PL - Casos Especiais

1. MINIMIZAÇÃO

Existem 2 formas de solução:

a) Método Simplex:

i. Variável para entrar na base: aquela que reduz (ao invés de aumentar) a função Z

ii. Teste de otimalidade: verificar se Z pode diminuir ao se aumentar o valor de alguma variável não básica

b) Transformação:

- Converter o problema de Minimização em um equivalente de Maximização:

$$\text{Min } Z = - \text{Max } (-Z)$$

PL - Casos Especiais

2. IGUALDADES nas equações de Restrições

$$
\begin{aligned}
&Max\ Z = 3x_1 + 5x_2 \\
&s.a. \quad x_1 \le 4 \\
&\qquad\quad x_2 \le 6 \\
&\qquad\quad 3x_1 + 2x_2 = 18
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{array}{lllllll}
(0) & Z & -3x_1 & -5x_2 & & & = 0 \\
(1) & & x_1 & & +x_3 & & = 4 \\
(2) & & & x_2 & & +x_4 & = 6 \\
(3) & & 3x_1 & +2x_2 & & & = 18
\end{array}
$$

Neste caso, não há uma solução básica óbvia, pois não existe uma variável residual a ser utilizada como variável básica inicial na equação (3)

PL - Casos Especiais

Utiliza-se então uma **variável artificial** x_5

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 5x_2 - M\,x_5$$

$$s.a.$$

$$\begin{array}{lllll} x_1 & & +x_3 & & = 4 \\ & x_2 & & +x_4 & = 6 \\ 3x_1 & +2x_2 & & +x_5 & = 18 \end{array}$$

M: valor muito alto (Ex: M =10^10)

$$\begin{array}{llllllll} (0) & Z & -3x_1 & -5x_2 & & & +M\,x_5 & = 0 \\ (1) & & x_1 & & +x_3 & & & = 4 \\ (2) & & & x_2 & & +x_4 & & = 6 \\ (3) & & 3x_1 & +2x_2 & & & +x_5 & = 18 \end{array}$$

Obs: como x_5 é variável básica inicial, deve-se fazer:

Eq(0) = Eq(0)-M.Eq(3)

Desta forma, x_3, x_4 e x_5 formam a base inicial, e o processo evolui, de forma a anular x_5, tirando-a da base, caso contrário o valor de Z será negativo !

PL - Casos Especiais

- Outra forma: transformar a restrição com a igualdade em 2 desigualdades:

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$3x_1 + 2x_2 \geq 18$$

3. Restrições do tipo $\geq$

$$3x_1 + 2x_2 \geq 18 \Rightarrow -3x_1 - 2x_2 \leq -18$$

$$
\begin{array}{l}
Max\ Z = 3x_1 + 5x_2 \\
s.a. \\
\begin{array}{rrrrrcr}
x_1 & & +x_3 & & & = & 4 \\
& x_2 & & +x_4 & & = & 6 \\
-3x_1 & -2x_2 & & & +x_5 & = & -18
\end{array}
\end{array}
$$

PL - Casos Especiais

Mas, selecionando-se as variáveis residuais como a base inicial, resultaria x_5= -18 (não viável, pois x_i deve ser sempre ≥ 0

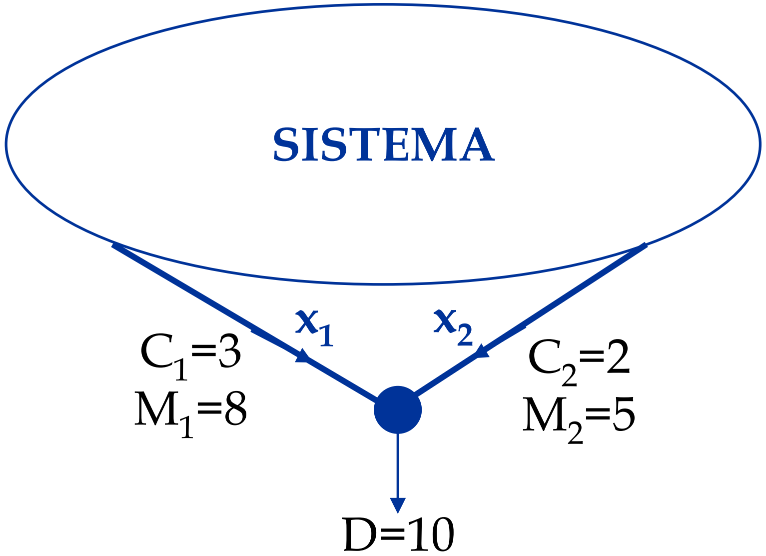
Introduz-se então variável artificial x_6

$$
\begin{aligned}
&Max\ Z = 3x_1 + 5x_2 - Mx_6\\
&s.a.\\
&x_1 + x_3 = 4\\
&x_2 + x_4 = 6\\
&-3x_1 - 2x_2 + x_5 - x_6 = -18
\end{aligned}
$$

