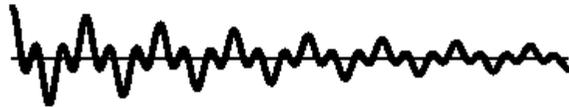


Transformada de Fourier 1D E Processamento do sinal

Por que transformada de Fourier é tão importante para RMN?

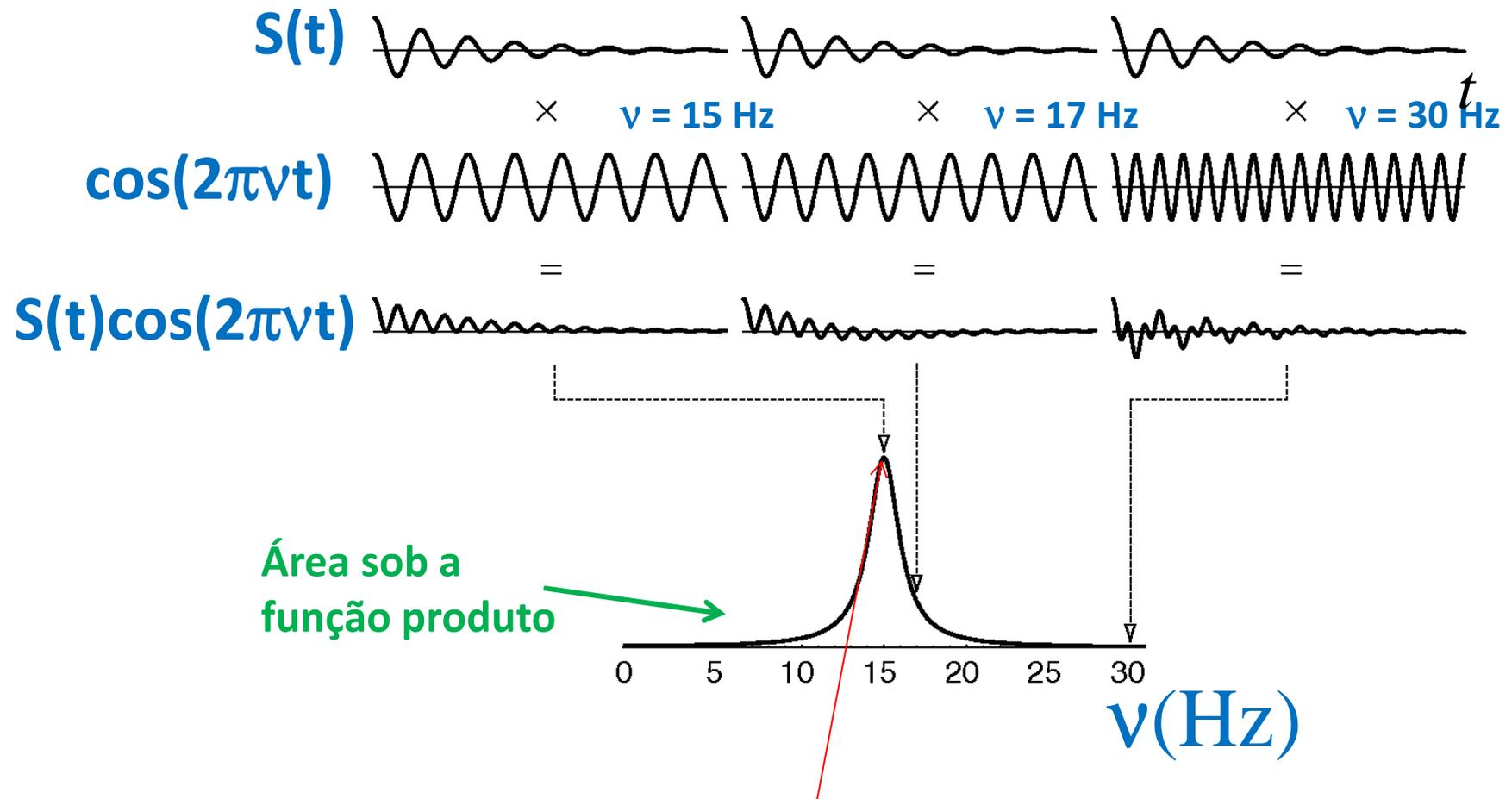
- O sinal detectado em espectroscopia de RMN está no domínio do tempo. Esta é uma diferença importante em relação a outros tipos de espectroscopias e é talvez umas das razões principais do poder da RMN.



- É praticamente impossível fazer a discriminação de “quantas” frequências estão em um sinal no domínio do tempo se mais de três frequências estão presentes .

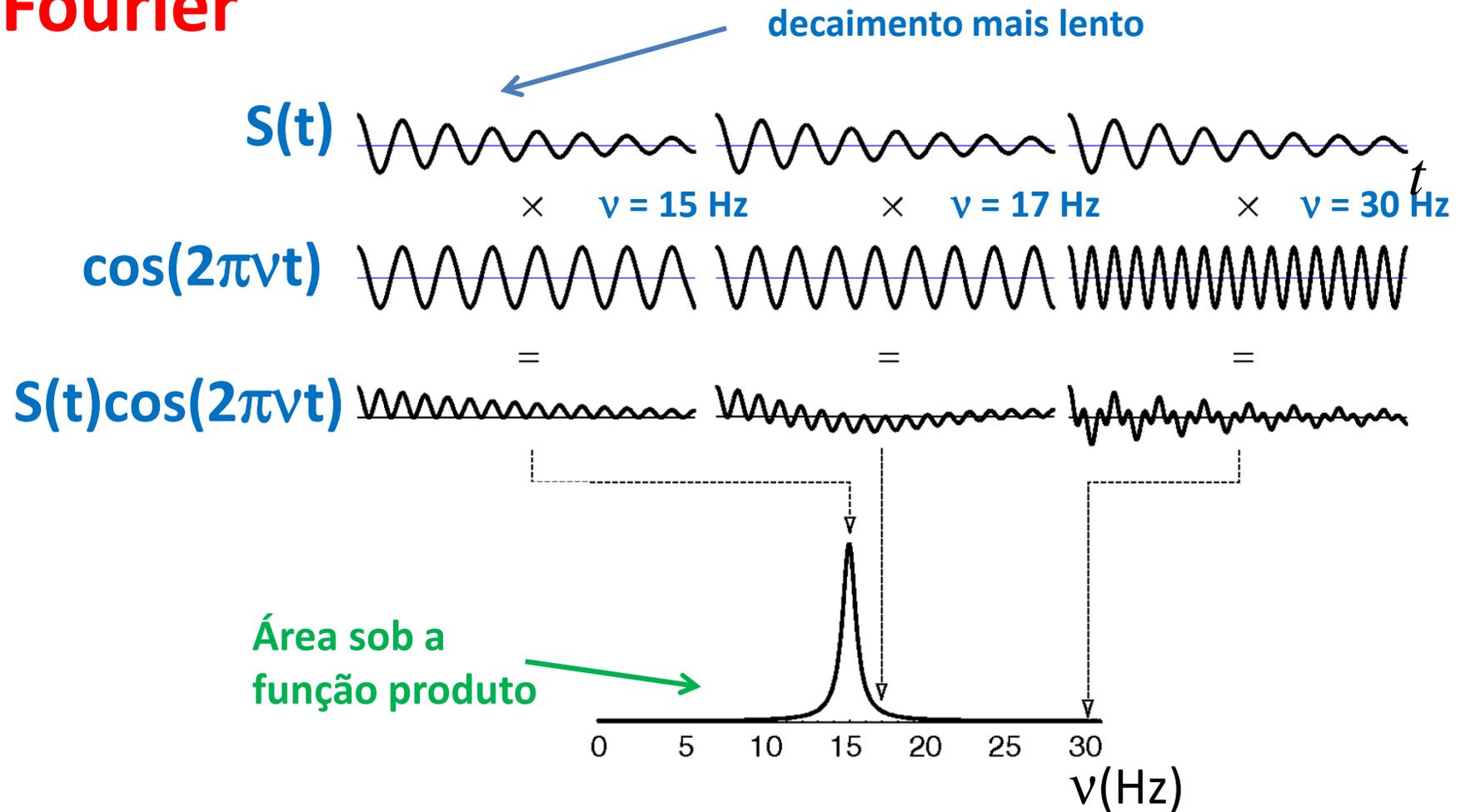
Em outras palavras. Sem a transformada de Fourier não existiria espectroscopia de RMN como conhecemos.

Sobre um significado transformada de Fourier

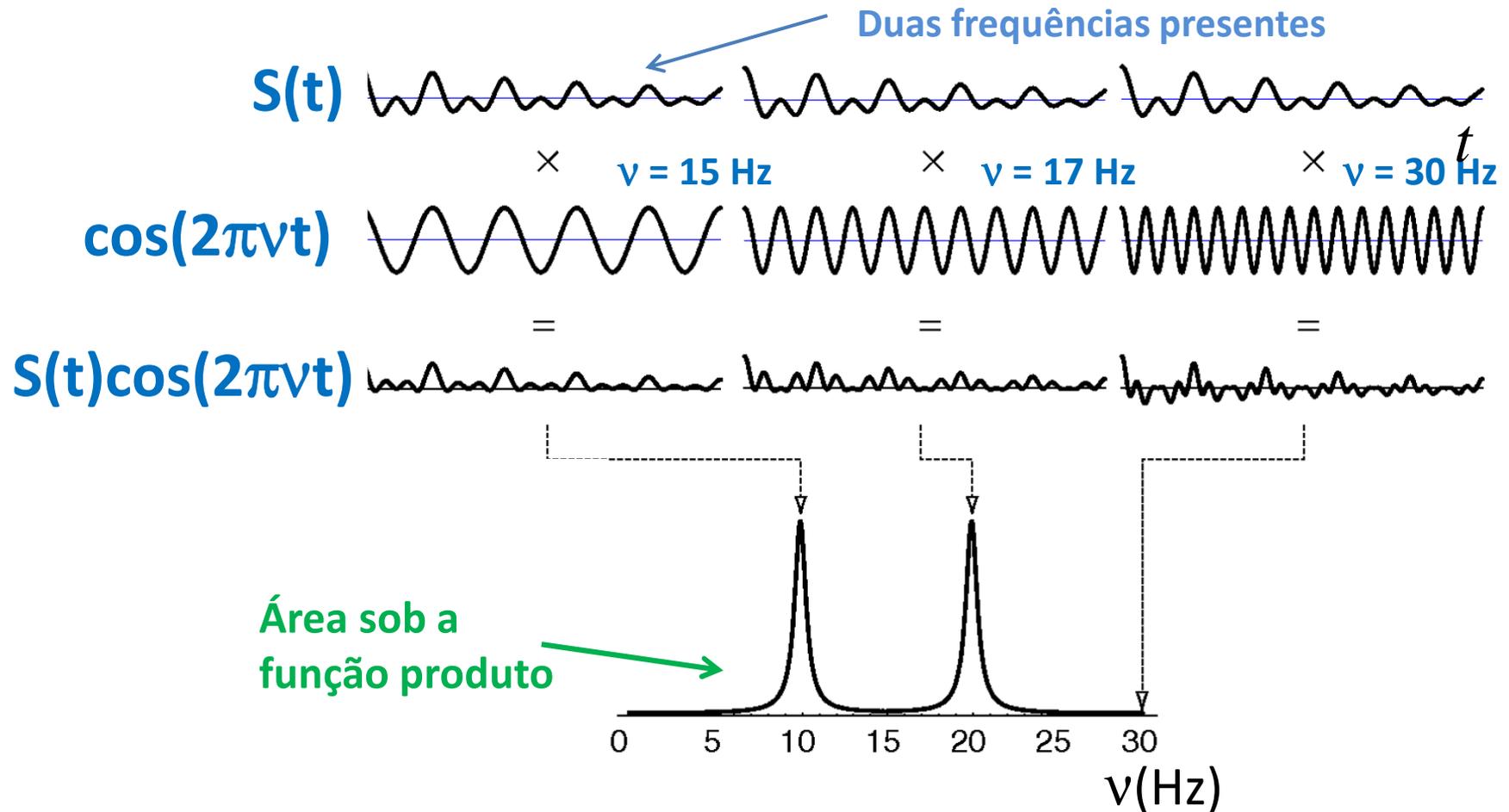


Máxima área quando as frequências de $S(t)$ e $\cos(2\pi\nu t)$ coincidem

Sobre um significado transformada de Fourier



Sobre um significado transformada de Fourier



Pergunta : Faria diferença se ao invés da função cosseno fizéssemos a análise com uma função seno?

