

# PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA I

Aulas 6, 7 e 8 - Prof. Regina Meyer Branski

# Aula de hoje!

- Diferenciar variáveis aleatórias discretas e contínuas
- Construir uma distribuição de probabilidade discreta e seu gráfico
- Identificar distribuição de probabilidade
- Encontrar a média, a variância e o desvio padrão de uma distribuição de probabilidade discreta
- Encontrar o valor esperado de uma distribuição de probabilidade discreta

# Objetivos

3

- Distribuição de Probabilidade Discreta
  - Como criar e usar
  - Calcular o centro e a variabilidade
  - Conhecer a forma

# Variáveis Aleatórias

- Representam um valor numérico associado à cada resultado de um experimento de probabilidade
- Denominado por “ $x$ ”
  - ***Discreta***
  - ***Contínua***

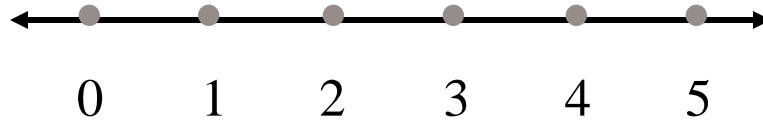
# Variáveis Aleatórias

5

- Variável Aleatória Discreta
  - ▣ Tem um número finito ou contável de possíveis resultados a serem listados
  
- Variável Aleatória Contínua
  - ▣ Tem um número incontável de possíveis resultados representados por um intervalo na reta numérica.

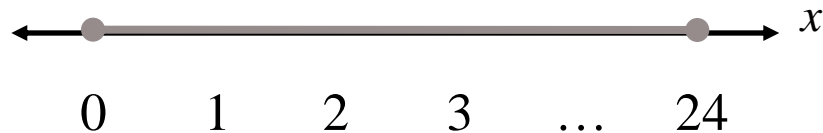
# Variáveis Aleatórias Discretas

- Número de ligações que um vendedor faz em um dia
- $x = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$



# Variáveis Aleatórias Contínuas

- Tempo diário (em horas) que um vendedor passa fazendo ligações
- $x = \{\text{qualquer número entre 0 e 24 horas}\}$



# Exercício

8

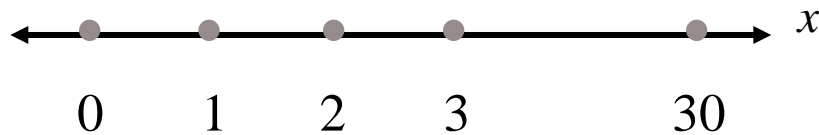
- Decida se a variável aleatória “ $x$ ” é discreta ou contínua
  - $x$  representa os títulos da Bolsa de Valores que tiveram aumento no valor de suas ações
  - $x$  representa o volume de água em um contêiner de 10 mil litros de capacidade.



# Exercício

9

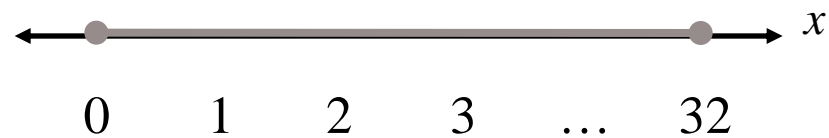
- ⦿  $x$  representa os títulos da Bolsa de Valores que tiveram aumento no valor de suas ações
- ⦿ Valor pode ser calculado



# Exercício

10

- ⊙  $x$  representa o volume de água em um contêiner de 10 mil litros de capacidade.
  - ▣ Pode ser qualquer valor entre 0 e 10 mil e, portanto, é contínua.



# Exercício

11

- Decida se a variável é discreta ou contínua
  1.  $x$  é o tempo necessário para terminar uma prova
  2.  $x$  representa o número de músicas que uma banda tocou em um festival de rock

# Distribuições de Probabilidade Discreta

- Lista cada valor possível que a variável aleatória pode assumir junto com sua probabilidade

- Condições

- ▣ Probabilidade deve estar entre 0 e 1

$$0 \leq P(x) \leq 1$$

- ▣ Soma das Probabilidades deve ser igual a 1

$$\sum P(x) = 1$$

# Construindo uma distribuição de probabilidade discreta

1. Fazer uma distribuição de frequência para os resultados possíveis.
2. Encontrar a soma das frequências.
3. Encontrar a probabilidade de cada resultado dividindo sua frequência pela soma das frequências.
4. Cada probabilidade deve estar entre 0 e 1 e a soma deve ser 1.

# Construindo uma distribuição de probabilidade discreta

14

- Você é um meteorologista que está trabalhando em um previsão de tempo de três dias. Levando em consideração que a ocorrência de chuva em um dia é independente da ocorrência de chuva em outro dia, você determinou que exista 40% de probabilidade de chover em cada um dos três dias (e 60% de não chover). Qual a probabilidade de haver chuva em 0, 1, 2 ou 3 dos dias?
  - ▣ Construa um diagrama de árvore
  - ▣ Construa uma tabela de Distribuição de Probabilidade
  - ▣ Construa um gráfico de barras

