growth Path

- Trajetória de crescimento balanceado (Balanced Growth Path - BGP)
  - Principais variáveis crescem a taxas exponenciais constantes
  - Equivalente ao estado estacionário quando há crescimento de longo prazo
  - Tendência de longo prazo

$$\frac{\dot{y}_t}{y_t} = \frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{\dot{k}_t}{k_t} = g$$

- Neste caso não há dinâmica transitória
  - Economia sempre se encontra na trajetória de crescimento balanceado

$$g = \frac{A - \delta - n - \rho}{\gamma}$$

Balanced Growth Path

- Restrição adicional sobre os parâmetros
  - Garantir que $\mathbb{U}_0$ seja limitada
  - Condição de transversalidade satisfeita

  Como $c_t = c_0 e^{gt}$

$$\mathbb{U}_0 = \int_0^\infty e^{-\rho t} \frac{c_t^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} dt = \int_0^\infty e^{-\rho t} \frac{(c_0 e^{gt})^{1-\gamma}}{1-\gamma} dt =$$

$$\int_0^\infty e^{[-\rho + g(1-\gamma)]t} \frac{c_0^{1-\gamma}}{1-\gamma} dt$$

- Para que $\mathbb{U}_0$ seja limitada, devemos ter:

$$-\rho + g(1-\gamma) < 0 \Leftrightarrow$$

$$(1-\gamma)g < \rho \Leftrightarrow$$

$$(1-\gamma)\frac{A-\delta-n-\rho}{\gamma} < \rho \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\rho > (1-\gamma)(A-\delta-n)} \text{ ou } \boxed{A < \delta + n + \frac{\rho}{1-\gamma}}$$

Condição de Transversalidade

- Condição de transversalidade é dada por:

$$\lim_{t\to\infty} k_t\lambda_t = 0 \Leftrightarrow$$
$$\lim_{t\to\infty} k_0 e^{gt} e^{-\rho t}(c_0 e^{gt})^{-\gamma} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\lim_{t\to\infty} k_0 c_0^{-\gamma} e^{[-\rho+g(1-\gamma)]t} = 0$$

- Dado que $-\rho + g(1-\gamma) < 0$, a condição de transversalidade também está satisfeita com a restrição sobre os parâmetros

Encontrando c_0

- Para encontrar c_0 use a R.O. intertemporal. Supondo $n = 0$:

$$\begin{aligned} \dot{k}_t - (A-\delta)k_t = -c_t = -c_0 e^{gt} \Leftrightarrow \\ \underbrace{[\dot{k}_t - (A-\delta)k_t]e^{-(A-\delta)t}}_{\frac{dk_t e^{-(A-\delta)t}}{dt}} = -c_0 e^{[g-(A-\delta)]t} \end{aligned} \tag{4}$$

- Note que:

$$\begin{aligned} g - (A-\delta) &= \frac{A-\delta-\rho}{\gamma} - (A-\delta) \\ &= (A-\delta)\left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) - \frac{\rho}{\gamma} \\ &= \frac{(A-\delta)(1-\gamma) - \rho}{\gamma} < 0 \end{aligned}$$

Encontrando c_0

- Integrando ambos os lados de (4):

$$\int_0^\infty \frac{dk_t e^{-(A-\delta)t}}{dt} dt = -\int_0^\infty c_0 e^{-t[\rho-(A-\delta)(1-\gamma)]/\gamma} dt \tag{5}$$

$$\underbrace{\left(\lim_{t\to\infty} k_t e^{-(A-\delta)t}\right)}_{=0(\textbf{Checar!})} - k_0 = \frac{c_0}{[\rho-(A-\delta)(1-\gamma)]/\gamma} \underbrace{e^{-t[\rho-(A-\delta)(1-\gamma)]/\gamma}\Big|_0^\infty}_{=0-1}$$