Definição da transformada de Fourier

Como $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$, podemos então generalizar o procedimento para o plano complexo fazendo:

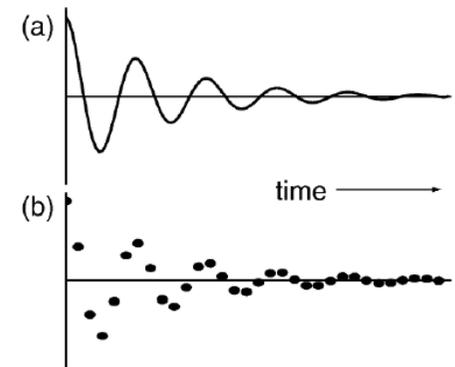
Área produto

$$S(\omega) = \int_0^{\infty} S(t) e^{-i\omega t} dt$$
$$S(\nu) = \int_0^{\infty} S(t) e^{-i2\pi\nu t} dt$$

Transformada de Fourier: Permite discriminar quais as componentes de frequência de $S(t)$.

Sinal de RMN é discretizado na aquisição, logo devemos usar a Transformada de Fourier discreta

$$S(\nu) = \sum_{i=1}^{i=N} S_{FID}(t) e^{-i2\pi\nu t_i}$$

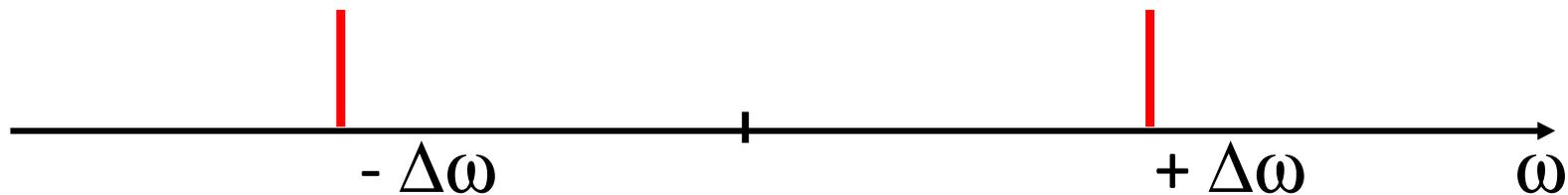


Como já discutido somente componente com um componente (cos) não é possível distinguir o sentido de rotação, ou seja, se a frequência é positiva ou negativa em relação a frequência de referência.



Com a aquisição somente da componente cosseno, todas as linhas apareceriam duplicadas (espelhadas em relação a frequência do transmissor)

Exemplo de Duplicação das linhas com a aquisição de uma componente do sinal

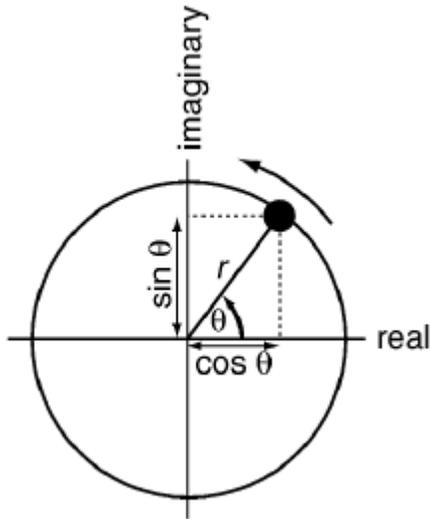


Mas como vimos o sinal adquirido é de fato:

$$S(t) = S_0 \cos[(\omega_0 - \omega_r)t] = S_0 \cos(\Delta\omega t)$$

Como resolver ???

Um parêntese: Representação Complexa



A relação entre o movimento circular e oscilações lineares é útil para entender números complexos. Se considerarmos o eixo x é a parte real e eixo-y como o imaginário

Movimento no sentido anti-horário:

$$\exp(i\theta) = \cos \theta + i \sin \theta$$

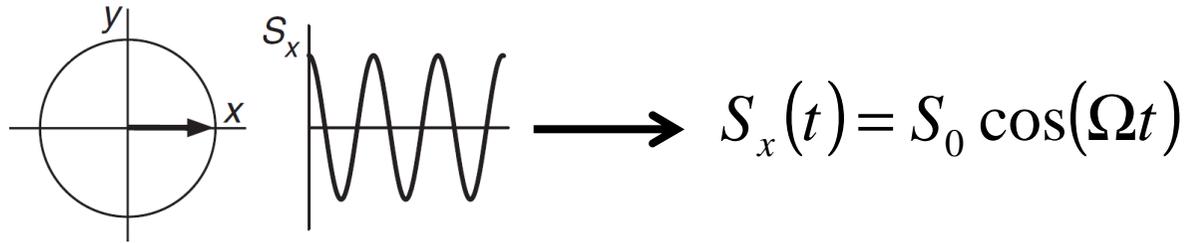
Movimento no sentido horário:

$$\exp(-i\theta) = \cos \theta - i \sin \theta$$



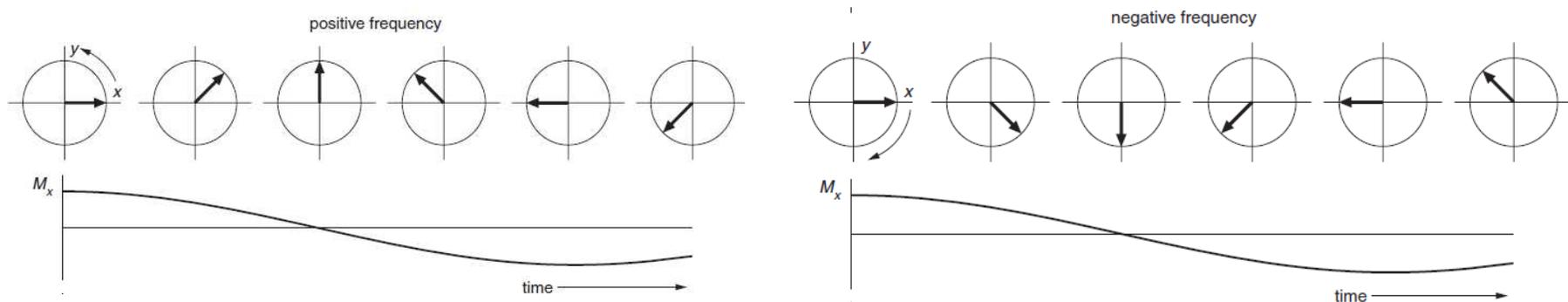
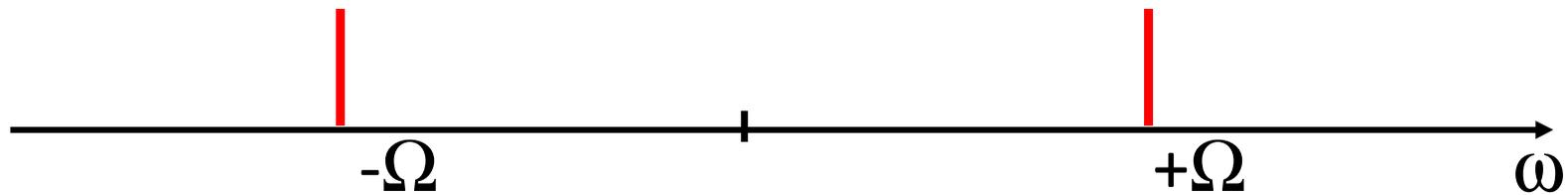
$$S(t) = S_0 [\cos(\Delta\omega t)\hat{x} + \sin(\Delta\omega t)\hat{y}] \equiv S(t) = S_0 [\cos(\Delta\omega t) + i \sin(\Delta\omega t)\hat{y}]$$

Quadratura:

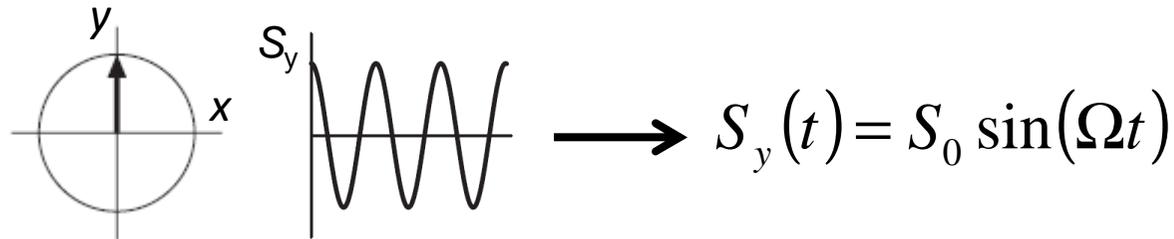


Dedução: transformada de Fourier do cosseno

$$\begin{aligned}
 S_x(\omega) &= \int_0^{\infty} S_x(t) e^{-i\omega t} dt = \int_0^{\infty} S_0 \cos(\Omega t) e^{-i\omega t} dt = S_0 \int_0^{\infty} \left[\frac{e^{+i\Omega t} + e^{-i\Omega t}}{2} \right] e^{-i\omega t} dt = \\
 &= \frac{S_0}{2} \int_0^{\infty} e^{-i(\omega+\Omega)t} dt + \frac{S_0}{2} \int_0^{\infty} e^{-i(\omega-\Omega)t} dt = \frac{S_0}{2} \delta(\omega+\Omega) + \frac{S_0}{2} \delta(\omega-\Omega)
 \end{aligned}$$

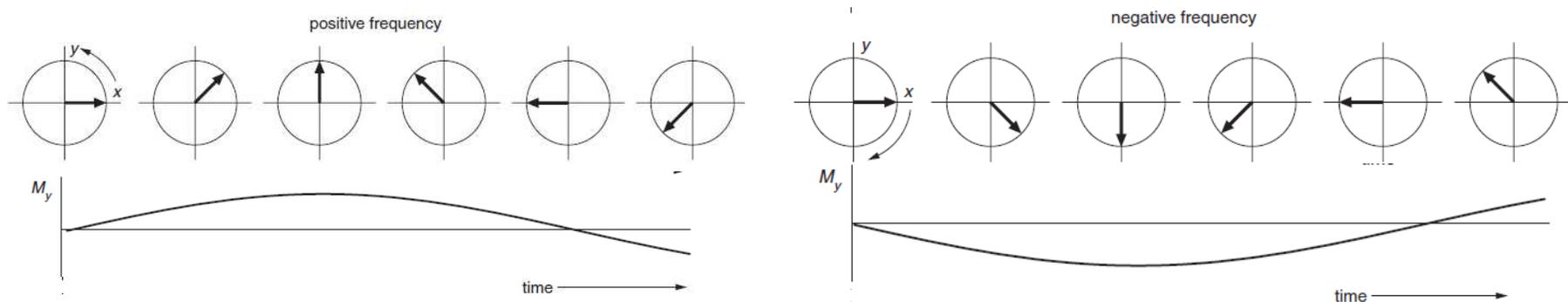
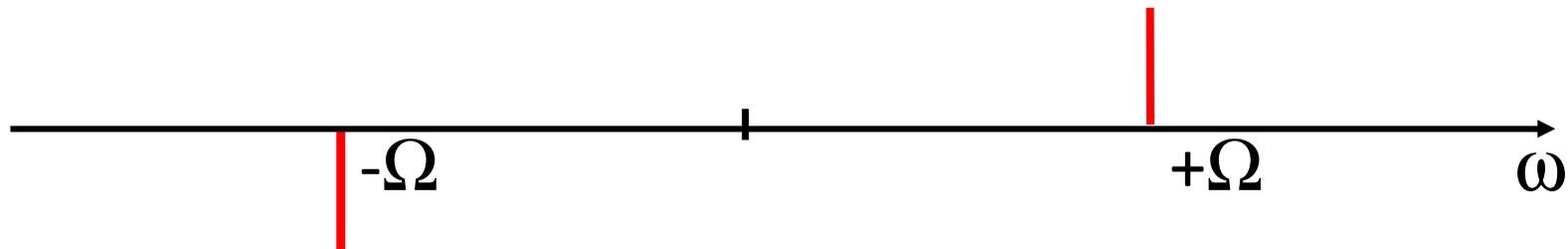


Quadratura:

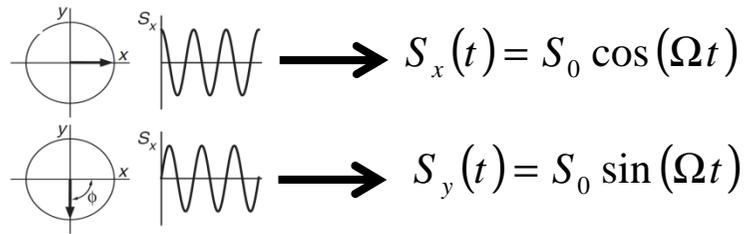


Dedução: transformada de Fourier do seno

$$\begin{aligned}
 S_y(\omega) &= \int_0^{\infty} S_y(t) e^{-i\omega t} dt = \int_0^{\infty} S_0 \sin(\Omega t) e^{-i\omega t} dt = S_0 \int_0^{\infty} \left[\frac{e^{i\Omega t} - e^{-i\Omega t}}{2i} \right] e^{-i\omega t} dt = \\
 &= -i \frac{S_0}{2} \int_0^{\infty} e^{-i(\omega - \Omega)t} dt + i \frac{S_0}{2} \int_0^{\infty} e^{-i(\omega + \Omega)t} dt = i \frac{S_0}{2} \delta(\omega + \Omega) - i \frac{S_0}{2} \delta(\omega - \Omega)
 \end{aligned}$$