# Construindo uma distribuição de probabilidade discreta

Um psicólogo industrial aplicou um teste de inventário de personalidade para identificar características passivo-agressivas em 150 funcionários. Os indivíduos recebiam pontuações de 1 a 5, em que 1 era extremamente passivo e 5 extremamente agressivo. Uma pontuação 3 indicava neutralidade. Construa uma distribuição de probabilidade para a variável aleatória  $x$  e represente graficamente a distribuição usando um histograma

Pontuação $x$	Frequência $f$
1	24
2	33
3	42
4	30
5	21

# Construindo uma distribuição de probabilidade discreta

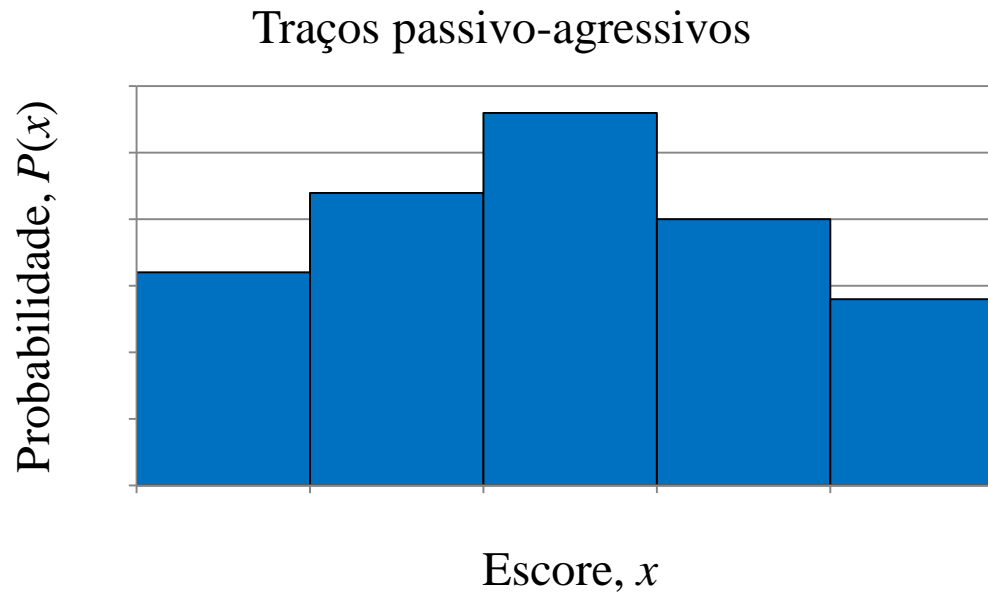
- Divida a frequência pelo número total de indivíduos para encontrar a probabilidade para cada valor da variável aleatória
  - ▣  $P(1) = 24/150 = 0,16$
  - ▣  $P(2) = 33/150 = 0,22$
  - ▣  $P(3) = 42/150 = 0,28$
  - ▣  $P(4) = 30/150 = 0,20$
  - ▣  $P(5) = 21/150 = 0,14$
- Distribuição da Probabilidade Discreta

<b>x</b>	1	2	3	4	5
<b>P(x)</b>	0,16	0,22	0,28	0,20	0,14



# Construindo uma Distribuição de Probabilidade Discreta

## Histograma



Como a largura é 1, a área de cada barra é igual à probabilidade de um resultado em particular

# Exercício

18

- Uma empresa rastreia todos os dias o número de vendas que os novos colaboradores fazem durante um período de 100 dias de experiência. Os resultados de um novo colaborador estão indicados. Faça a distribuição de probabilidade e desenhe a representação gráfica

## Distribuição de Frequência

Vendas por dia, $x$	Número de dias, $f$
0	16
1	19
2	15
3	21
4	9
5	10
6	8
7	2

# Verificando Distribuição de Probabilidade

19

- Verifique se a distribuição abaixo é uma distribuição de probabilidade

Dias de Chuva	Probabilidade
0	0,216
1	0,432
2	0,288
3	0,064

# Média, Variância e Desvio Padrão

20

## □ Média

$$\mu = \sum x * P(x)$$

# Exercício

21

- No quadro está apresentada a distribuição de probabilidade do teste do inventário de personalidade. Encontre a pontuação média da variável aleatória. O que você pode concluir?

<b>x</b>	1	2	3	4	5
<b>P(x)</b>	0,16	0,22	0,28	0,20	0,14

# Exercício

22

x	P(x)	x*P(x)
1	0,16	1*0,16 = 0,16
2	0,22	2*0,22 = 0,44
3	0,28	3*0,28 = 0,84
4	0,20	4*0,20 = 0,80
5	0,14	5*0,14 = 0,70
	$\sum P(x)=1$	$\sum x*P(x)=2,94$

# Variância e Desvio Padrão

23

## □ Variância

$$\sigma^2 = \sum (x - \mu)^2 P(x)$$

## □ Desvio Padrão

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

# Exercício

24

- No quadro está apresentada a distribuição de probabilidade do teste do inventário de personalidade. Encontre a variância e o desvio padrão.