$\therefore$

$$\boxed{c_0 = \frac{\rho-(A-\delta)(1-\gamma)}{\gamma} k_0}$$

Taxa de crescimento de k_t

- Considere a equação (5), mas iniciando em um instante t:

$$\int_t^\infty \frac{dk_\tau e^{-(A-\delta)\tau}}{d\tau} d\tau = -\int_t^\infty c_0 e^{-\tau[\rho-(A-\delta)(1-\gamma)]/\gamma} d\tau \Leftrightarrow$$

$$\cancel{\left(\lim_{\tau\to\infty} k_\tau e^{-(A-\delta)\tau}\right)}^{0} - k_t e^{-(A-\delta)t} =$$

$$\frac{c_0}{[\rho-(A-\delta)(1-\gamma)]/\gamma}\left[0 - e^{-t[\rho-(A-\delta)(1-\gamma)]/\gamma}\right]$$

Logo:

$$k_t = \overbrace{\frac{c_0}{[\rho-(A-\delta)(1-\gamma)]/\gamma}}^{k_0} \exp\left\{\left[\frac{-\rho+(A-\delta)(1-\gamma)}{\gamma} + (A-\delta)\right] t\right\}$$

$$\boxed{k_t = k_0 e^{t[A-\delta-\rho]/\gamma} = k_0 e^{gt}}$$

- $y_t = Ak_t$ também cresce à taxa g.

Extensões

- Dois insumos acumuláveis: capital físico e capital humano
  - Retornos marginais decrescentes em relação a cada um deles individualmente
  - Porém retornos constantes em relação a ambos
- Learning by doing (Romer, 1986):
  - No nível da firma, capital apresenta retornos marginais decrescentes
  - Mas há uma externalidade no nível agregado, que pode anular retornos marginais decrescentes

Dois insumos acumuláveis

- Por simplicidade não há crescimento populacional
  - População/força de trabalho normalizada em 1
  - Variáveis per capita = variáveis agregadas
- **Função de produção**:
$$y_t = F(k_t, h_t)$$
  - k_t: capital físico; h_t: capital físico
- F satisfaz:
  - Retornos constantes de escala
  - Condições de Inada
- Em particular, há retornos marginais decrescentes em relação a cada insumo

Família representativa

- Renda em t = renda do capital físico $(r_t k_t)$ + renda do capital humano $(w_t h_t)$
- Pode ser usada para consumo, investimento em capital físico e investimento em capital humano
- Restrição Orçamentária em t:

$$\dot{k}_t = r_t k_t + w_t h_t - c_t - i_{h,t} - \delta_k k_t \tag{6}$$

em que:

  - w_t: salário por unidade de capital humano
  - $i_{h,t}$: investimento em capital humano
  - δ_k: taxa de depreciação do capital físico

- Lei de movimento do capital humano

$$\dot{h}_t = i_{h,t} - \delta_h h_t \tag{7}$$

em que δ_h é a taxa de depreciação do capital humano

Problema do família representativa

- Utilidade instantânea do indivíduo é dada por:

$$u(c_t) = \frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

- Consumidor resolve:

$$\max_{\{c_t\}_{t\in[0,\infty)},\{k_t,h_t\}_{t\in(0,\infty)}} \int_0^\infty e^{-\rho t} u(c_t)dt$$

$$\text{s.a:} \begin{cases} \dot{k}_t = r_t k_t + w_t h_t - c_t - i_{h,t} - \delta_k k_t \\ \dot{h}_t = i_{ht} - \delta_h h_t \end{cases}$$

- Hamiltoniano:

$$\mathscr{H} = e^{-\rho t} u(c_t) + \lambda_t [k_t(r_t - \delta_k) + w_t h_t - c_t - i_{ht}] + \mu_t [i_{ht} - \delta_h h_t]$$