Quadratura:

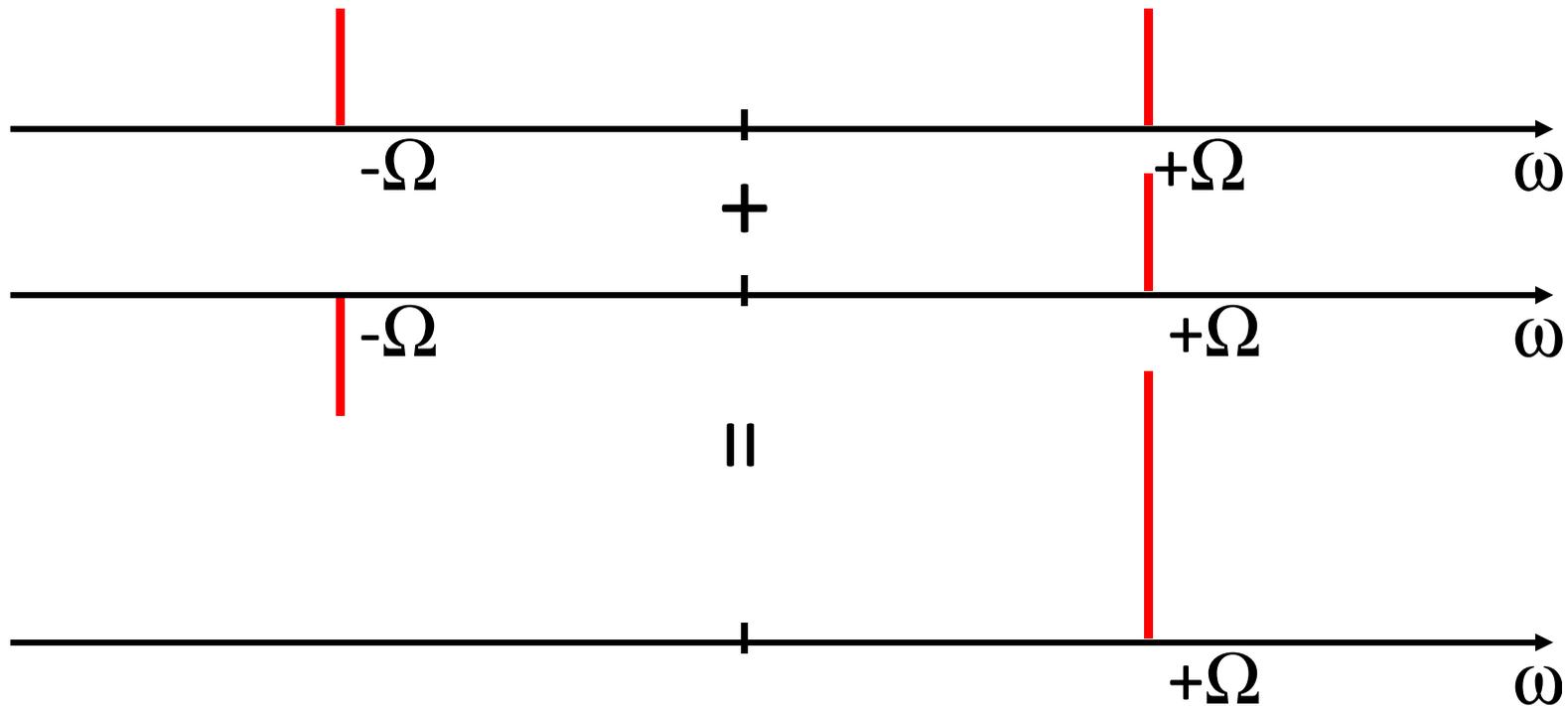


Dedução Quadratura:

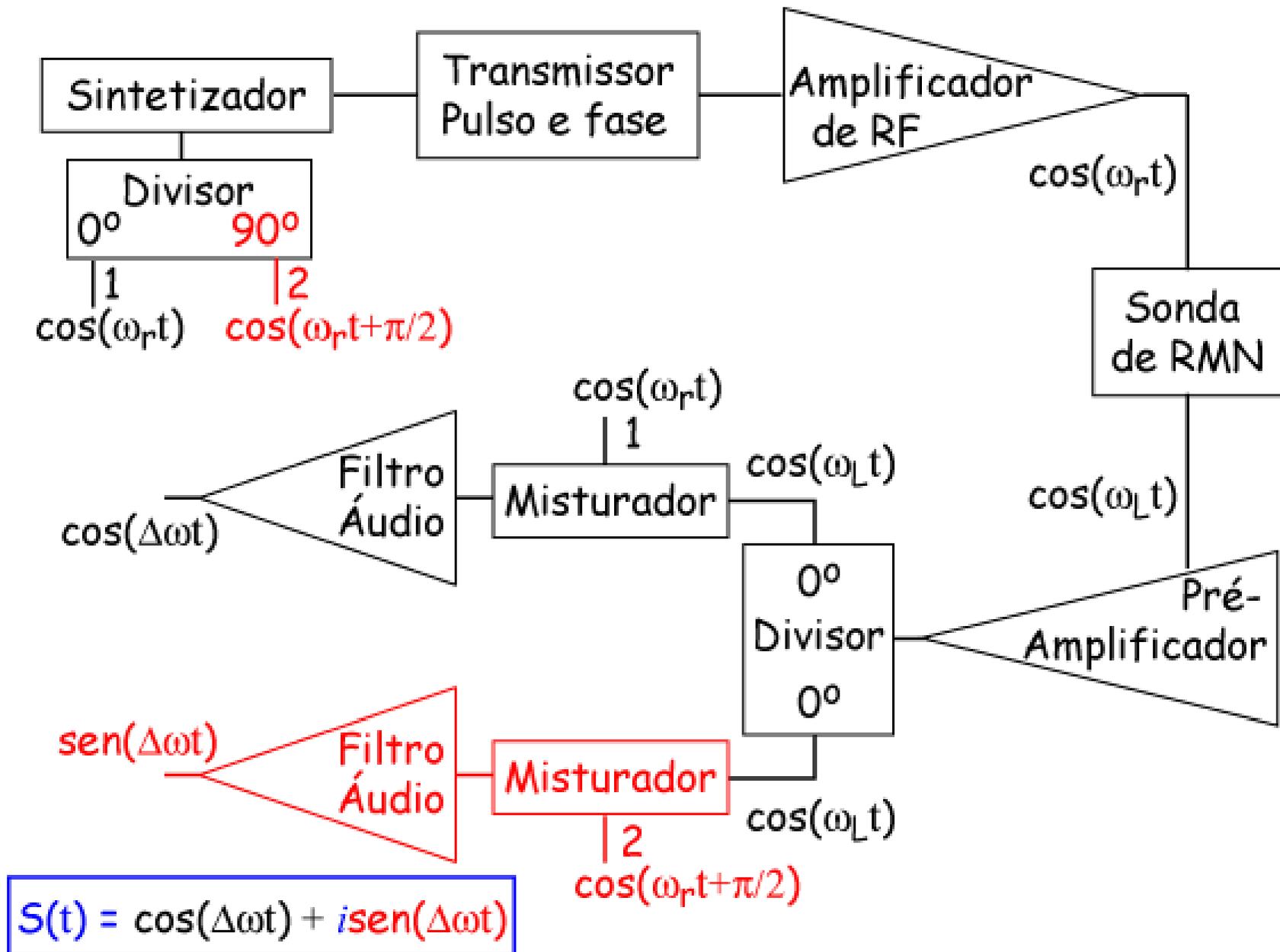
$$S_x(\omega) + iS_y(\omega) = \left[\frac{S_0}{2} \delta(\omega + \Omega) + \frac{S_0}{2} \delta(\omega - \Omega) \right] + i \left[i \frac{S_0}{2} \delta(\omega + \Omega) - i \frac{S_0}{2} \delta(\omega - \Omega) \right]$$

$$S_x(\omega) + iS_y(\omega) = \left[\frac{S_0}{2} \delta(\omega + \Omega) + \frac{S_0}{2} \delta(\omega - \Omega) \right] + \left[-\frac{S_0}{2} \delta(\omega + \Omega) + \frac{S_0}{2} \delta(\omega - \Omega) \right]$$

$$S_x(\omega) + iS_y(\omega) = S_0 \delta(\omega - \Omega)$$



Detecção em Fase e Quadratura



Transformada de Fourier de um FID

$$M_x(t) = M_0 \cos(\Omega t) e^{-\frac{t}{T_2}} \quad ; \quad M_y(t) = \sin(\Omega t) e^{-\frac{t}{T_2}}$$



$$S(t) = S_x + iS_y = S_0 (\cos \Omega t + i \sin \Omega t) \exp\left(-\frac{t}{T_2}\right)$$

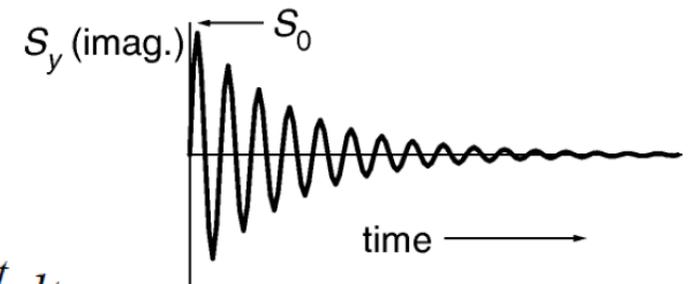
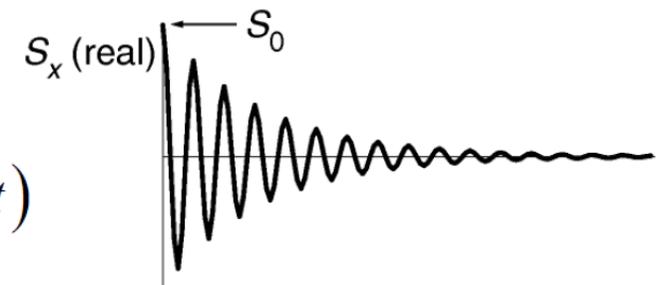
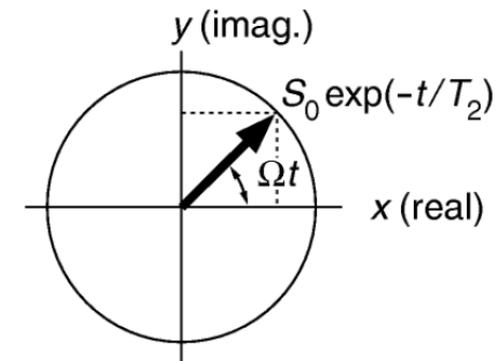


$$S(t) = S_0 \exp(i\Omega t) \exp\left(-\frac{t}{T_2}\right) = S_0 \exp(i\Omega t) \exp(-Rt)$$



FT ?

$$S(\omega) = \int_0^{\infty} S(t) e^{-i\omega t} dt = \int_0^{\infty} S_0 \exp(i\Omega t) \exp(-Rt) e^{-i\omega t} dt$$



Dedução da transformada de Fourier do FID

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \int_0^{\infty} S_0 e^{[-i(\omega-\Omega)-R]t} dt \\ &= S_0 \left. \frac{e^{[-i(\omega-\Omega)-R]t}}{[-i(\omega-\Omega)-R]} \right|_0^{\infty} \\ &= -\frac{S_0}{[-i(\omega-\Omega)-R]} = \frac{S_0}{[i(\omega-\Omega)+R]} \\ &= \frac{S_0}{[i(\omega-\Omega)+R]} \frac{[-i(\omega-\Omega)+R]}{[-i(\omega-\Omega)+R]} = \frac{S_0[-i(\omega-\Omega)+R]}{(\omega-\Omega)^2+R^2} \end{aligned}$$

$$S(\omega) = \underbrace{\frac{S_0 R}{(\omega-\Omega)^2+R^2}}_{\text{Real}} + i \underbrace{\frac{-S_0(\omega-\Omega)}{(\omega-\Omega)^2+R^2}}_{\text{Imaginário}}$$