<b>x</b>	1	2	3	4	5
<b>P(x)</b>	0,16	0,22	0,28	0,20	0,14



# Exercício

25

x	P(x)	x - $\mu$	(x - $\mu$ ) <sup>2</sup>	P(x)*(x - $\mu$ ) <sup>2</sup>
1	0,16			
2	0,22			
3	0,28			
4	0,20			
5	0,14			
	$\sum P(x)=$			

# Exercício

26

x	P(x)	x - $\mu$	(x - $\mu$ ) <sup>2</sup>	P(x)*(x - $\mu$ ) <sup>2</sup>
1	0,16	-1,94	3,764	0,602
2	0,22	-0,94	0,884	0,194
3	0,28	0,06	0,004	0,001
4	0,20	1,06	1,124	0,225
5	0,14	2,06	4,244	0,594
	$\sum P(x)=1$			$\sigma^2 = \sum P(x)*(x - \mu)^2 = 1,616$

$$\sigma = \text{raiz } 1,616 = 1,3$$

# Valor Esperado

27

- Média = Valor Esperado

$$E(x) = \mu = \sum x * P(x)$$

# Exercício

28

- Em uma rifa, 1.500 bilhetes são vendidos a R\$ 2 cada. Os bilhetes concorrem para quatro prêmios: R\$ 500, R\$ 250, R\$ 150 e R\$ 75. Se você comprar um bilhete, qual valor esperado do seu ganho?

# Exercício

29

Lucro, x	\$ 498	\$ 248	\$ 148	\$ 73	-\$2
P(x)	1/1500	1/1500	1/1500	1/1500	1496/1500

$$E(x) = \sum x \cdot P(x) = \$ 498 * 1/1500 + \$ 248 * 1/1500 + \dots (- \$ 2) * 1496/1500 = -\$ 1,35$$

# Exercício

30

- Em um sorteio, 2000 bilhetes são vendidos por \$ 5 cada para prêmios de \$ 2000, \$ 1000, \$ 500, \$ 250, \$ 100. Qual o valor esperado de lucro na compra de 1 bilhete?
- R. -\$3,08

# Objetivos

- Diferenciar variáveis aleatórias discretas de contínuas
- Construir uma distribuição de probabilidade discreta e seu gráfico
- Determinar se uma distribuição é uma distribuição de probabilidade
- Encontrar a média, a variância e o desvio padrão de uma distribuição de probabilidade discreta
- Encontrar o valor esperado de uma distribuição de probabilidade discreta

# DISTRIBUIÇÕES BINOMIAIS



# Objetivos

- ◉ Determinar se o experimento de probabilidade é binomial
- ◉ Encontrar probabilidades binomiais usando a fórmula
- ◉ Encontrar probabilidades binomiais usando tecnologia e uma tabela binomial
- ◉ Encontrar a média, a variância e o desvio padrão de uma distribuição de probabilidade binomial

# Experimentos binomiais

1. O experimento é repetido um número fixo de tentativas; cada tentativa é independente das outras.
2. Há apenas dois resultados possíveis: sucesso ( $S$ ) ou falha ( $F$ ).
3. A probabilidade de um sucesso  $P(S)$  é a mesma para cada tentativa.
4. A variável aleatória  $x$  conta o número de tentativas bem-sucedidas.

# Notação para Experimentos Binomiais

35

Símbolo	Descrição
$n$	Número de vezes em que a tentativa é repetida
$p=P(S)$	Probabilidade de sucesso em uma tentativa única
$q=P(F)$	Probabilidade do fracasso em uma tentativa única ( $q=1-p$ )
$x$	Variável aleatória representa a contagem dos números de sucessos nas $n$ tentativas: $x = 0, 1, 2, 3, \dots, n$

De um baralho de cartas comum, você pega uma carta, verifica se o naipe é paus ou não e devolve a carta no baralho. Você repete o experimento 5 vezes.

# Notações para Experimentos Binomiais

36

De um baralho de cartas comum, você pega uma carta, verifica se o naipe é paus ou não e devolve a carta no baralho. Você repete o experimento 5 vezes.

Símbolo	Descrição
$n$	5
$p=P(S)$	$1/4$
$q=P(F)$	$3/4$
$x$	Variável aleatória representa o número de naipes de paus selecionados 0, 1, 2, 3, 4, 5

# Exercício

## Experimentos Binomiais

Decida se o experimento é binomial. Se for, especifique os valores de  $n$ ,  $p$  e  $q$  e liste os valores possíveis da variável aleatória  $x$ .

1. Um certo procedimento cirúrgico tem uma chance de sucesso de 85%. Um médico realiza o procedimento em oito pacientes. A variável aleatória representa o número de cirurgias bem-sucedidas.

# Exercício

## Experimentos Binomiais

1. Um certo procedimento cirúrgico tem uma chance de sucesso de 85%. Um médico realiza o procedimento em oito pacientes. A variável aleatória representa o número de cirurgias bem-sucedidas.

Símbolo	Descrição
$n$	8
$p=P(S)$	0,85
$q=P(F)$	0,15
$x$	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

# Exercício

## Experimentos Binomiais

2. Uma jarra contém cinco bolinhas vermelhas, nove bolinhas azuis e seis bolinhas verdes. Você pega aleatoriamente três bolinhas do jarro, *sem recolocá-las*. A variável aleatória representa o número de bolinhas vermelhas.

# Exercício

## Experimentos Binomiais

2. Uma jarra contém cinco bolinhas vermelhas, nove azuis e seis verdes. Você pega aleatoriamente três bolinhas do jarro, *sem recolocá-las*. A variável aleatória representa o número de bolinhas vermelhas.