  - Controles: c_t e i_{ht}
  - Estados: k_t e h_t

Problema do Consumidor

$$\mathscr{H}_c = 0 \Rightarrow e^{-\rho t} c_t^{-\gamma} = \lambda_t \Rightarrow \boxed{\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} = -\rho - \gamma \frac{\dot{c}_t}{c_t}}$$

$$\mathscr{H}_{i_h} = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_t = \mu_t}$$

$$\mathscr{H}_k = -\dot{\lambda}_t \Rightarrow \boxed{-\dot{\lambda}_t = \lambda_t (r_t - \delta_k)}$$

$$\mathscr{H}_h = -\dot{\mu}_t \Rightarrow \boxed{\lambda_t w_t - \mu_t \delta_h = -\dot{\mu}_t}$$

- Temos então:

$$\dot{\lambda}_t = \dot{\mu}_t \Rightarrow w_t - \delta_h = r_t - \delta_k$$

$$-\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} = \rho + \gamma \frac{\dot{c}_t}{c_t} = r_t - \delta_k \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{r_t - \delta_k - \rho}{\gamma}}$$

Problema da Firma

- Problema da firma é dado por:

$$\max_{k_t, h_t} F(k_t, h_t) - w_t h_t - r_t k_t$$

- CPO's:

$$r_t = \frac{\partial F(k_t, h_t)}{\partial k_t}$$
$$w_t = \frac{\partial F(k_t, h_t)}{\partial h_t}$$

- Definindo $\tilde{k}_t := \dfrac{k_t}{h_t}$: razão capital físico - capital humano.
- F satisfaz retornos constantes de escala, logo:

$$y = F(k, h) \Leftrightarrow$$
$$\frac{y}{h} = F\left(\frac{k}{h}, 1\right) \Leftrightarrow$$
$$\tilde{y} = f(\tilde{k})$$

Problema da Firma

- Reescrevendo as CPO's:

$$r_t = \underbrace{f'(\tilde{k}_t)}_{\text{PMgk}}$$

$$w_t = \underbrace{f(\tilde{k}_t) - \tilde{k}_t f'(\tilde{k}_t)}_{\text{PMgh}}$$

- Note que: r é decrescente em $\tilde{k}$ e w é crescente em $\tilde{k}$
- Dado que $w_t - \delta_h = r_t - \delta_k$, temos:

$$\underbrace{f(\tilde{k}_t) - \tilde{k}_t f'(\tilde{k}_t) - \delta_h}_{\text{crescente em } \tilde{k}} = \underbrace{f'(\tilde{k}_t) - \delta_k}_{\text{decrescente em } \tilde{k}}$$

- Logo, $\tilde{k}_t = \tilde{k}^*$ constante no tempo, dado implicitamente por:

$$\boxed{f(\tilde{k}^*) - \tilde{k}^* f'(\tilde{k}^*) - \delta_h = f'(\tilde{k}^*) - \delta_k}$$

Taxa de crescimento

- Logo, a taxa de crescimento do consumo é constante e dada por:

$$g = \frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{f'(\tilde{k}^*) - \delta_k - \rho}{\gamma}$$

- Similarmente ao modelo AK simples

$$\frac{\dot{h}_t}{h_t} = \frac{\dot{k}_t}{k_t} = \frac{\dot{y}_t}{y_t} = \frac{\dot{c}_t}{c_t} = g$$

- Se $f'(\tilde{k}^*) > \delta_k + \rho$ taxa de crescimento é positiva.
- De maneira similar ao modelo AK básico, é preciso impor restrições sobre parâmetros de modo que:

$$-\rho + g(1-\gamma) < 0$$

Taxa de crescimento

- Caso particular com solução fechada
- Função de produção Cobb-Douglas: $Y = Ak^{\alpha}h^{1-\alpha}$
  - $f'(\widetilde{k}) = A\alpha\tilde{k}^{\alpha-1}$
  - $f(\widetilde{k}) - \widetilde{k}f'(\widetilde{k}) = A(1-\alpha)\tilde{k}^{\alpha}$
- Suponha mesma taxa de depreciação para os dois insumos: $\delta_k = \delta_k = \delta$
- Portanto:

$$
\begin{aligned}
A(1-\alpha)\tilde{k}^{*\alpha} - \delta &= A\alpha\tilde{k}^{*\alpha-1} - \delta \\
\widetilde{k} &= \frac{\alpha}{1-\alpha} \\
f'(\widetilde{k}) &= A\alpha\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{\alpha-1} = A\alpha^{\alpha}(1-\alpha)^{1-\alpha}
\end{aligned}
$$