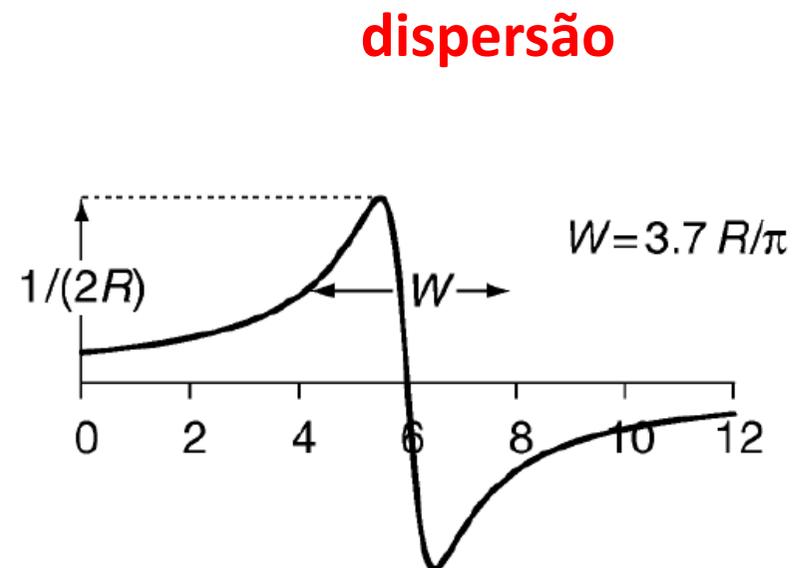
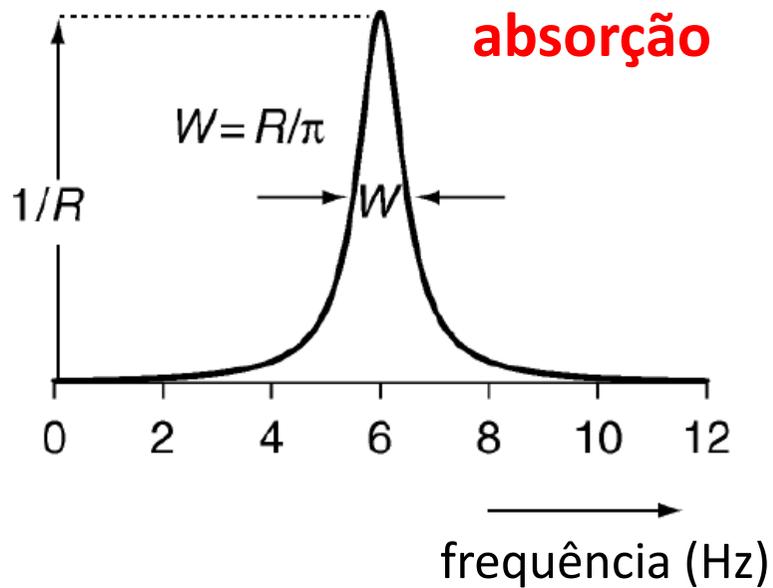
Real

Imaginário

$$S(\omega) = \frac{R}{\underbrace{(\omega - \Omega)^2 + R^2}} + i \frac{-\underbrace{(\omega - \Omega)}}{\underbrace{(\omega - \Omega)^2 + R^2}} = A(\omega) + iD(\omega)$$

Real

Imaginário



Relação entre largura de linha e T_2

$$A(\omega) = \frac{R}{(\omega - \Omega)^2 + R^2}$$



$$A(\omega = \Omega) = \frac{R}{(\omega - \Omega)^2 + R^2} = \frac{1}{R}$$

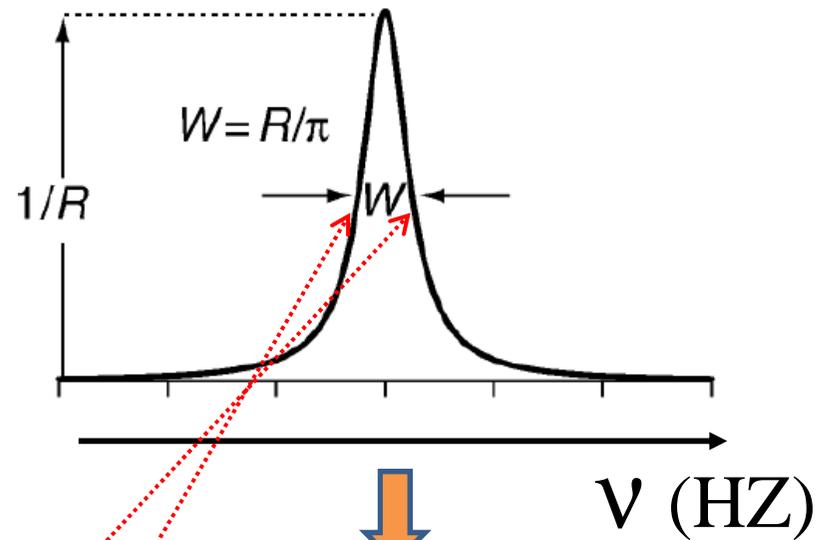


$$A\left(\omega_{1/2}\right) = \frac{R}{(\omega_{1/2} - \Omega)^2 + R^2} = \frac{1}{2R}$$

$$\left(\omega_{1/2} - \Omega\right)^2 = R^2$$

$$\left(\omega_{1/2} - \Omega\right) = \pm R$$

$$\omega_{1/2} \Rightarrow (\Omega + R) \text{ and } (\Omega - R)$$



$$2\pi W = (\Omega + R) - (\Omega - R) = 2R$$

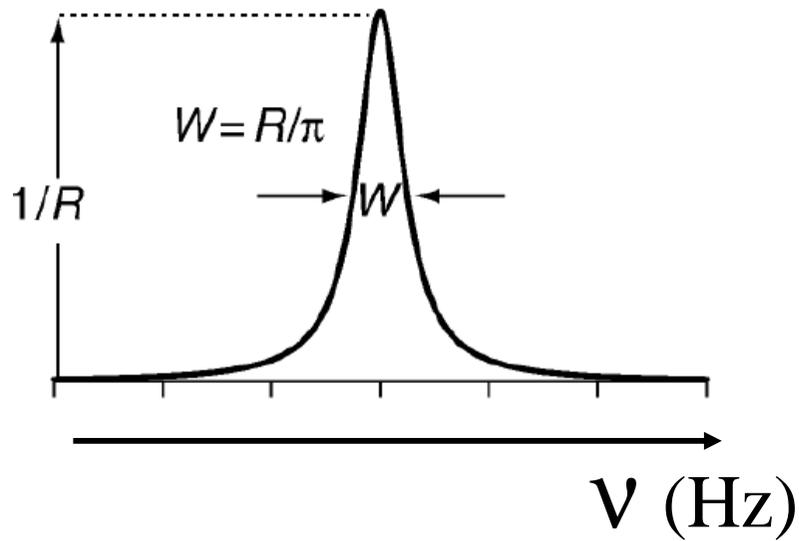


$$W = R/\pi$$

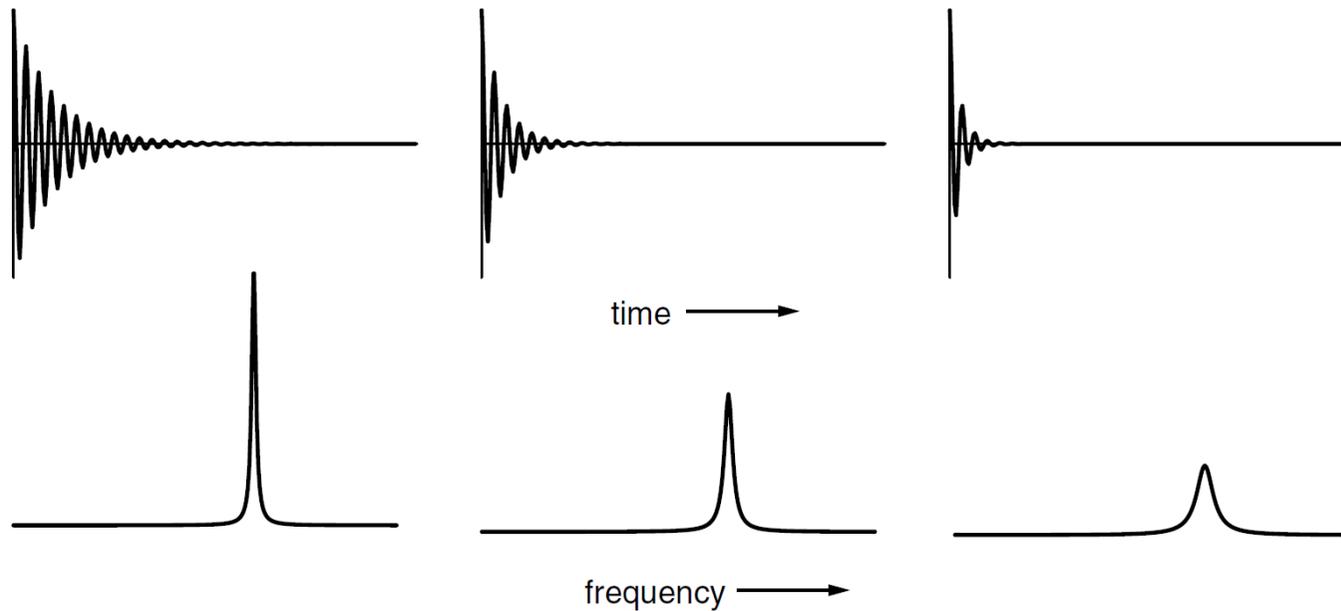


$$W = \frac{1}{\pi T_2}$$

Relação entre largura de linha e T_2

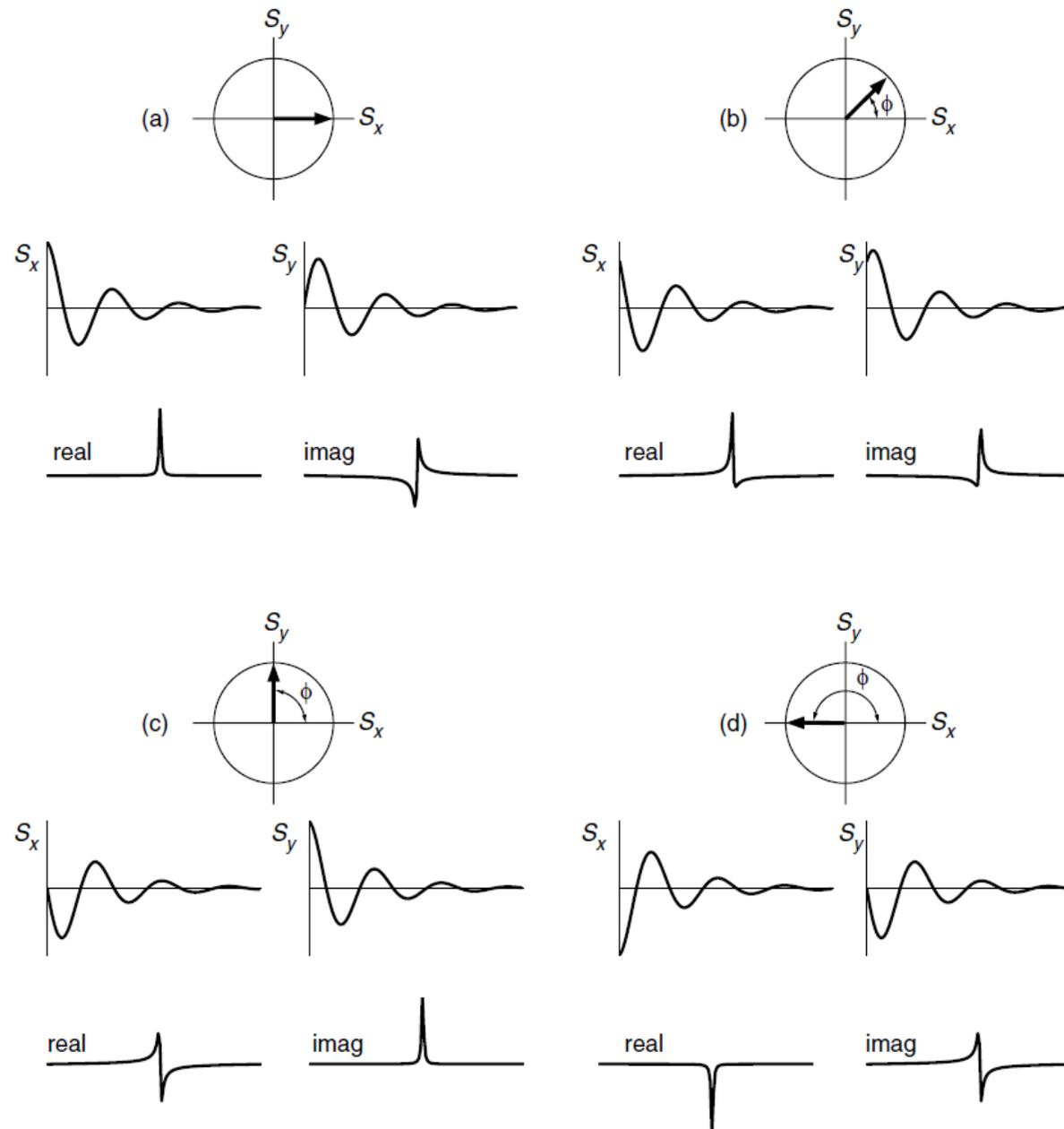


$$W = \frac{1}{\pi T_2}$$



Fase do Sinal

Efeito da fase no espectro



Fase do Sinal

Fase arbitrária na aquisição

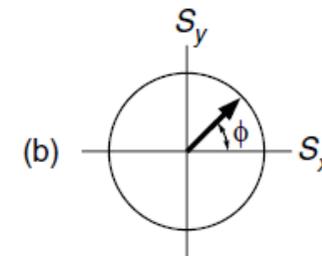
$$S(t) = S_0 \exp(i\Omega t) \exp(-Rt) \exp(i\phi)$$



