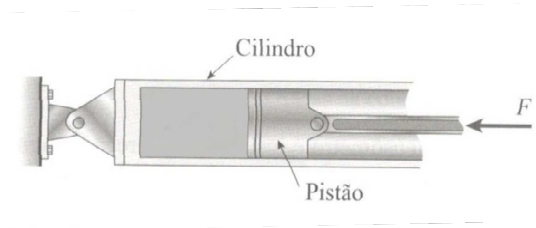
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Departamento de Engenharia Mecânica
PME-3211 – Mecânica dos Sólidos II / Profs.: C.A. Martins e R. Ramos Jr.
1ª Prova - 30/08/2016 / Duração da Prova: 100 minutos

Não é permitido o uso de calculadoras ou qualquer outro dispositivo eletrônico durante a prova!

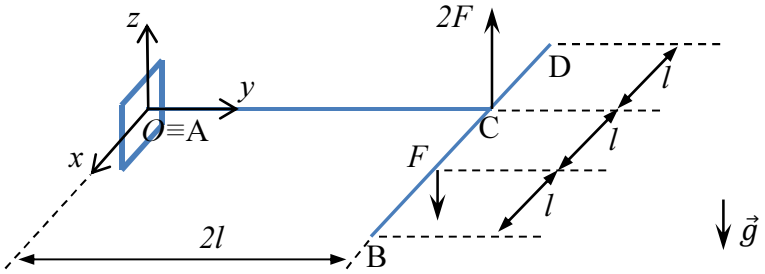
1ª Questão (3,0 pontos):



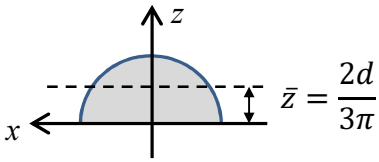
Um cilindro cheio de óleo é pressionado por um pistão de diâmetro d, ao qual está aplicada uma força F, como mostrado na figura. A máxima tensão de cisalhamento admissível na parede do cilindro é τ_{adm}. Determine a espessura mínima que deve ter a parede do cilindro.

2ª Questão (3,5 pontos):

A estrutura abaixo é formada por barras de seção circular cheia cujos eixos centrais estão dispostos no plano horizontal *Oxy* do sistema de referência *Oxyz* indicado, fixo na seção engastada da barra AC. Pede-se determinar os estados tensionais completos nos seguintes pontos da estrutura: $P_1 = (0{,}0, d/2)$ e $P_2 = (d/2\,, 0\,, 0)$ O carregamento consiste nos dois esforços concentrados de magnitudes F e $2F$, que atuam na direção Oz, e no peso próprio das barras (considere $\vec{g} = -g.\vec{e}_z$).
Dados: d = 40 mm, l = 1,0m, F = 300 N, g = 10 m/s^2, $\mu \cong$ 8000 kg/m^3, $\pi \cong 3$.



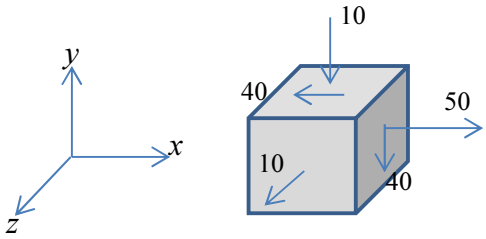
Dado:
Centroide de um setor semi-circular de diâmetro d:



3ª Questão (3,5 pontos):

Para o estado tensional indicado ao lado (com todas as tensões em MPa), pede-se:

a) o tensor das tensões escrito na base ortonormal positiva $b = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z) = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$;
b) as tensões principais no ponto e os círculos de Mohr das tensões;
c) as direções principais de tensão indicadas em um elemento devidamente rotacionado (indique o ângulo de rotação);
d) o valor da máxima tensão de cisalhamento que pode ocorrer em planos paralelos à direção principal $\vec{n}_1$;
e) a máxima tensão de cisalhamento (considerando todos os possíveis planos que passam pelo ponto);
f) a tensão normal que atua no plano de equação: $y + z = 0$.



Obs: Note que na representação acima, os valores das tensões estão em valor absoluto.