2. Não é binomial porque não atende às quatro condições de um experimento binomial. No experimento, cada seleção de bolinha representa uma tentativa e selecionar bolinha vermelha é sucesso. Quando a primeira bolinha é selecionada a probabilidade de sucesso é  $5/20$ . Mas como não há reposição, a probabilidade nas tentativas subsequentes não é  $5/20$ . Portanto, as tentativas não são independentes e a probabilidade de sucesso não é a mesma para cada tentativa.



# Exercício

41

3. Você faz um teste de múltipla escolha com 10 questões. Cada questão tem quatro respostas possíveis, mas somente uma é correta. Para completar o teste você escolhe uma resposta aleatoriamente para cada questão. A variável aleatória representa o número de respostas corretas.
- a. Identifique uma tentativa do experimento e o que é um sucesso
  - b. Decida se o experimento satisfaz as quatro condições de um experimento binomial
  - c. Conclua o raciocínio e identifique  $n$ ,  $p$ ,  $q$  e os valores possíveis para  $x$

# Fórmula de Probabilidade Binomial

- A probabilidade de encontrar  $x$  sucessos em  $n$  tentativas:

$$P(x) = C_{(n,x)} p^x q^{n-x} = \frac{n!}{(n-x)! x!} p^x q^{n-x}$$

# Exercício

## Encontrando Probabilidades Binomiais

Cirurgias de microfraturas no joelho têm 75% de chance de sucesso em pacientes com problemas degenerativos. A cirurgia é realizada em três pacientes. Encontre a probabilidade da cirurgia ser bem-sucedida em exatamente dois pacientes

Fonte: Illinois Orthopaedic and Sportsmedicine Centers

Método 1: Diagrama de Árvore e Regra da Multiplicação

Método 2: Fórmula da Probabilidade Binomial



# Exercício

**Método 1:** Desenhar um diagrama de árvore e usar a regra da multiplicação.

Cirurgia 1 <sup>a</sup>	Cirurgia 2 <sup>a</sup>	Cirurgia 3 <sup>a</sup>	Resultado	Número de sucessos	Probabilidade	
S	S	S	SSS	3	$\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{27}{64}$	
		F	SSF	2	$\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{64}$	
	F	S	SFS	2	$\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{64}$	
		F	SFF	1	$\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{64}$	
	F	S	S	FSS	2	$\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{64}$
			F	FSF	1	$\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{64}$
F		S	FFS	1	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{64}$	
		F	FFF	0	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{64}$	

$$3 \left( \frac{9}{64} \right) \approx 0,422.$$



# Exercício

**Método 2:** Fórmula da probabilidade binomial.

$$n = 3, \quad p = \frac{3}{4}, \quad q = 1 - p = \frac{1}{4}, \quad x = 2$$

$$\begin{aligned} P(2 \text{ cirurgias com sucesso}) &= \frac{3!}{(3-2)!2!} \left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^1 \\ &= 3 \binom{9}{16} \binom{1}{4} = 3 \binom{9}{64} = \frac{27}{64} \approx 0,422. \end{aligned}$$



# Distribuição de Probabilidade Binomial

- Valores possíveis de  $x$  e suas probabilidades
  - ▣ Cirurgia de microfraturas no joelho:  $n = 3$ ,  $p = 3/4$ ,  $q = 1/4$  e  $x = 2$
  - ▣ Usar a fórmula da probabilidade binomial para encontrar probabilidades

<b><math>x</math></b>	0	1	2	3
<b><math>P(x)</math></b>	0,016	0,141	0,422	0,422

# Exercício

47

- Uma carta é escolhida em um baralho comum e recolocada dentro dele. Esse experimento é repetido 5 vezes. Encontre a probabilidade de que seja selecionada três cartas de paus. Use a fórmula...

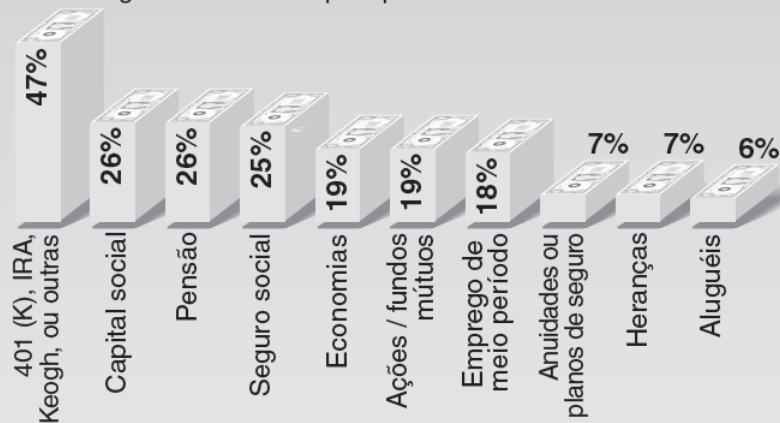
# Exercício

## Construindo uma Distribuição Binomial

Pesquisa nos EUA pediu que trabalhadores indicassem a fonte de seus rendimentos durante a aposentadoria. Os resultados estão no gráfico. Sete trabalhadores que participaram da pesquisa foram escolhidos aleatoriamente e responderam se esperam poder contar com o Seguro Social como fonte de renda. Crie uma distribuição de probabilidade binomial para o número de trabalhadores que responderam sim.