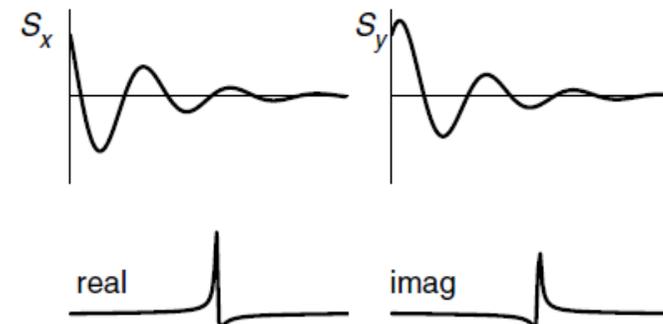
$$S(\omega) = S_0 [A(\omega) + iD(\omega)] \exp(i\phi)$$

$$S(\omega) = S_0 [A(\omega) + iD(\omega)] (\cos \phi + i \sin \phi)$$

$$S(\omega) = S_0 [\cos \phi A(\omega) - \sin \phi D(\omega)] + i S_0 [\cos \phi D(\omega) - \sin \phi A(\omega)]$$



Tanto a parte real quanto a imaginária tem formas de linha com contribuição dispersiva



Correção de Fase do Sinal

$$S(\omega) = \underbrace{S_0[A(\omega) + iD(\omega)] \exp(i\phi)}_{\text{Sinal que vem do espectrômetro}} \underbrace{\exp(i\phi_{corr})}_{\text{Adicionado no processamento}}$$
$$S(\omega) = S_0[A(\omega) + iD(\omega)] \exp(i\phi + \phi_{corr})$$

↓

$$\phi_{corr} = -\phi$$

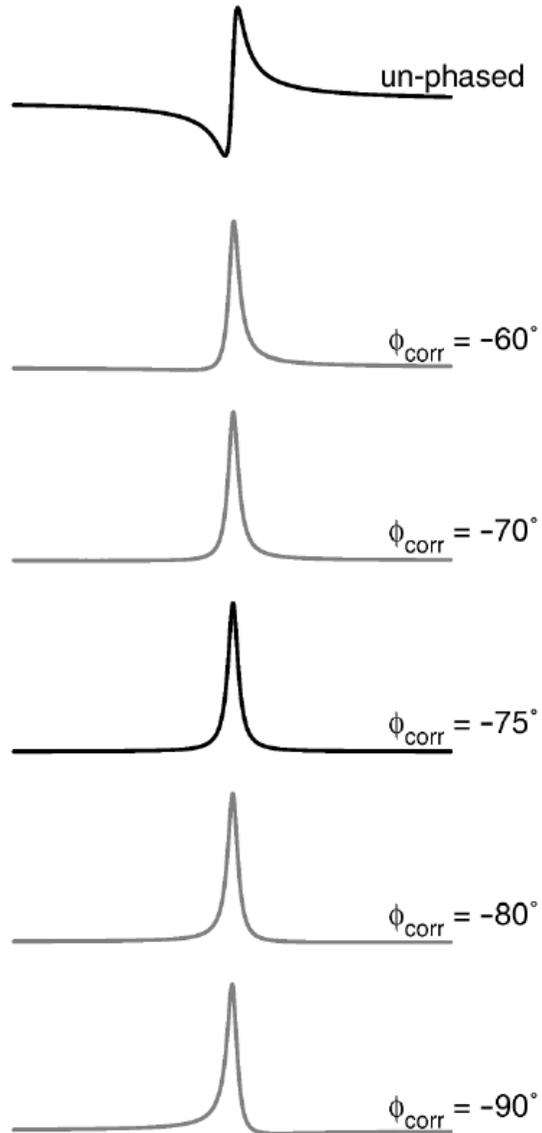
↓

$$S(\omega) = S_0[A(\omega) + iD(\omega)]$$

Correção de Fase do Sinal

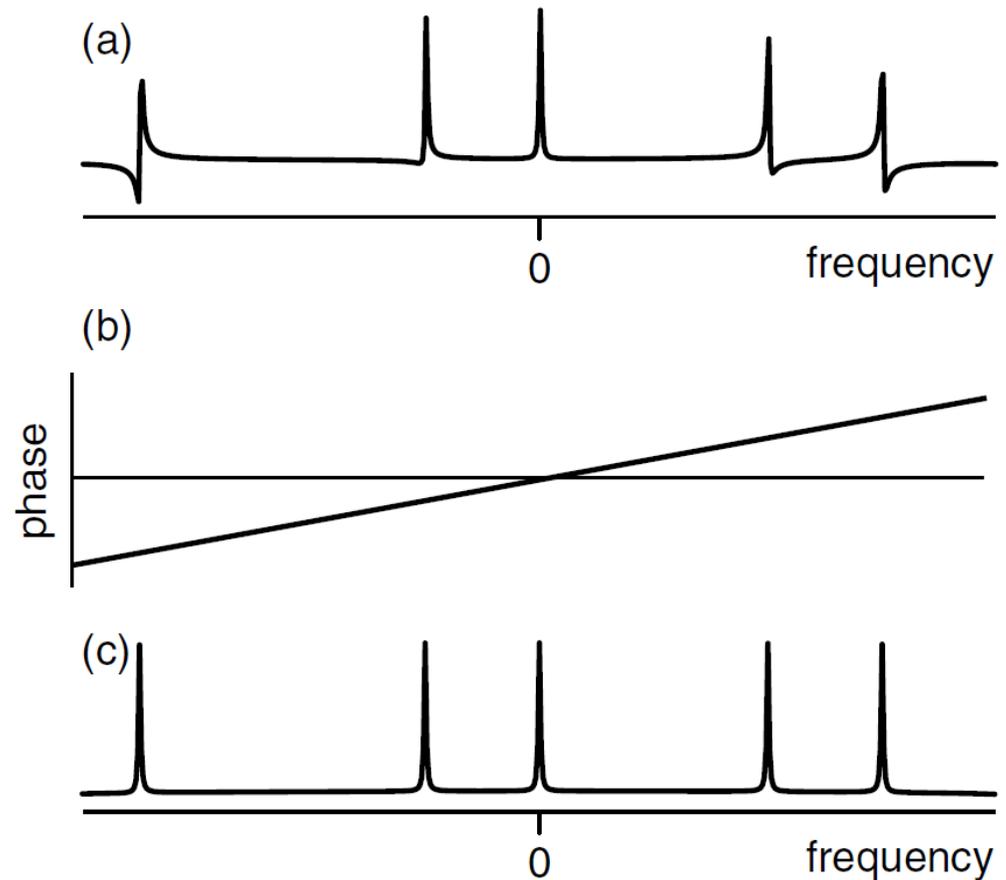
Ordem Zero

(correção independente da frequência)

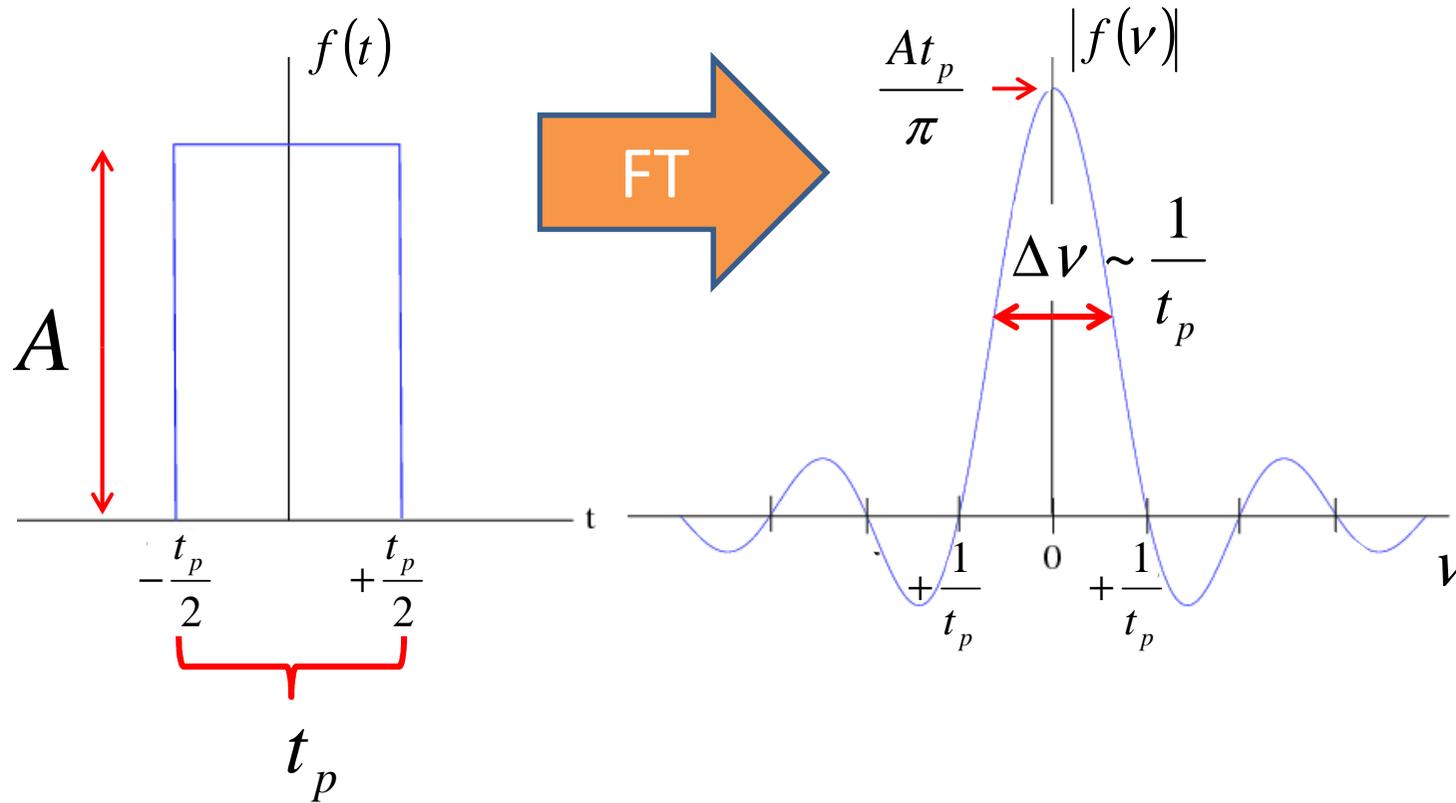


Fase Linear

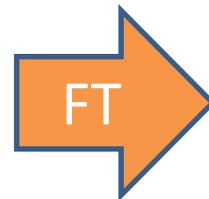
(correção dependente da frequência)



FT de um pulso quadrado



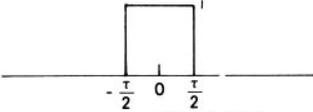
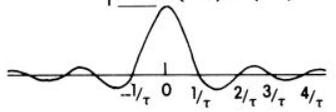
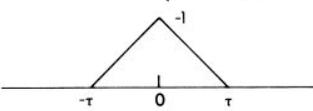
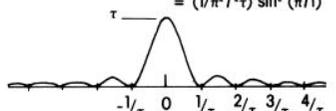
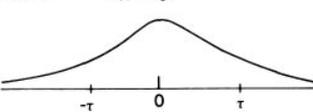
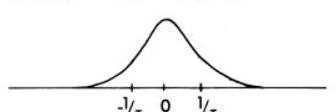
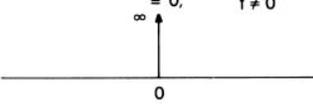
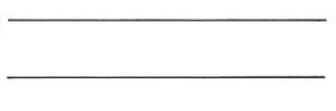
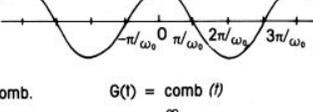
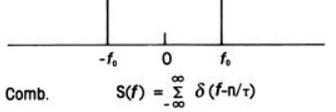
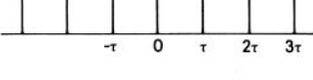
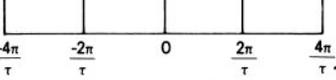
$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } -\frac{t_p}{2} < t < +\frac{t_p}{2} \\ 0 & \text{se } t < -\frac{t_p}{2} \text{ ou } t > +\frac{t_p}{2} \end{cases}$$



$$|f(v)| = \frac{At_p}{\pi} \left| \frac{\sin(vt_p)}{vt_p} \right|$$

Pares de Fourier

Há um conjunto de funções que são recorrentes em RMN e é útil saber como são as suas transformadas de Fourier para entender muitos dos processamentos de sinal que são usuais em RMN.