Para garantir que Max Z ocorre quando x_6=0

Base inicial: x_3=4, x_4=6, x_6=18

Exemplo



$$Min\ Z = 3x_1 + 2x_2$$

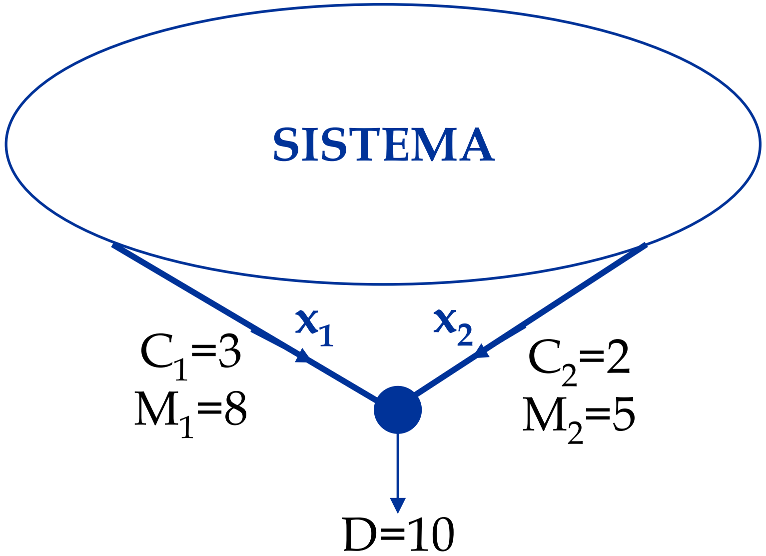
$$s.a. \quad x_1 \leq 8$$

$$x_2 \leq 5$$

$$x_1 + x_2 = 10$$

OTIMIZA

Solução

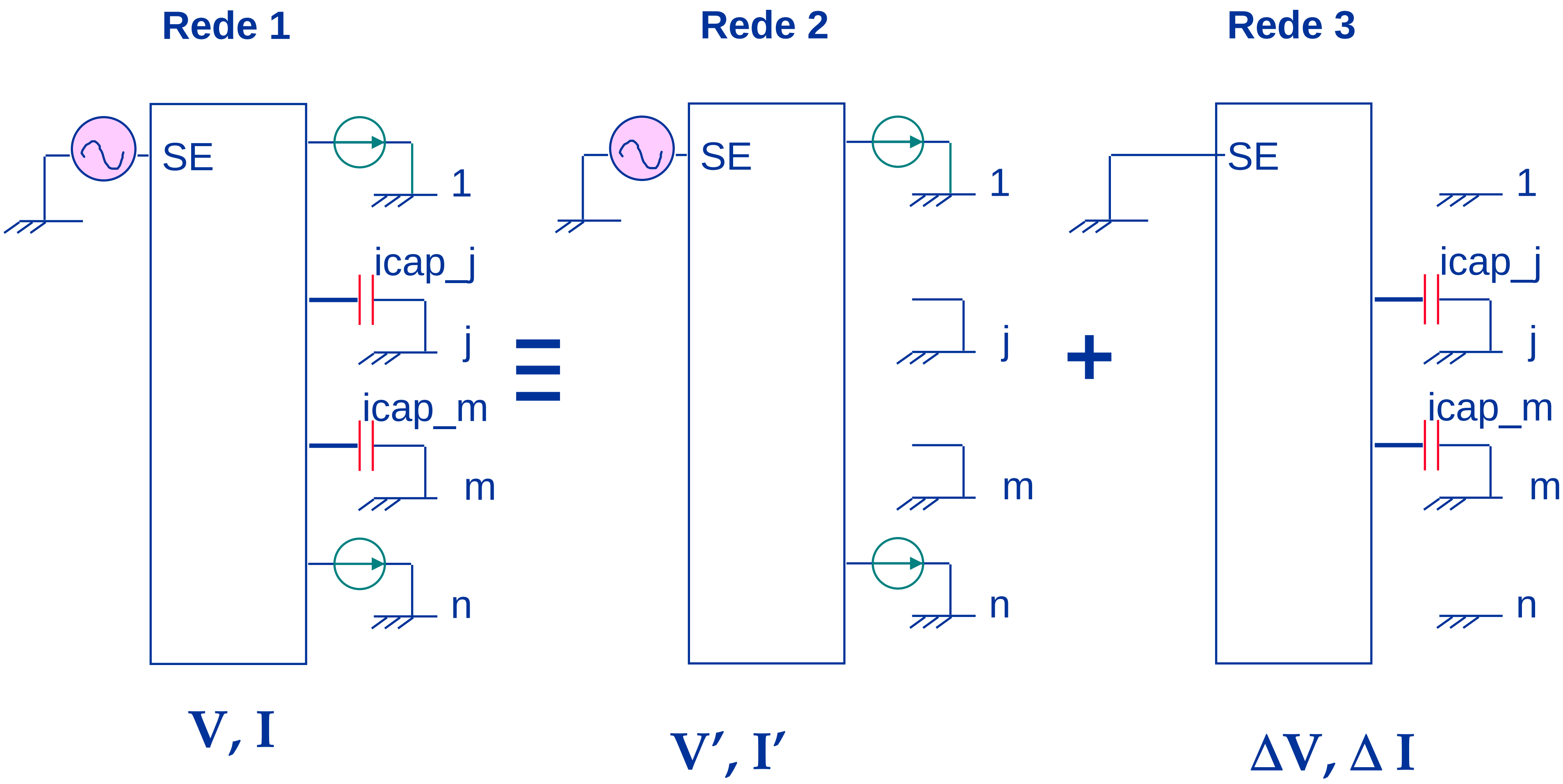


$x_1 = 5$
$x_2 = 5$
$Z = 25$

Locação de Bancos de Capacitores por Programação Linear

- Dada uma rede de distribuição, onde tem-se certas barras disponíveis para a locação de bancos de capacitores, deseja-se:
  - determinar em quais das barras instalar capacitores
  - com qual capacidade (q)
  - todas as tensões dentro da faixa
  - otimizar uma determinada função objetivo:
    - a - Custo de capacitores
    - b - Perdas na rede
    - c - Custo de investimento em capacitores e custo das perdas

Rede com capacitores: Teorema da superposição



Matriz de Impedâncias Nodais:

$$\begin{bmatrix} \Delta V_1 \\ --- \\ \Delta V_i \\ --- \\ \Delta V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & -- & Z_{1j} & -- & Z_{1m} \\ -- & -- & -- & -- & -- \\ Z_{i1} & -- & Z_{ij} & -- & Z_{im} \\ -- & -- & -- & -- & -- \\ Z_{n1} & -- & Z_{nj} & -- & Z_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{cap1} \\ --- \\ I_{capj} \\ --- \\ I_{capm} \end{bmatrix}$$

Formulação por PL:

$$\min \sum_{j=1}^{m} C_j I_{capj}$$

$$s.a. \begin{bmatrix} \Delta V_1 \\ --- \\ \Delta V_i \\ --- \\ \Delta V_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Z_{11} & -- & Z_{1j} & -- & Z_{1m} \\ -- & -- & -- & -- & -- \\ Z_{i1} & -- & Z_{ij} & -- & Z_{im} \\ -- & -- & -- & -- & -- \\ Z_{n1} & -- & Z_{nj} & -- & Z_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{cap1} \\ --- \\ I_{capj} \\ --- \\ I_{capm} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

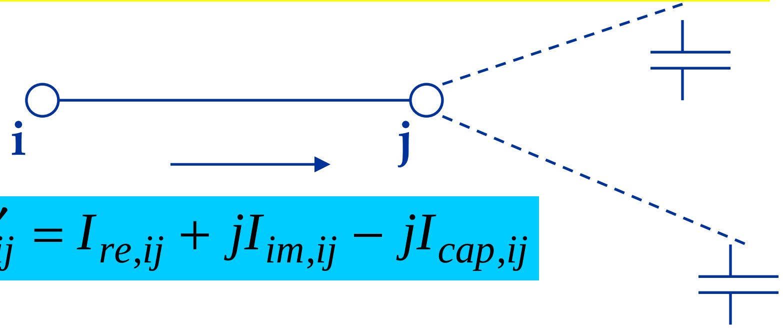
$$\Delta V_{\min,i} \le \Delta V_i \le \Delta V_{\max,i}$$