Gabarito

1ª Questão (3,0 pontos):

Pressão do óleo:

$p = \frac{F}{A} = \frac{4F}{\pi d^2}$

(1,0 pto)

Tensões principais (note que, neste caso, a tensão longitudinal é nula):

$$\sigma_1 = \sigma_C = \frac{pd}{2t};\ \sigma_2 = \sigma_L = 0;\ \sigma_3 = 0$$

Tensão de cisalhamento máxima:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{pd}{4t} = \frac{F}{\pi t d}$$

(1,0 pto)

A tensão de cisalhamento máxima deve ser menor que a tensão admissível:

$$\tau_{max} < \tau_{adm} \Rightarrow \frac{F}{\pi t d} < \tau_{adm}$$

$$\Rightarrow t > \frac{F}{\pi d \tau_{adm}}$$

(1,0 pto)

2ª Questão (3,5 pontos):

O carregamento distribuído devido ao peso próprio da barra é dado por:

$$q_o = \mu g A = \mu g \frac{\pi d^2}{4} = 8000.10.\frac{3.(40.10^{-3})^2}{4} = 96\ \ N/m$$

Os esforços solicitantes na seção A consistem apenas em:

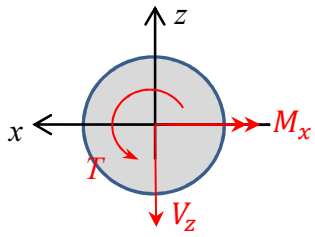
- Força cortante, na direção vertical, de magnitude $|V_z| = |5q_o l - F| = 180\ N$
- Momento fletor, segundo direção do eixo *Ox*, de magnitude:

$$|M_x| = |2q_o l^2 + (3q_o l)2l - 2Fl| = |8q_o l^2 - 2Fl| = 168\ Nm$$

- Momento torçor, de magnitude:

$$|T| = \left|2q_o l^2 - \frac{q_o l^2}{2} + Fl\right| = \left|\frac{3q_o l^2}{2} + Fl\right| = 444\ Nm$$

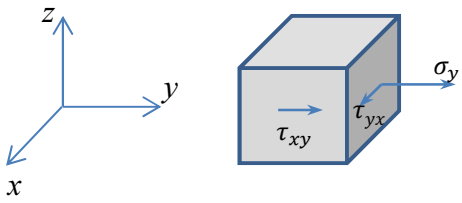
Os sentidos corretos de atuação destes esforços estão indicados na figura abaixo (onde está indicada a face de orientação positiva, ou seja, aquela cuja normal externa coincidente com o versor $\vec{e}_y$):



(1,5 pto)

O estado tensional no ponto $P_1 = (0{,}0, d/2)$ está indicado abaixo:

(1,0 pto)



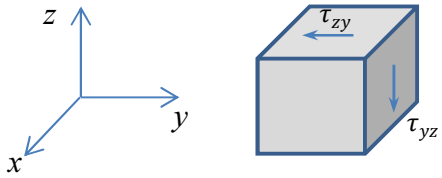
Onde:

$$\sigma_y = \frac{M_x}{I_x}\frac{d}{2} = \frac{64M_x}{\pi d^4}\frac{d}{2} = \frac{32M_x}{\pi d^3} = \frac{32.168000}{3.(40)^3} MPa = 28\ MPa$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{T}{I_p}\frac{d}{2} = \frac{32T}{\pi d^4}\frac{d}{2} = \frac{16T}{\pi d^3} = \frac{16.444000}{3.(40)^3} MPa = 37\ MPa$$

O estado tensional no ponto $P_2 = (d/2{,}0{,}0)$ está indicado abaixo:

(1,0 pto)



Onde:

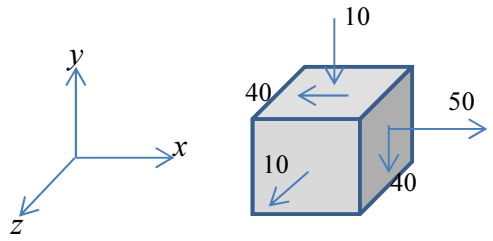
$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \frac{T}{I_p}\frac{d}{2} + \frac{V_z Q}{bI_x} = \frac{16T}{\pi d^3} + \frac{4}{3}\frac{V_z}{A} = 37\ MPa + 0{,}2\ MPa = 37{,}2\ MPa$$

3ª Questão (3,5 pontos):

a) O tensor das tensões escrito na base $b = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z) = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, para o estado de tensões dado, é:

$$[T]_b = \begin{bmatrix} 50 & -40 & 0 \\ -40 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \text{(MPa)}$$

(0,5 pto)



b) Calculando os auto-valores do tensor das tensões, temos:

$$det[T - \sigma.I] = det\begin{bmatrix} 50-\sigma & -40 & 0 \\ -40 & -10-\sigma & 0 \\ 0 & 0 & 10-\sigma \end{bmatrix} = 0$$