### Principais fontes de renda para aposentadoria, segundo expectativas

Ainda que mais da metade dos trabalhadores espere que a 401(K), IRA, Keogh, ou outras contas de rendimento para aposentadoria sejam a maior fonte de renda, aproximadamente um em cada quatro trabalhadores contará com o seguro social como a principal fonte de renda.



(Fonte: The Gallup Organization.)



# Exercício

## Construindo uma Distribuição Binomial

49

- 25% dos trabalhadores americanos esperam confiar no Seguro Social para aposentadoria
- $n = 7, p = 0,25, q = 0,75, x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$

$$P(x = 0) = {}_7C_0(0,25)^0(0,75)^7 = 1(0,25)^0(0,75)^7 \approx 0,1335$$

$$P(x = 1) = {}_7C_1(0,25)^1(0,75)^6 = 7(0,25)^1(0,75)^6 \approx 0,3115$$

$$P(x = 2) = {}_7C_2(0,25)^2(0,75)^5 = 21(0,25)^2(0,75)^5 \approx 0,3115$$

$$P(x = 3) = {}_7C_3(0,25)^3(0,75)^4 = 35(0,25)^3(0,75)^4 \approx 0,1730$$

$$P(x = 4) = {}_7C_4(0,25)^4(0,75)^3 = 35(0,25)^4(0,75)^3 \approx 0,0577$$

$$P(x = 5) = {}_7C_5(0,25)^5(0,75)^2 = 21(0,25)^5(0,75)^2 \approx 0,0115$$

$$P(x = 6) = {}_7C_6(0,25)^6(0,75)^1 = 7(0,25)^6(0,75)^1 \approx 0,0013$$

$$P(x = 7) = {}_7C_7(0,25)^7(0,75)^0 = 1(0,25)^7(0,75)^0 \approx 0,0001$$

# Exercício

## Construindo uma Distribuição Binomial

$x$	$P(x)$
0	0,1335
1	0,3115
2	0,3115
3	0,1730
4	0,0577
5	0,0115
6	0,0013
7	0,0001

Todas as probabilidades estão entre 0 e 1 e a soma das probabilidades é  $1,00001 \approx 1$ .

# Use a tecnologia....

51

- Resultados de uma pesquisa recente mostram que ao assar alguma coisa, 59% das casas usam uma grelha a gás. Se você selecionar 100 casas aleatoriamente, qual a probabilidade de que exatamente 65 casas usem uma grelha a gás? Use uma ferramenta tecnológica para encontrar a probabilidade.
  - ▣ Excel: DISTRBINOM
  - ▣ Minitab: Probability Distribution Function
  - ▣ R.  $0,039107 = 0,04$

# Distribuição Binomial

## Excel

52

**DISTRBINOM(num\_s; tentativas; probabilidade; Cumulativo)**

Número tentativas bem sucedidas	num_s	x	65
Número de tentativas independentes	tentativas	n	100
Probabilidade de sucesso em uma tentativa		p	0,59
Cumulativo	Verdadeiro ou Falso		Falso

**Verdadeiro = retorna distribuição cumulativa, que exista no máximo x sucesso**  
**Falso = retorna a função massa de probabilidade, que exista x sucesso**

# Exercício

## Use a fórmula...

Uma pesquisa indica que 41% das mulheres nos EUA consideram leitura como seu lazer favorito. Você seleciona aleatoriamente quatro mulheres dos EUA e pergunta se ler é o passatempo preferido delas. Encontre a probabilidade de que pelo menos duas delas respondam sim



# Exercício

## Construindo uma Distribuição Binomial

$$n = 4, p = 0,41, q = 0,59$$

Pelo menos duas = duas ou mais

Encontre a soma de  $P(2)$ ,  $P(3)$ , e  $P(4)$



$$P(x = 2) = {}_4C_2(0,41)^2(0,59)^2 = 6(0,41)^2(0,59)^2 \approx 0,351094$$

$$P(x = 3) = {}_4C_3(0,41)^3(0,59)^1 = 4(0,41)^3(0,59)^1 \approx 0,162654$$

$$P(x = 4) = {}_4C_4(0,41)^4(0,59)^0 = 1(0,41)^4(0,59)^0 \approx 0,028258$$

$$P(x \geq 2) = P(2) + P(3) + P(4) \approx 0,351094 + 0,162654 + 0,028258 \\ \approx 0,542$$

# Exercício

## Construindo uma Distribuição Binomial

55

- Uma pesquisa indica que 21% dos homens tem a pescaria como atividade de lazer preferida. Você escolhe aleatoriamente 4 homens e pergunta se eles tem a pescaria como atividade de lazer preferida. Encontre a probabilidade de que:
  - Exatamente dois deles respondam sim. R.0,217
  - No mínimo dois deles respondam sim. R. 0,283
  - Menos que dois deles respondam sim. R.0,717

# Exemplo: encontrando probabilidades binomiais usando tabela

Cerca de 30% dos adultos trabalhadores gastam menos de 15 minutos para ir e voltar ao trabalho. Você seleciona aleatoriamente seis adultos trabalhadores. Qual é a probabilidade de exatamente três deles gastarem menos de 15 minutos indo e voltando do trabalho? Use uma tabela para encontrar a probabilidade.