- Taxa de crescimento

$$
g = \frac{A\alpha^{\alpha}(1-\alpha)^{1-\alpha} - \delta - \rho}{\gamma}
$$

Learning by doing

- Romer (1986)
- Crescimento com Externalidades
  - Capital apresenta retornos marginais decrescentes no nível individual
  - Externalidade no nível agregado pode anular os retornos marginais decrescentes
- Há um conjunto de firmas idênticas, distribuídas uniformemente no intervalo $[0, 1]$
- Usam capital e trabalho para produzir
  - Capital agregado afeta produtividade agregada (externalidade)
- Concorrência perfeita
  - Inovação não intencional

Firmas

- Produto da firma i:

$$Y_t(i) = F(K_t(i), A_t L_t(i))$$

- A_t: Produtividade (cada firma toma A_t como dado)
- $F(\cdot)$ satisfaz:
  - Retornos constantes de escala
  - Condições de Inada
- Há, portanto, retornos marginais decrescentes no nível da firma.
- Concorrência perfeita:

$$w_t = \frac{\partial F(K_t(i), A_t L_t(i))}{\partial L_t}$$
$$r_t = \frac{\partial F(K_t(i), A_t L_t(i))}{\partial K_t}$$

Firmas

- Como todas as firmas são idênticas:

$$K_t(i) = K_t$$
$$L_t(i) = L_t$$

- Definindo $\hat{y} := \dfrac{Y}{K}$

$$\hat{y}_t = F\left(1, \frac{A_t L_t}{K_t}\right) = \hat{f}\left(\frac{A_t L_t}{K_t}\right) \Rightarrow$$
$$Y_t = K_t \hat{y}_t = K_t \hat{f}\left(\frac{A_t L_t}{K_t}\right)$$

Firmas

- Portanto:

$$r_t = \frac{\partial F(K_t, A_t L_t)}{\partial K_t} = \frac{\partial}{\partial K_t}\left\{K_t \hat{f}\left(\frac{A_t L_t}{K_t}\right)\right\}$$
$$= \hat{f}\left(\frac{A_t L_t}{K_t}\right) - \frac{A_t L_t}{K_t}\hat{f}'\left(\frac{A_t L_t}{K_t}\right)$$

$$w_t = \frac{\partial F(K_t, A_t L_t)}{\partial L_t} = \frac{\partial}{\partial L_t}\left\{K_t \hat{f}\left(\frac{A_t L}{K_t}\right)\right\} = A_t \hat{f}'\left(\frac{A_t L_t}{K_t}\right)$$

- Suponha número de trabalhadores constante e igual a L:

$$r_t = \hat{f}\left(\frac{A_t L}{K_t}\right) - \frac{A_t L}{K_t}\hat{f}'\left(\frac{A_t L}{K_t}\right)$$
$$w_t = A_t \hat{f}'\left(\frac{A_t L}{K_t}\right)$$

Learning by doing

- Produtividade agregada depende do estoque de capital agregado: $A_t = BK_t,\ B > 0$
  - Learning by doing
  - Externalidade de uma firma sobre as demais

$$A_t = BK_t \Rightarrow$$
$$\frac{A_t}{K_t} = B \Rightarrow$$
$$r_t = \hat{f}\left(BL\right) - BL\hat{f}'\left(BL\right)$$