Resulta a equação (já parcialmente fatorada):

$$(10 - \sigma).(\sigma^2 - 40\sigma - 2100) = 0$$

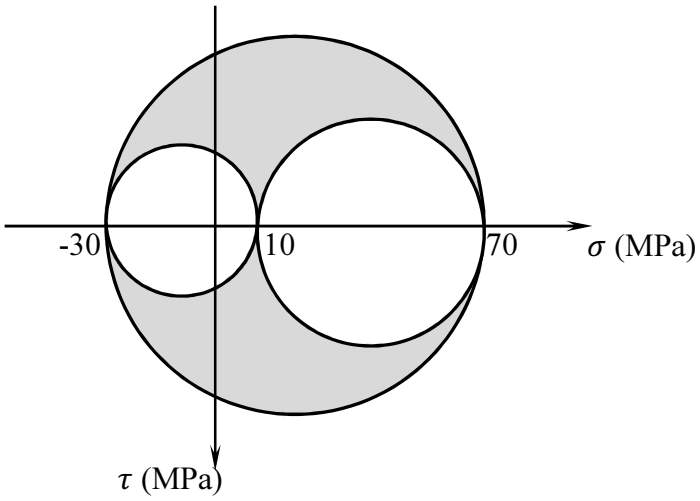
Cujas raízes são:

(0,5 pto)

$$\sigma = 10\ MPa \quad ou\ \ \sigma = \frac{40 \pm \sqrt{1600 + 8400}}{2} MPa \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_1 = +70\ MPa \\ \sigma_2 = +10\ MPa \\ \sigma_3 = -30\ MPa \end{cases}$$

Assim, os círculos de Mohr ficam:

(0,5 pto)



Nota: alternativamente, poderíamos ter determinado as tensões principais através das relações:

$$\sigma' = \bar{\sigma} + R = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2} = 70 \text{ MPa}$$

$$\sigma' = \bar{\sigma} - R = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right) - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2} = -30 \text{ MPa}$$

Sendo a tensão principal restante a própria tensão σ_z = 10 MPa.

c) A direção principal associada à tensão principal $\sigma_z = \sigma_2$ = 10 MPa é, naturalmente:

$$\{\vec{n}_2\} = \vec{e}_z = (0,0,1)_b$$

A direção principal associada à tensão principal σ_1 = 70 MPa pode ser encontrada por:

$$([T] - \sigma_1.[I])\{\vec{n}_1\} = \{\vec{0}\}$$

Ou seja:

$$\begin{bmatrix} -20 & -40 & 0 \\ -40 & -80 & 0 \\ 0 & 0 & -60 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_{x1} \\ n_{y1} \\ n_{z1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

O que leva a:

$$n_{x1} + 2n_{y1} = 0$$

$$n_{z1} = 0$$

Logo:

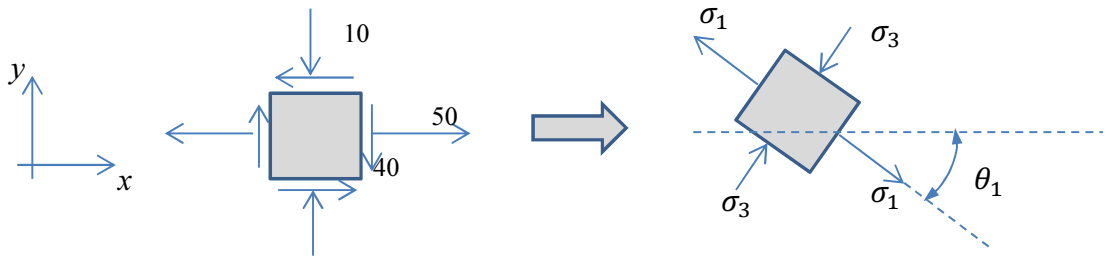
$$\{\vec{n}_1\} = \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}, 0\right)$$

E, portanto:

$$\{\vec{n}_3\} = \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}, 0\right)$$

Esquematicamente:

(0,5 pto)



Onde:

$$\theta_1 = \text{acos}\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$$

d) A máxima tensão de cisalhamento que pode ocorrer em planos paralelos à direção principal $\vec{n}_1$ tem valor dado por:

(0,5 pto)

$$\tau_{máx,//n1} = \frac{10 - (-30)}{2} = 20MPa$$

e) A máxima tensão de cisalhamento (considerando todos os possíveis planos que passam pelo ponto) é:

$$\tau_{máx} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{70 - (-30)}{2} = 50\ MPa$$

(0,5 pto)

f) O vetor tensão que atua no plano de equação: $y + z = 0$ é dado por:

$$\vec{\rho} = \begin{bmatrix} 50 & -40 & 0 \\ -40 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} 0 \\ \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -20\sqrt{2} \\ -5\sqrt{2} \\ 5\sqrt{2} \end{Bmatrix}$$

E a tensão normal que atua neste plano será:

$$\sigma_n = \vec{\rho} \cdot \vec{n} = 0 + (-5) + 5 = 0$$

Ou seja, não há tensão normal neste plano!

(0,5 pto)