Time Function	Frequency Function
Boxcar $G(t) = \begin{cases} 1, & t < \tau/2 \\ 0, & t > \tau/2 \end{cases}$ 	Sinc $S(f) = \tau \operatorname{sinc}(f\tau)$ $= (1/\pi f) \sin(\pi f t)$ 
Triangle $G(t) = \begin{cases} 1- t /\tau, & t < \tau \\ 0, & t > \tau \end{cases}$ 	Sinc² $S(f) = \tau \operatorname{sinc}^2(f\tau)$ $= (1/\pi^2 f^2 \tau) \sin^2(\pi f t)$ 
Gaussian $G(t) = e^{-1/2 t^2}$ 	Gaussian $S(f) = \tau(2\pi)^{1/2} e^{-(\pi f \tau)^2}$ 
Impulse $G(t) = \delta(t)$ $= 0, \quad t \neq 0$ $\infty, \quad t = 0$ 	DC Shift $S(f) = 1$ 
Sinusoid $G(t) = \cos \omega_0 t$ 	Single Freq. $S(f) = 1/2(\delta(f+f_0) + \delta(f-f_0))$ 
Comb. $G(t) = \operatorname{comb}(t)$ $= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n\tau)$ 	Comb. $S(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f-n/\tau)$ 

Largura da banda de frequências Em todos eles temos:

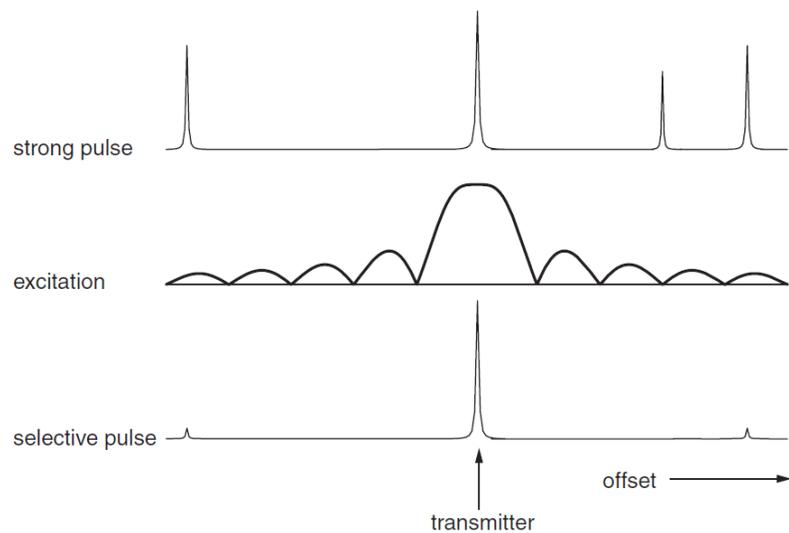
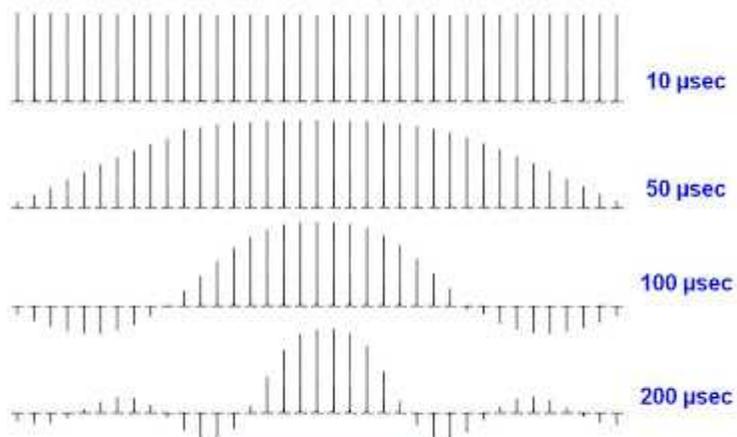
$$\Delta \nu = \frac{1}{\Delta \tau} \rightarrow \Delta \nu \cdot \Delta \tau = 1$$

Princípio de Incerteza Propriedade da TF

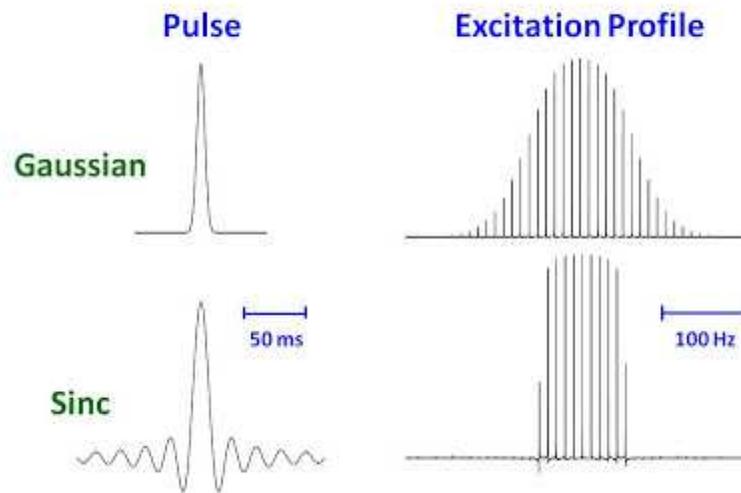
Largura da banda temporal

Pulsos "duros" (hard pulses) vs. pulsos "suaves" (soft pulses)

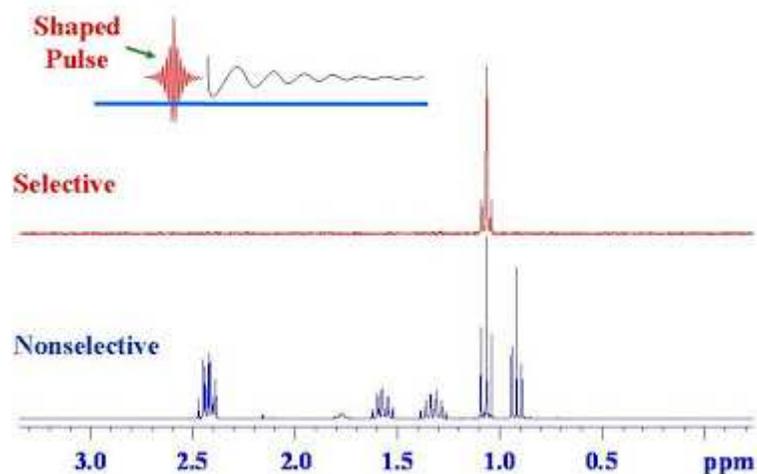
Pulse Widths and Excitation Profiles



Excitation Profiles for Shaped Pulses



Shaped Pulses for Selective Irradiation



O Teorema da Convolução:

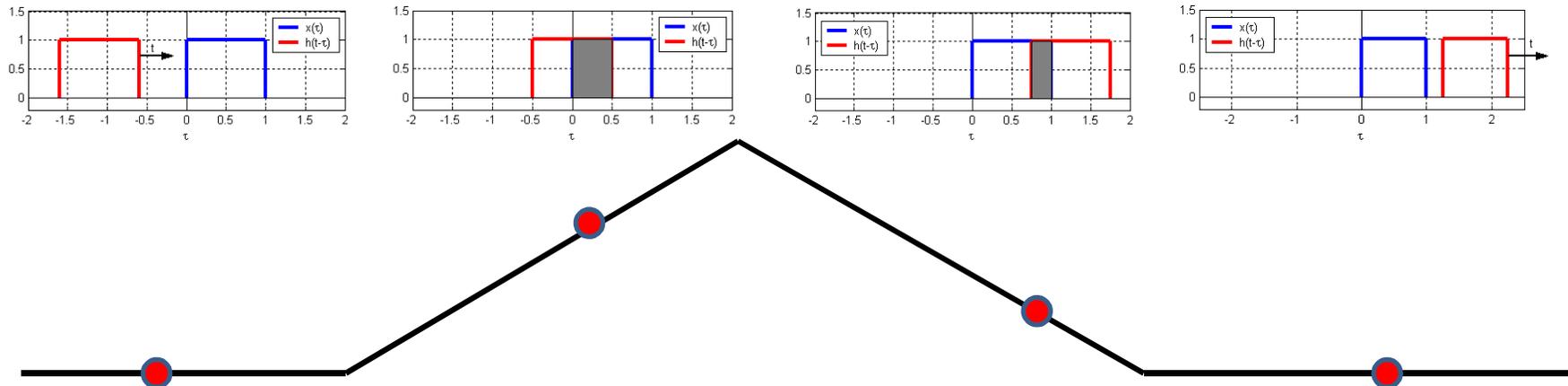
Definição matemática da convolução entre duas funções:

$$y(x) * h(x) = \int y(\xi)h(x - \xi)d\xi \quad \longrightarrow \text{espaço}$$

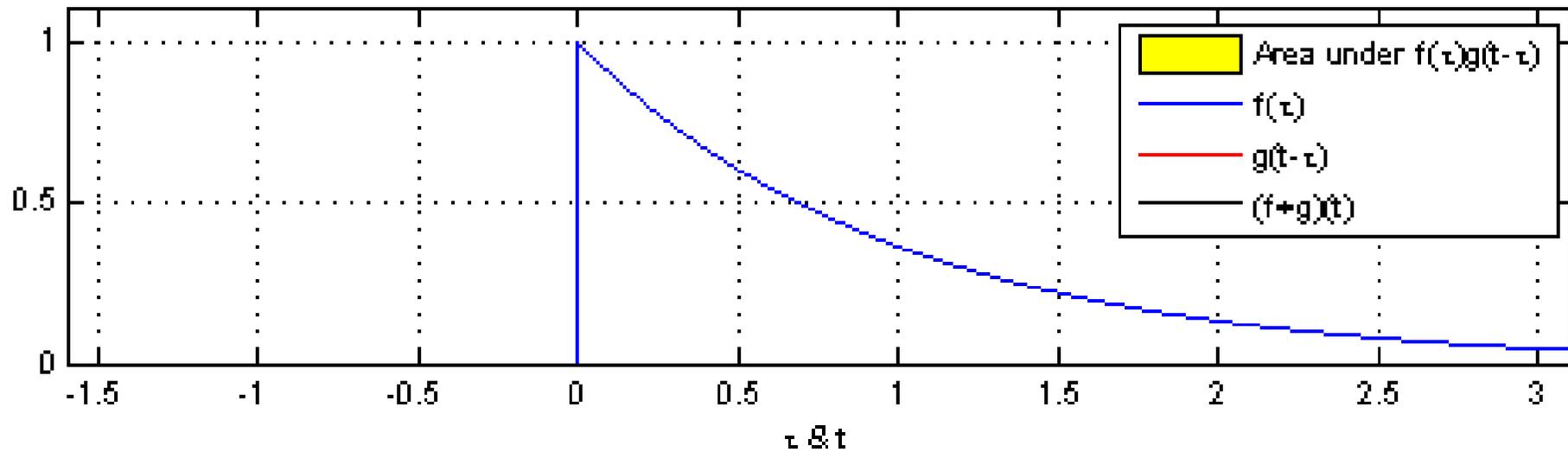
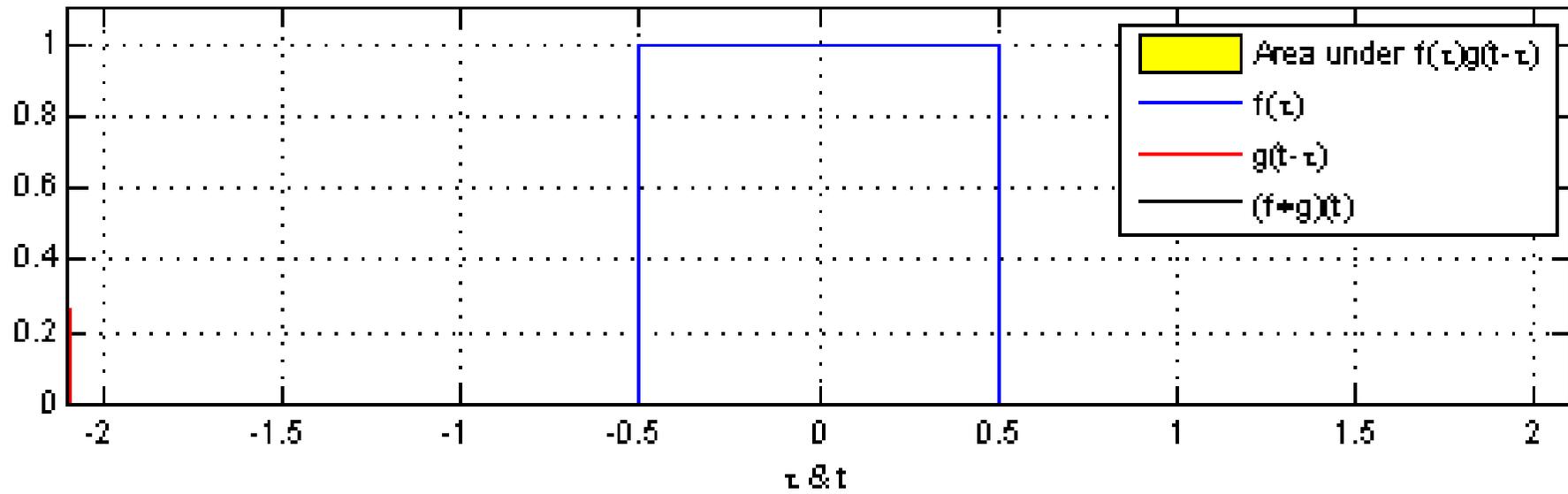
$$f(t) * g(t) = \int f(\tau)g(t - \tau)d\tau \quad \longrightarrow \text{tempo}$$

$$F(\omega) * G(\omega) = \int f(\omega)G(\omega - \Omega)d\Omega \quad \longrightarrow \text{frequência}$$