*Fonte: U.S. Census Bureau*





# Exemplo: encontrando probabilidades binomiais usando tabela

Cerca de 30% dos adultos trabalhadores gastam menos de 15 minutos para ir e voltar ao trabalho. Você seleciona aleatoriamente seis adultos trabalhadores. Qual é a probabilidade de exatamente três deles gastarem menos de 15 minutos indo e voltando do trabalho? Use uma tabela para encontrar a probabilidade.

*Fonte: U.S. Census Bureau*

Binomial com  $n = 6$ ,  $p = 0,30$ ,  $x = 3$



# Exemplo: encontrando probabilidades binomiais usando tabela

## □ Tabela Distribuição Binomial



		$p$												
$n$	$x$	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60
2	0	0,980	0,902	0,810	0,723	0,640	0,563	0,490	0,423	0,360	0,303	0,250	0,203	0,160
	1	0,020	0,095	0,180	0,255	0,320	0,375	0,420	0,455	0,480	0,495	0,500	0,495	0,480
	2	0,000	0,002	0,010	0,023	0,040	0,063	0,090	0,123	0,160	0,203	0,250	0,303	0,360
3	0	0,970	0,857	0,729	0,614	0,512	0,422	0,343	0,275	0,216	0,166	0,125	0,091	0,064
	1	0,029	0,135	0,243	0,325	0,384	0,422	0,441	0,444	0,432	0,408	0,375	0,334	0,288
	2	0,000	0,007	0,027	0,057	0,096	0,141	0,189	0,239	0,288	0,334	0,375	0,408	0,432
	3	0,000	0,000	0,001	0,003	0,008	0,016	0,027	0,043	0,064	0,091	0,125	0,166	0,216

6	0	0,941	0,735	0,531	0,377	0,262	0,178	0,118	0,075	0,047	0,028	0,016	0,008	0,004
	1	0,057	0,232	0,354	0,399	0,393	0,356	0,303	0,244	0,187	0,136	0,094	0,061	0,037
	2	0,001	0,031	0,098	0,176	0,246	0,297	0,324	0,328	0,311	0,278	0,234	0,186	0,138
	3	0,000	0,002	0,015	0,042	0,082	0,132	0,185	0,236	0,276	0,303	0,312	0,303	0,276
	4	0,000	0,000	0,001	0,006	0,015	0,033	0,060	0,095	0,138	0,186	0,234	0,278	0,311
	5	0,000	0,000	0,000	0,000	0,002	0,004	0,010	0,020	0,037	0,061	0,094	0,136	0,187
	6	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,002	0,004	0,008	0,016	0,028	0,047

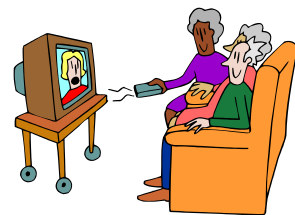
# Exemplo: encontrando probabilidades binomiais usando a tabela

59

- Quarenta e cinco por cento de todas as pequenas empresas brasileiras tem um site na internet. Se você selecionar 10 pequenas empresas de forma aleatória, qual a probabilidade de que exatamente quatro delas tenham site na Internet? Use a tabela.
- R. 0,238

# Exemplo: fazendo um gráfico de distribuição binomial

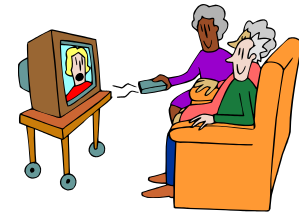
Cinquenta e nove por cento dos lares nos EUA são assinantes de TV a cabo. Você seleciona aleatoriamente seis lares e pergunta se a casa tem TV a cabo. Construa uma distribuição de probabilidade para a variável aleatória  $x$ . Depois, faça um gráfico da distribuição.  
(Fonte: Kagan Research, LLC.)



# Exemplo: fazendo um gráfico de distribuição binomial

Cinquenta e nove por cento dos lares nos EUA são assinantes de TV a cabo. Você seleciona aleatoriamente seis lares e pergunta se a casa tem TV a cabo. Construa uma distribuição de probabilidade para a variável aleatória  $x$ . Depois, faça um gráfico da distribuição. (Fonte: Kagan Research, LLC.)

