MAP2320 - Métodos II

$2^{\underline{o}}$ Semestre de 2016 - Prof. Nelson Kuh

Lista 1

Exercício 1 Resolva as seguintes equações diferenciais parciais de primeira ordem, obtendo uma solução geral ou particular conforme o caso:

a) $u_t + 2tu_x = 0$;

b) $u_t + u_x - 3u = t$, $u(x, 0) = x^2$;

c) $xu_y - yu_x = u$, $u(x, 0) = h(x)$;

d) $u_x + 2u_y + (2x - y)u = 2x^2 + 3xy - 2y^2$.

Exercício 2 Resolva a equação $yu_x + xu_y = 0$ com $u(0, y) = e^{-y^2}$. Em qual região do plano xy a solução está unicamente determinada?

Exercício 3 Resolva o problema de valor inicial

$$u_t + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\cos x} u_x = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x).$$

Mostre que a solução é dada por $u(x, t) = u_0(\xi)$ onde $\xi(x, t)$ é a *única* solução de

$$\xi + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\xi = x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} x - t.$$

Exercício 4 Mostre que o problema de valor inicial para a equação

$$u_t + (1 + x^2)u_x = 0$$

não está bem definido.

Exercício 5 O esquema de Lax-Friedrichs para a equação $u_t + au_x = 0$ é definido pelo operador de diferenças finitas

$$P_{\tau,h}\phi = \frac{\phi(x, t + \tau) - \frac{1}{2}[\phi(x + h, t) + \phi(x - h, t)]}{\tau} + a\frac{\phi(x + h, t) - \phi(x - h, t)}{2h}.$$

Mostre que

$$P_{\tau,h}\phi = \phi_t + a\phi_x + \frac{1}{2}\tau\phi_{tt} - \frac{1}{2}\frac{h^2}{\tau}\phi_{xx} + \frac{1}{6}ah^2\phi_{xxx} + O\left(h^4 + \frac{h^4}{\tau} + \tau^2\right).$$

O que se pode afirmar sobre a consistência do esquema? Mostre que o esquema é estável segundo von Neumann.

Exercício 6 Verifique que $u(x,t) = 1 - x^2 - 2t$ é solução da equação do calor $u_t = u_{xx}$. Determine os valores máximo e mínimo de u no retângulo fechado $\{0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$.

Exercício 7 Suponha que $u_t - u_{xx} = f$ e $v_t - v_{xx} = g$, e que $f \leq g$ e $u \leq v$ em $x = 0$, $x = L$ e $t = 0$. Prove que $u \leq v$ em $0 \leq x \leq L$, $0 \leq t < \infty$.

Exercício 8 Considere a função

$$K(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/4t}, \quad x \in R, t > 0.$$

Mostre que:

a) $K \geq 0$ e K satisfaz a equação do calor para $x \in R$, $t > 0$;

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} K(x,t)\,dx = 1$, $\forall t > 0$;

c) dados $\epsilon > 0$ e $\eta > 0$, existe $t_0 > 0$ tal que, para $0 < t \leq t_0$,

$$\int_{|x|>\eta} K(x,t)\,dx < \epsilon.$$

Exercício 9 Mostre que se $v(y,s)$ é solução da equação do calor $v_s = v_{yy}$, então $u(x,t) = v(\alpha x + \beta, \alpha^2 t)$ também é solução da equação do calor $u_t = u_{xx}$.

Exercício 10 Mostre como transformar o problema

$$\begin{gathered} u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < L,\, t > 0, \\ u(0,t) = \alpha,\, u(L,t) = \beta,\, t > 0, \\ u(x,0) = f(x), \quad 0 < x < L, \end{gathered}$$

em um problema com condições de contorno homogêneas.