Minimização das Perdas:

$$p_{ij} = r_{ij} I_{ij}^2 = r_{ij} I_{re,ij}^2 + r_{ij} I_{im,ij}^2$$

$$p'_{ij} = r_{ij} I'^2_{ij} = r_{ij} I_{re,ij}^2 + r_{ij} \left(I_{im,ij} - I_{cap,ij} \right)^2$$

$$\Delta p_{ij} = r_{ij} I_{cap,ij} \left(2 I_{im,ij} - I_{cap,ij} \right)$$



$$I'_{ij} = I_{re,ij} + j I_{im,ij} - j I_{cap,ij}$$

Fazendo:

$$\Delta p_{ij} = r_{ij} I_{cap,ij} \left(2 I_{im,ij} - I_{cap,ij} \right) \cong r_{ij} I_{im,ij} I_{cap,ij}$$

A função objetivo relativa a minimização das perdas torna-se linear:

$$\min \sum_{ij} \Delta p_{ij} = \sum_{ij} r_{ij} I_{im,ij} I_{cap,ij} = \sum_{ij} C'_{ij} I_{cap,ij} = \sum_{j} C''_{ij} I_{cap,j}$$

Software OTIMIZA

- Apresentação do Software
- PL – Loacação de Capacitores
- PL – Área de Influência de Subestações

Programação Linear
Problema Dual (Complemento de Aula)

- A todo problema de PL (Problema Primal) pode-se associar um outro problema PL chamado de Problema Dual

$$
\begin{aligned}
& MaxZ_x = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\
& s.a. \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \le b_1 \\
& \qquad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \le b_2 \\
& \qquad ------------------ \\
& \qquad a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \le b_m \\
& \qquad x_1, x_2, \dots, x_n \ge 0
\end{aligned}
$$

PRIMAL

$$
\begin{aligned}
& MinZ_y = b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m \\
& s.a. \quad a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m \ge c_1 \\
& \qquad a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{m2}y_m \ge c_2 \\
& \qquad ------------------ \\
& \qquad a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{mn}y_m \ge c_n \\
& \qquad y_1, y_2, \dots, y_m \ge 0
\end{aligned}
$$

DUAL

Programação Linear
Problema Dual

Características:

- Coeficientes da função objetivo do Primal (c_1, c_2, ... c_n) -> Lado Direito das restrições no Dual
- Max Z_x no Primal -> Min Z_y no Dual
- Coeficientes das restrições -> Transposição

Exemplo

$$
\begin{aligned}
&Max\ Z_x = 3x_1 + 5x_2 \\
&s.a. \quad x_1 \leq 4 \\
&\qquad\quad x_2 \leq 6 \\
&\qquad\quad 3x_1 + 2x_2 \leq 18
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{aligned}
&Min\ Z_y = 4y_1 + 6y_2 + 18y_3 \\
&s.a. \quad y_1 + 3y_3 \geq 3 \\
&\qquad\quad y_2 + 2y_3 \geq 5
\end{aligned}
$$

Programação Linear
Problema Dual

- Teorema 1:

Sejam $Z_x^*, Z_y^*, x_j^* \ e \ y_i^*$ os valores ótimos de $Z_x \ e \ Z_y$

Então

$$Z_x^* = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* \quad e \quad Z_y^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$$

e

$$Z_x^* = Z_y^*$$

Programação Linear
Problema Dual

- Teorema 2:

  O valor da variável dual *i* é igual ao coeficiente da *i-ésima* variável de folga do problema primal na equação final da função objetivo Z

- Teorema 3:

  O valor da *j-ésima* variável de folga do problema dual é igual ao coeficiente da variável *j* do problema primal na equação final da função objetivo Z

Programação Linear
Problema Dual

- Exemplo

$$Max\ Z_x = 3x_1 + 5x_2 \quad \rightarrow Dual \rightarrow \quad Min\ Z_y = 4y_1 + 6y_2 + 18y_3$$

Solução

$$Z_x + 3x_4 + x_5 = 36$$

Então:

$$y_1^* = 0 \quad \text{(coeficiente de x}_3\text{, que é a 1a. variável de folga)}$$

$$y_2^* = 3 \quad \text{(coeficiente de x}_4\text{, que é a 2a. variável de folga)}$$

$$y_3^* = 1 \quad \text{(coeficiente de x}_5\text{, que é a 3a. variável de folga)}$$

(Teorema 2)

$$y_4^* = 0 \quad \text{(coeficiente de x}_1\text{)}$$

$$y_5^* = 0 \quad \text{(coeficiente de x}_2\text{)}$$

(Teorema 3)