- $n = 6, p = 0,59, q = 0,41$

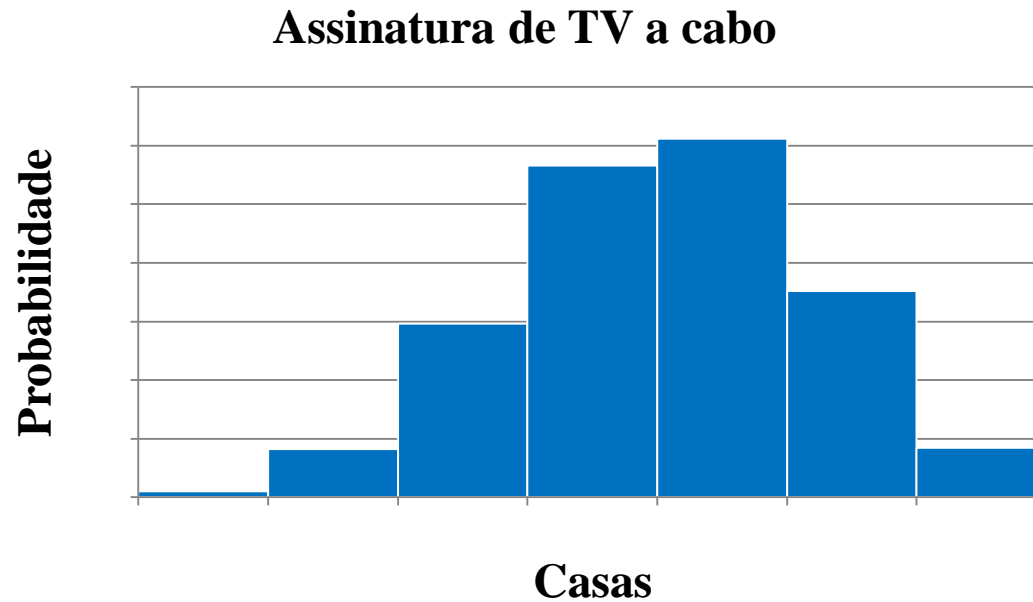


- Probabilidade para cada valor de  $x$

$x$	0	1	2	3	4	5	6
$P(x)$	0,005	0,041	0,148	0,283	0,306	0,176	0,042

# Exemplo: fazendo um gráfico de distribuição binomial

## Histograma



# Parâmetros Populacionais da Distribuição Binomial

- **Média:**  $\mu = np$
- **Variância:**  $\sigma^2 = npq$
- **Desvio padrão:**  $\sigma = \sqrt{npq}$

# Média, Variância e Desvio Padrão

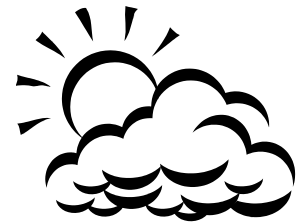
Na Pensilvânia, cerca de 56% dos dias em um ano são nublados. Encontre a média, variância e desvio padrão para o número de dias nublados durante o mês de junho. Interprete os resultados e determine quaisquer valores incomuns. (*Fonte: National Climatic Data Center.*)





# Média, Variância e Desvio Padrão

$$n = 30, p = 0,56, q = 0,44$$



$$\text{Média: } \mu = np = 30 \cdot 0,56 = 16,8$$

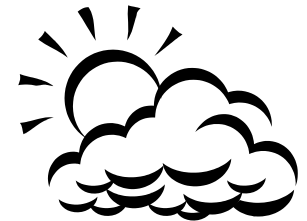
$$\text{Variância: } \sigma^2 = npq = 30 \cdot 0,56 \cdot 0,44 \approx 7,4$$

$$\text{Desvio padrão: } \approx 2,7$$

# Solução: encontrando a média, variância e desvio padrão

$$\mu = 16,8 \quad \sigma^2 \approx 7,4 \quad \sigma \approx 2,7$$

- Valores Incomuns: maiores que dois desvios padrão da média
  - $16,8 - 2(2,7) = 11,4;$
  - Junho com 11 dias nublados seria incomum
  - $16,8 + 2(2,7) = 22,2;$
  - Junho com 23 dias nublados seria incomum também



# Exercício

- Em São Francisco, Califórnia, 44% dos dias em um ano apresentam tempo limpo. Encontre a média , variância e desvio padrão para o número de dias limpos durante o mês de maio. Interprete os resultados e identifique valores incomuns.

# Exercício

68

- 10% dos adultos dizem que os biscoitos de flocos de aveia são seus preferidos. Você seleciona 12 adultos aleatoriamente e pergunta qual é o nome do biscoito preferido de cada um deles. Encontre a probabilidade de que o número dos que dizem preferir biscoitos de flocos de aveia seja a) exatamente quatro (R. 0,021), b) no mínimo quatro (R. 0,026) e c) inferior a quatro (R. 0,974).

# Objetivos

## Distribuição de Probabilidade Binomial

- Determinar se o experimento de probabilidade é binomial
- Encontrar probabilidades binomiais usando a fórmula
- Encontrar probabilidades binomiais usando tecnologia e tabela binomial
- Encontrar média, variância e desvio padrão

# MAIS DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADES DISCRETAS

# Objetivos

---

- Como encontrar probabilidades usando a Distribuição Geométrica
- Como encontrar probabilidades usando a Distribuição de Poisson

# Distribuição Geométrica

- Distribuição de Probabilidade Discreta
- Condições:
  - ▣ A tentativa é repetida até que o sucesso ocorra
  - ▣ Tentativas repetidas são independentes umas das outras
  - ▣ Probabilidade de sucesso  $p$  é constante para cada tentativa



# Distribuição Geométrica

73

- A probabilidade de que o primeiro sucesso ocorra na tentativa  $x$

$$P(x) = p * q^{(x-1)} \text{ onde } q = 1 - p$$

# Média, Variância e Desvio Padrão

74

## □ Distribuição Geométrica

$$\mu = E(x) = 1/p$$

$$\sigma^2 = q/p^2$$

# Distribuição Geométrica

Por experiência, você sabe que a probabilidade de venda em um telefonema qualquer é de 0,23. Encontre a probabilidade de que sua primeira venda em um dia qualquer ocorra na quarta ou quinta ligação.