- r_t é constante no tempo
- Capital tem retornos marginais decrescentes no nível individual
- Porém, tem retornos marginais constantes no agregado por conta da externalidade

Taxa de crescimento

- Analogamente aos problemas anteriores:

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{r_t - \delta - \rho}{\gamma}$$

- Logo, a taxa de crescimento é dada por:

$$\boxed{g = \frac{\hat{f}\left(BL\right) - BL\hat{f}'\left(BL\right) - \delta - \rho}{\gamma}}$$

- Se $\hat{f}\left(BL\right) - BL\hat{f}'\left(BL\right) > \delta + \rho$, então $g > 0$.

Taxa de crescimento

- Condição para que utilidade seja limitada: $-\rho + g(1-\gamma) < 0$

$$\rho > (1-\gamma)(\hat{f}(BL) - BL\hat{f}'(BL) - \delta)$$

- Efeito escala:

$$\frac{\partial g}{\partial (BL)} = \frac{1}{\gamma}[\hat{f}'(BL) - \hat{f}'(BL) - BL\hat{f}''(BL)] = \frac{-BL\hat{f}''(BL)}{\gamma}$$

- Dado que $\hat{f}''(BL) < 0$ (**Checar!**) $\Rightarrow \dfrac{\partial g}{\partial (BL)} > 0$

Eficiência

- Problema do Planejador Central. Dado $K_0 > 0$:

$$\max_{\{c_t\}_{t\in[0,\infty)}} \mathbb{U}_0 = \int_0^\infty e^{-\rho t} u(c_t) dt$$

$$\text{s.a: } \begin{cases} \dot{K}_t = F(K_t, A_t L) - C_t - \delta K_t \\ A_t = B K_t \end{cases}$$

- Reescrevendo a restrição de recursos:

$$\begin{aligned} \dot{K}_t &= F(K_t, A_t L) - C_t - \delta K_t \\ &= K_t \hat{f}\left(\frac{A_t L}{K_t}\right) - C_t - \delta K_t \end{aligned}$$

- Dividindo por L

$$\frac{\dot{K}_t}{L} = \frac{K_t}{L} \hat{f}\left(\frac{A_t L}{K_t}\right) - \frac{C_t}{L} - \delta \frac{K_t}{L} \Rightarrow$$

$$\boxed{\dot{k}_t = k_t \hat{f}(BL) - c_t - \delta k_t}$$

Eficiência

- Hamiltoniano:

$$\mathscr{H} = e^{-\rho t} u(c_t) + \lambda_t [k_t \underbrace{\hat{f}(BL)}_{\text{Não há retornos marginais decrescentes no agregado!}} - c_t - \delta k_t]$$

- Condições de ótimo:

$$\mathscr{H}_c = e^{-\rho t} \overbrace{u'(c_t)}^{c_t^{-\gamma}} - \lambda_t = 0 \Rightarrow \frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} = -\rho - \gamma \frac{\dot{c}_t}{c_t}$$

$$\mathscr{H}_k = -\dot{\lambda}_t \Rightarrow -\dot{\lambda}_t = \lambda_t [\hat{f}(BL) - \delta]$$

- Temos então:

$$\rho + \gamma \frac{\dot{c}_t}{c_t} = \hat{f}(BL) - \delta \Rightarrow$$

$$g^* = \frac{\dot{c}_t}{c_t} = \boxed{\frac{\hat{f}(BL) - \delta - \rho}{\gamma}}$$

Eficiência

- Lembrando que, no equilíbrio competitivo:

$$g = \frac{\hat{f}(BL) - BL\hat{f}'(BL) - \delta - \rho}{\gamma}$$

- Solução eficiente:

$$g^* = \frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{\hat{f}(BL) - \delta - \rho}{\gamma}$$

- Portanto:

$$g^* > g$$

- Planejador central internaliza impacto da acumulação de capital sobre a produtividade agregada