Interpretação Geométrica da convolução entre duas funções:



Interpretação Geométrica da convolução entre duas funções:

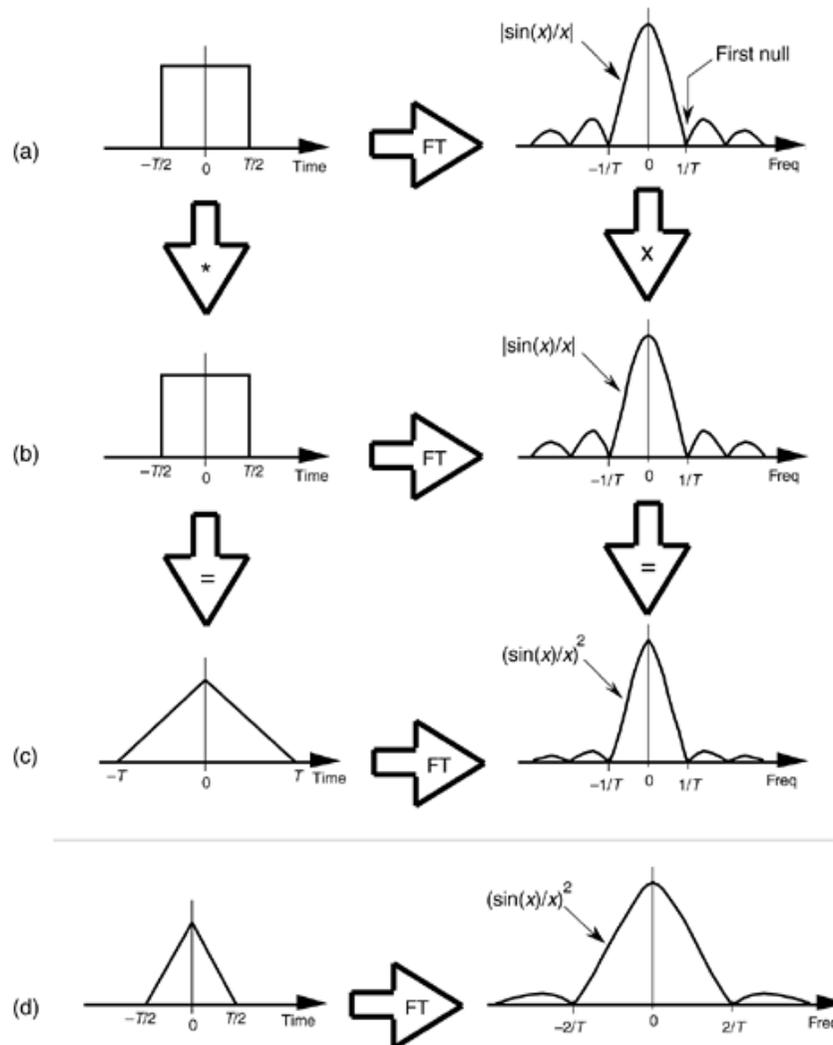


O Teorema da Convolução:

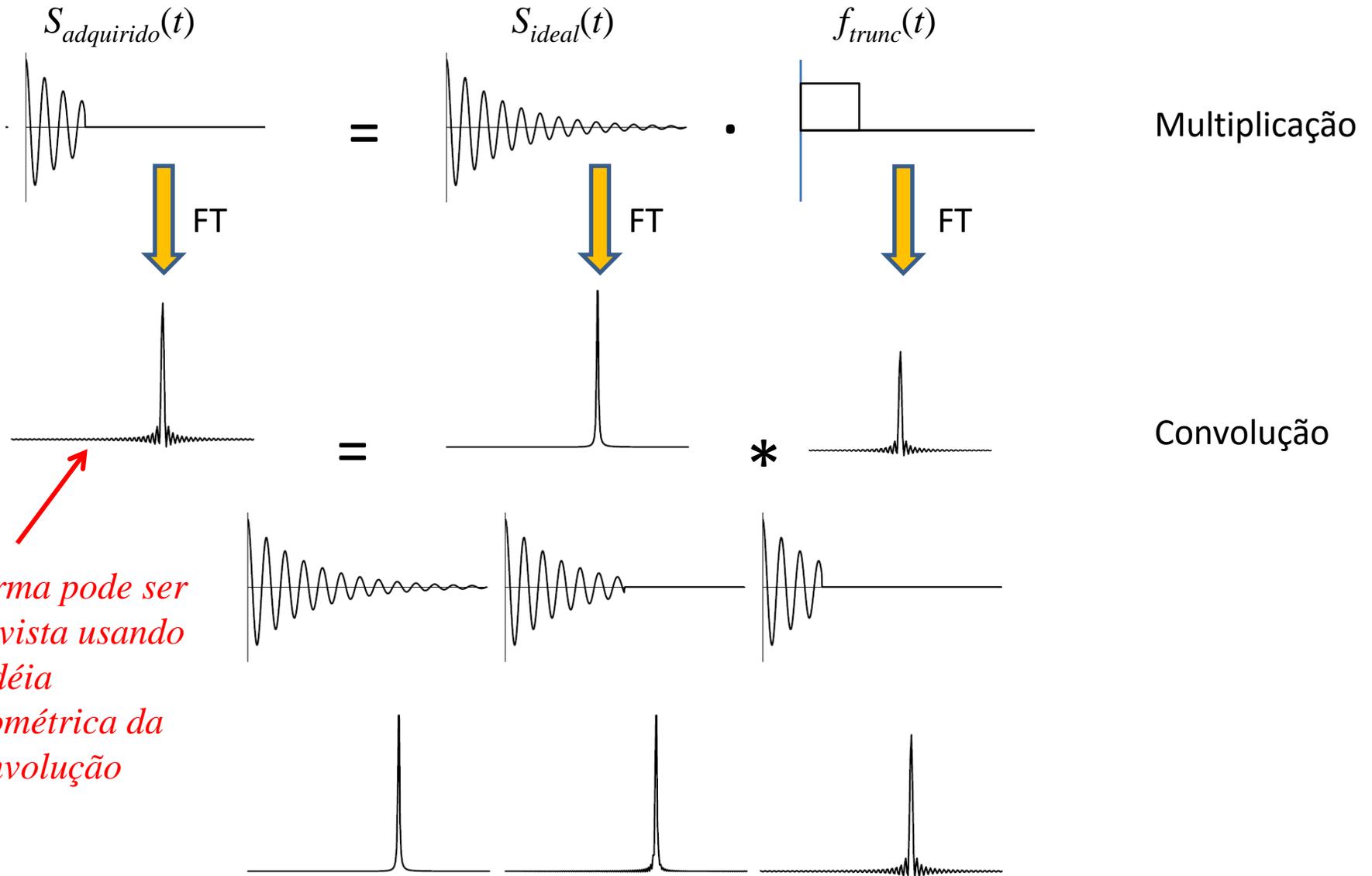
Definição Matemática da convolução entre duas funções:

$$FT\{f(t) \times g(t)\} = FT\{f(t)\} * FT\{g(t)\} = F\{\omega\} * G\{\omega\}$$

$$FT\{f(t) * g(t)\} = FT\{f(t)\} \times FT\{g(t)\} = F\{\omega\} \times G\{\omega\}$$

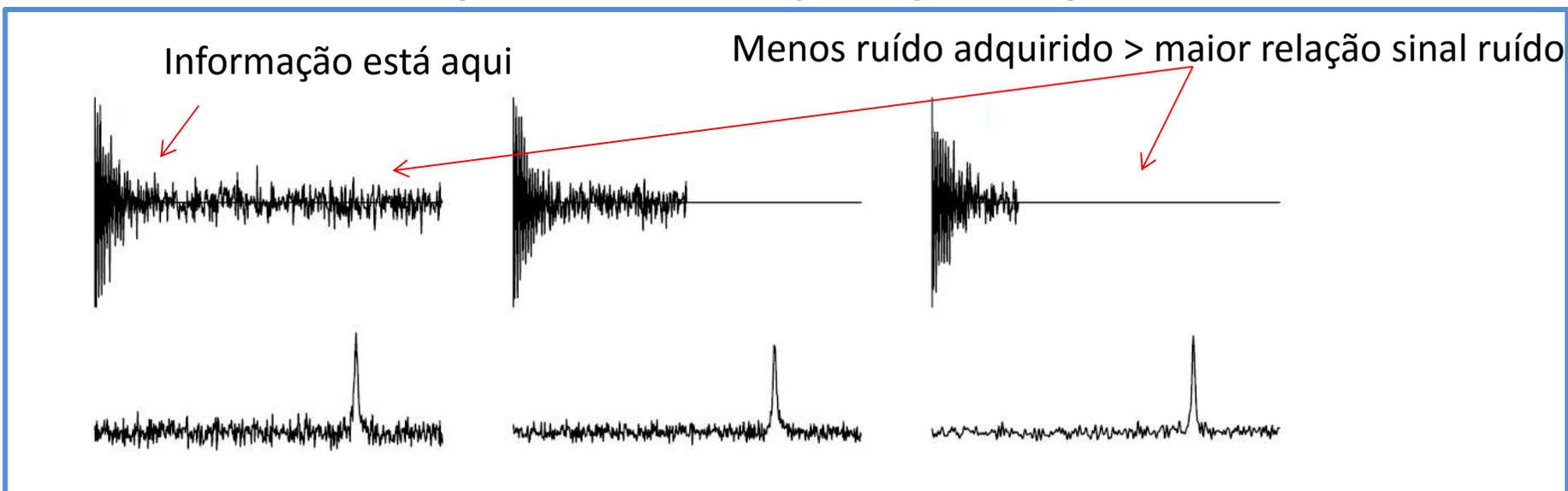


Truncamento do Sinal

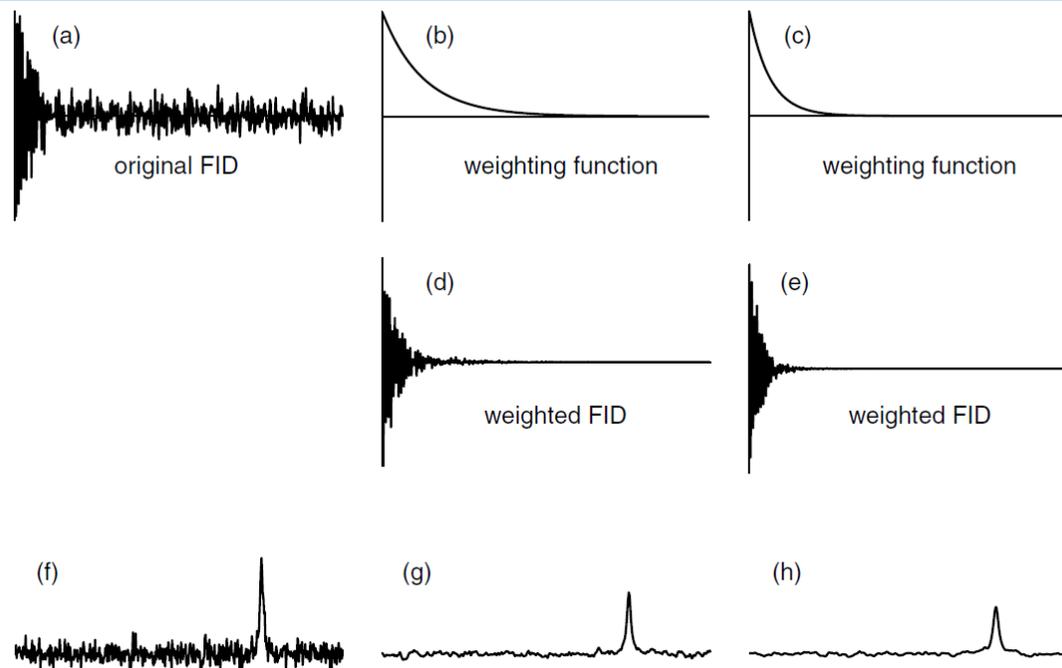


Forma pode ser prevista usando a idéia geométrica da convolução

Aumento da relação sinal ruído por apodização



mas nem sempre dá para saber se estamos perdendo alguns dos sinais pro truncamento