# Distribuição Geométrica

Geométrica com  $p = 0,23$ ,  $q = 0,77$ ,  $x = 4$  ou  $5$

$$P(4) = 0,23(0,77)^{4-1} \approx 0,105003$$

$$P(5) = 0,23(0,77)^{5-1} \approx 0,080852$$



$$P(\text{venda na quarta ou quinta ligação}) = P(4) + P(5)$$

$$P(\text{venda na quarta ou quinta ligação}) = \\ P(4) + P(5) \approx 0,105003 + 0,080852 \approx 0,186$$

# Exercício

77

- Encontre a probabilidade de que sua primeira venda ocorra antes da quarta ligação. R. 0,543

# Distribuição de Poisson

- Distribuição de Probabilidade Discreta
- Condições:
  - Experimento consiste em contar o número de vezes que um evento,  $x$  ocorre em um dado intervalo (tempo, área ou volume)
  - Probabilidade do evento ocorrer é a mesma para cada intervalo
  - O número de ocorrências em um intervalo independe do número de ocorrências em outros intervalos

# Distribuição de Poisson

- Probabilidade de exatamente  $x$  ocorrências em um intervalo

$$P(x) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!}$$

$\mu$  = número médio de ocorrências em um intervalo  
 $\mu = n \cdot p$

# Exercício

## Distribuição de Poisson

A média do número de acidentes por mês em um certo cruzamento é 3. Qual é a probabilidade de que em um mês qualquer ocorram quatro acidentes no local?





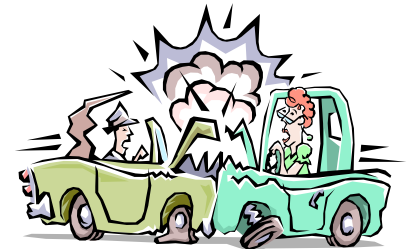
# Exercício

## Distribuição de Poisson

A média do número de acidentes por mês em um certo cruzamento é 3. Qual é a probabilidade de que em um mês qualquer ocorram quatro acidentes no local?

Distribuição de Poisson com  $x = 4$ ,  $\mu = 3$

$$P(x) = \frac{3^4 e^{-3}}{4!} \approx 0,168$$



# Exercício

## Distribuição de Poisson

82

- Qual a probabilidade que mais de quatro acidentes ocorram no cruzamento em um dado mês?  
R. 0,185

# Verifiquem!!!

83

- Tabela para probabilidade de Poisson ( $x$  e  $\mu$ )
- Ferramentas tecnológicas (MINITAB, EXCEL)

# Média, Variância e Desvio Padrão

84

- Distribuição de Poisson

$$E(x) = \sigma^2 = \mu = np$$

# Objetivos

---

- Encontrar probabilidades usando a distribuição geométrica
- Encontrar probabilidades usando a distribuição de Poisson

# Exercício

86

- Um produtor de vidro descobre que 1 em cada 500 itens de vidro está torcido. Encontre a probabilidade de a) o primeiro item de vidro torcido ser o décimo item produzido, b) o primeiro item de vidro torcido ser o primeiro, segundo ou terceiro, c) nenhum dos itens de vidro estar imperfeito. R. 0,002; 0,006; 0,980
- O número médio de pedidos de falência por minuto nos EUA em um ano recente era de cerca de três. Encontre a probabilidade de que a) exatamente cinco negócios peças falência em qualquer minuto, b) no mínimo cinco negócios peças falência em qualquer minuto, c) mais de cinco negócios peças falência em qualquer minuto. R. 0,101; 0,185; 0,084

# Exercício

87

19.  $p = 0.002$

$$(a) P(10) = (0.002)(0.998)^9 \approx 0.002$$

$$(b) P(\text{1st, 2nd, or 3rd part is defective}) = P(1) + P(2) + P(3) \\ = (0.002)(0.998)^0 + (0.002)(0.998)^1 + (0.002)(0.998)^2 \approx 0.006$$

$$(c) P(x > 10) = 1 - P(x \leq 10) = 1 - [P(1) + P(2) + \dots + P(10)] = 1 - [0.020] \approx 0.980$$

21.  $\mu = 3$

$$(a) P(5) = \frac{3^5 e^{-3}}{5!} \approx 0.101$$

$$(b) P(x \geq 5) = 1 - (P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4)) \\ \approx 1 - (0.050 + 0.149 + 0.224 + 0.224 + 0.168) \\ = 0.185$$

$$(c) P(x > 5) = 1 - (P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5)) \\ \approx 1 - (0.050 + 0.149 + 0.224 + 0.224 + 0.168 + 0.101) \\ = 0.084$$

# Exercício

88

- Uma empresa assume que 0,5% de seus pagamentos anuais foram calculados incorretamente. A empresa tem 200 funcionários e examinou os registros da folha de pagamento de um mês. a) encontre a média, a variância e o desvio padrão. Interprete os resultados. b) quantas folhas de pagamento você esperaria ter que examinar antes de encontrar uma folha com erro? R. a) 200; 39,800; 199,5 b) 200



# Exercício

89

28.  $p = 0.005$

$$(a) \mu = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.005} = 200$$

$$\sigma^2 = \frac{q}{p^2} = \frac{0.995}{(0.005)^2} = 39,800$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} \approx 199.5$$

(b) 200

On average 200 records will be examined before finding one that has been miscalculated.  
The standard deviation is 199.5 records.