Aumento da relação sinal ruído por apodização

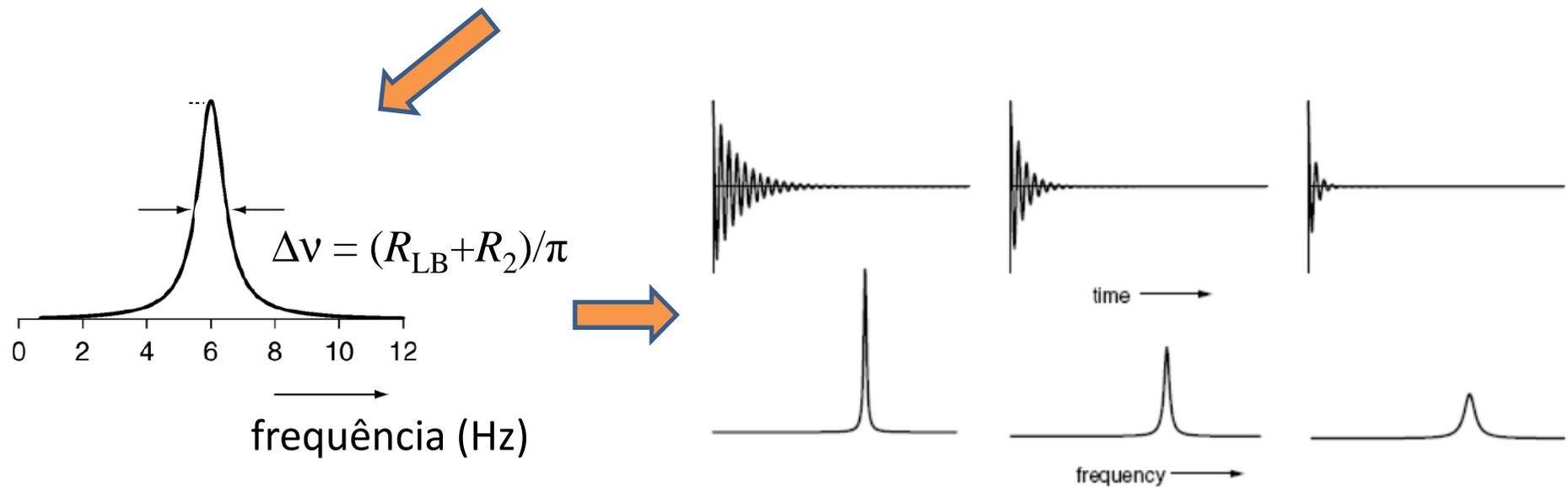
Demonstração: Apodização por função exponencial

$$W(t) = \exp(-R_{LB}t) \longrightarrow \text{Função de apodização}$$

$$S(t) = S_0 \exp(i\Omega t) \exp(-R_2 t) \longrightarrow \text{Sinal}$$

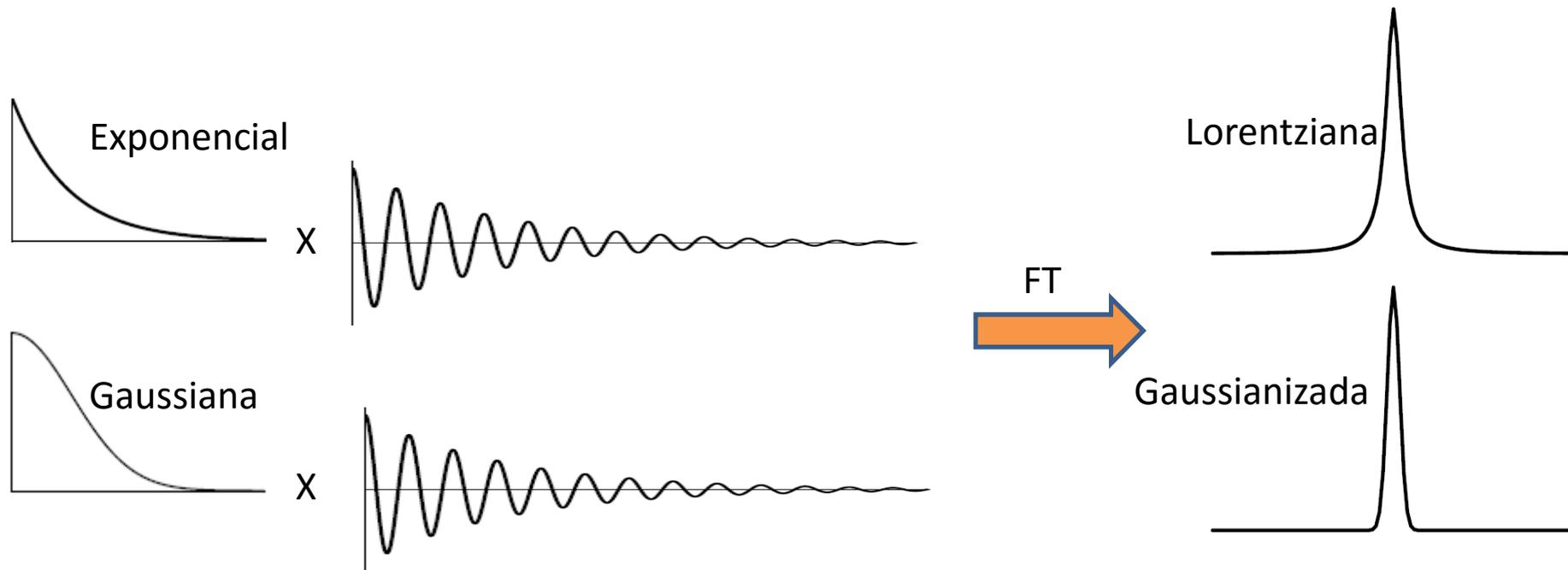
$$W(t) \times S(t) = \exp(-R_{LB}t) [S_0 \exp(i\Omega t) \exp(-R_2 t)] \longrightarrow \text{Apodização}$$

$$W(t) \times S(t) = S_0 \exp(i\Omega t) \exp(-(R_{LB} + R_2)t)$$



Aumento da relação sinal ruído por apodização

Forma de linha e função de apodização

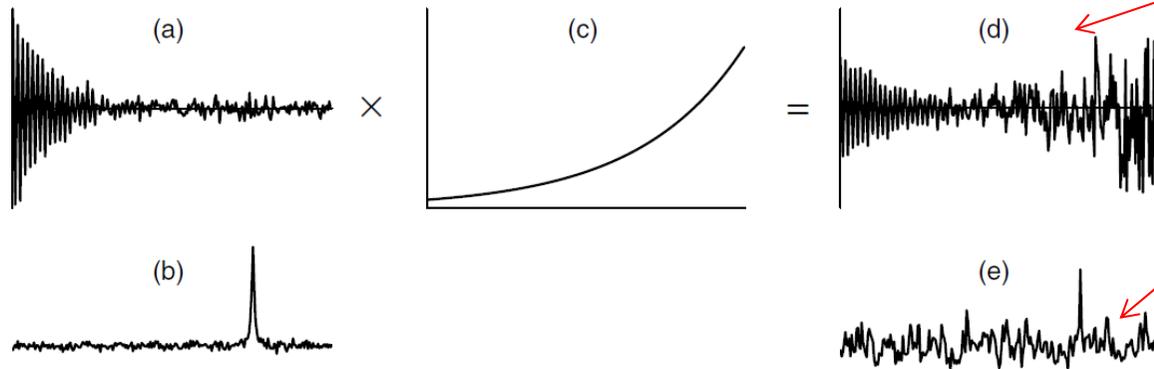


Forma de linha vai depender da função de apodização

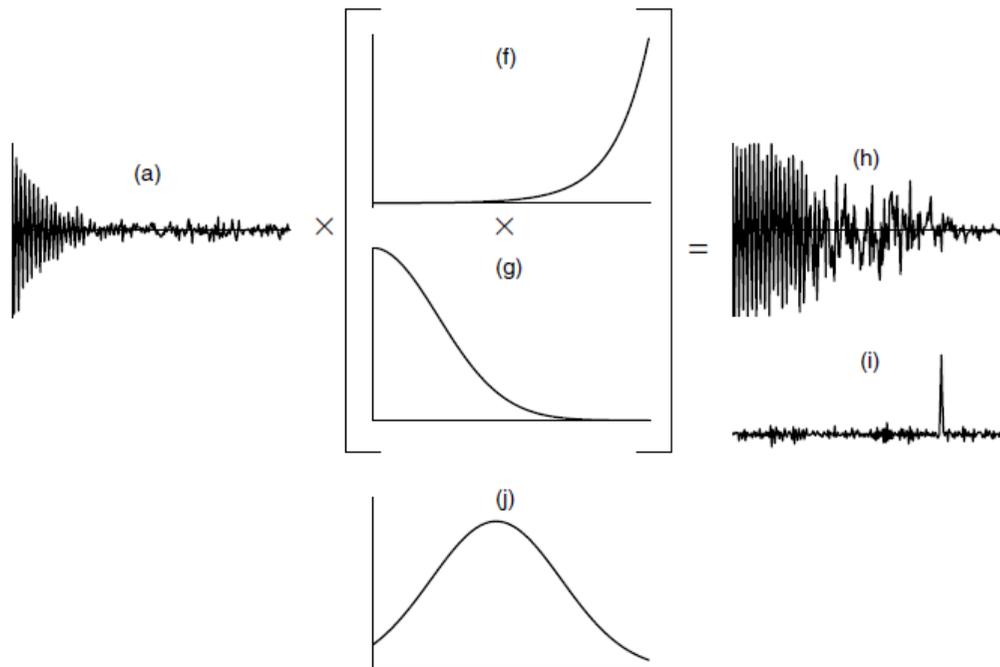
Aumento De resolução por multiplicação por função janela

Forma de linha e função de apodização

Sinal decai mais lento => Diminui a largura de linha, ou seja aumenta a resolução

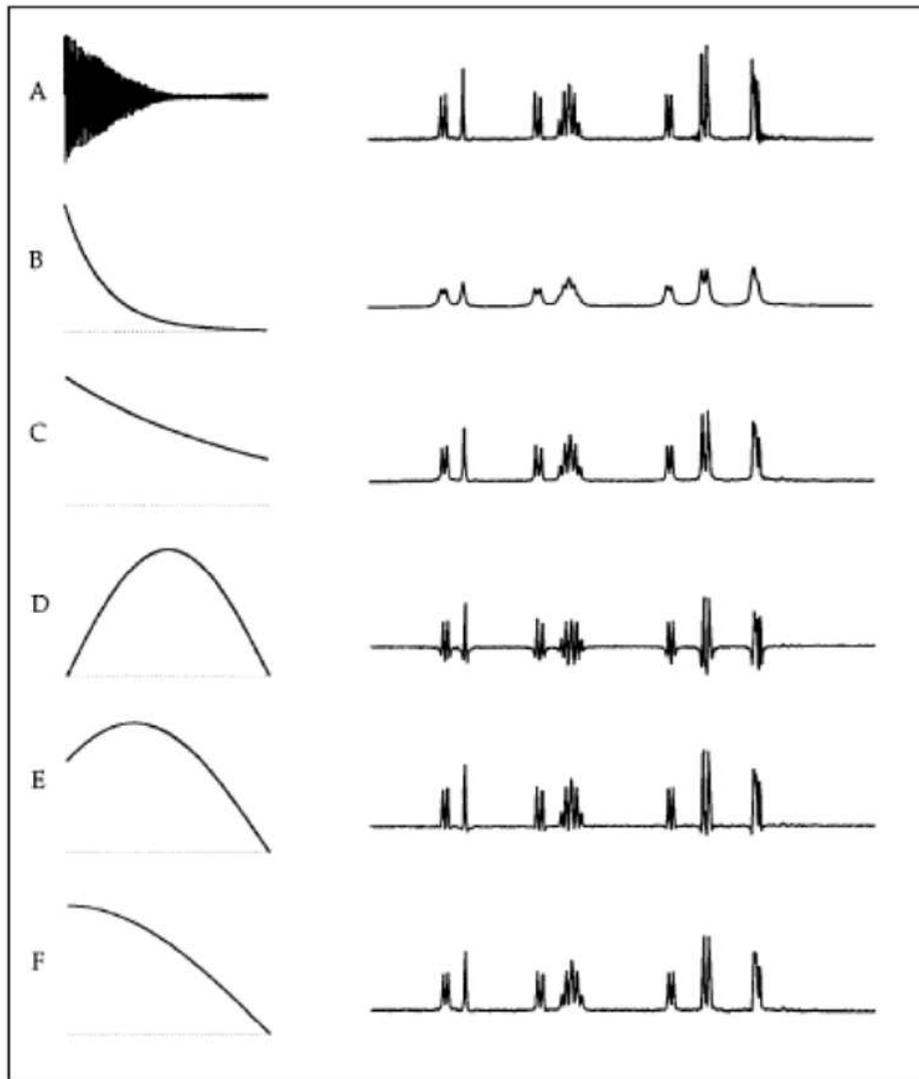


Mas diminui também a relação sinal ruído (SNR)



Aumenta a resolução sem comprometer tanto a relação sinal ruído.

Outras funções Janela



(A) raw spectrum after FT.

(B) Multiplication with exponential, $LB=5$.

(C) as (B), but $LB=1$.

(D) sinebell.

(E) 45 degree shifted sine-bell.

(F) 90 degree shifted sine-bell.