

1. Introdução

Apresenta-se texto introdutório sobre a teoria de cascas. Utiliza-se abordagem clássica do problema, e são tratados apenas casos específicos de características geométricas e carregamentos mais simples.

Na abordagem clássica da análise estrutural de cascas, é usual dividir a análise em duas etapas, efetuando-se primeiramente equilíbrio da estrutura em regime de membrana, para, em seguida, resolver os erros de compatibilidade com uma teoria mais geral, que leve em conta efeitos de flexão.

O objetivo maior deste texto é fornecer aos alunos uma ideia geral do comportamento estrutural de cascas aplicadas a estruturas de reservatórios e de coberturas.

Apresentam-se também alguns exemplos de uso de programas disponíveis de elementos finitos para análise elástica dessas estruturas.

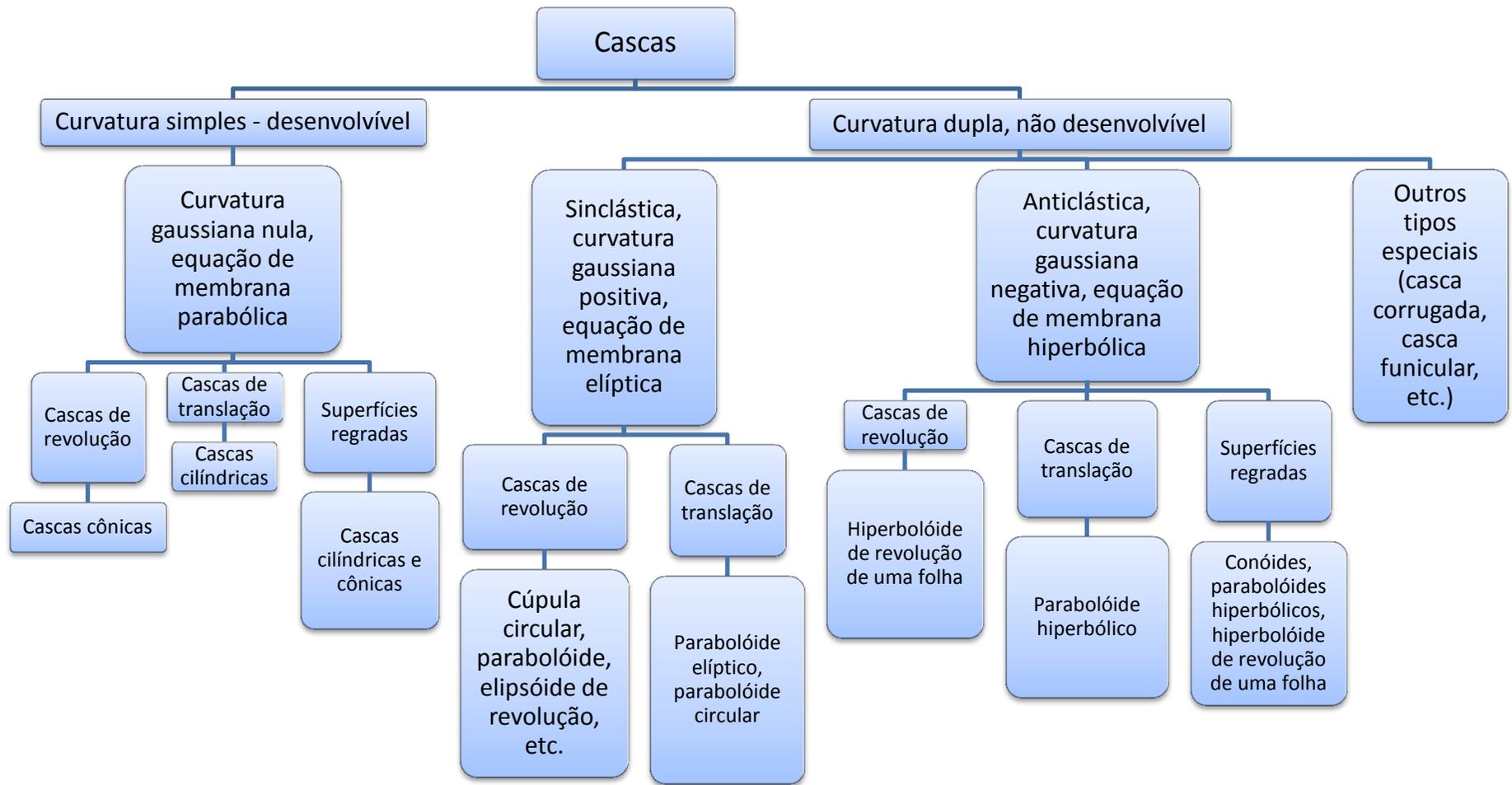
A análise estrutural de cascas com teorias rigorosas é tema muito vasto e complexo e por isso, mesmo com os computadores, é importante que o projetista conheça alguns modelos simplificados. De acordo com Billington (1982) *“The advantage of a simplified analysis is that the designer can spend more time thinking about assumptions, about appropriate forms, and about construction all at the crucial stage of preliminary design”*. Diante desse fato, neste trabalho procura-se também discorrer sobre algumas dessas teorias.

2. Tipos de cascas

Uma casca é uma estrutura de superfície não plana, na qual uma das dimensões – espessura – é muito menor que as outras duas dimensões. Cascas são muito empregadas em estruturas civis, em coberturas e paredes.

Quando se estudam barras, para fins de análise estrutural, a geometria dos elementos é representada pelo eixo. No caso das cascas, utiliza-se a superfície média. Dessa forma, podem-se diferenciar os tipos mostrados na figura abaixo (Ramaswamy, 1968).

Neste trabalho serão tratados apenas alguns tipos de cascas mais usuais, como cascas cilíndricas e cúpulas. Considerando ainda que o objetivo é permitir a aplicação ao projeto de reservatórios e coberturas, os carregamentos considerados também serão alguns tipos mais usuais.



PEF 2502 – Introdução à Teoria das Cascas – I parte

Nas figuras seguintes ilustram-se algumas aplicações de estruturas em casca em obras civis.

Na Figura 1, apresenta-se uma cobertura em casca de concreto armado com dimensões em planta de 25m x 48m.



Figura 1.

Na Figura 2, apresenta-se uma aplicação de casca cilíndrica curta para um viaduto rodoviário.





Figura 2

Na Figura 3, apresenta-se uma casca cilíndrica empregada para fechamento de um poço.

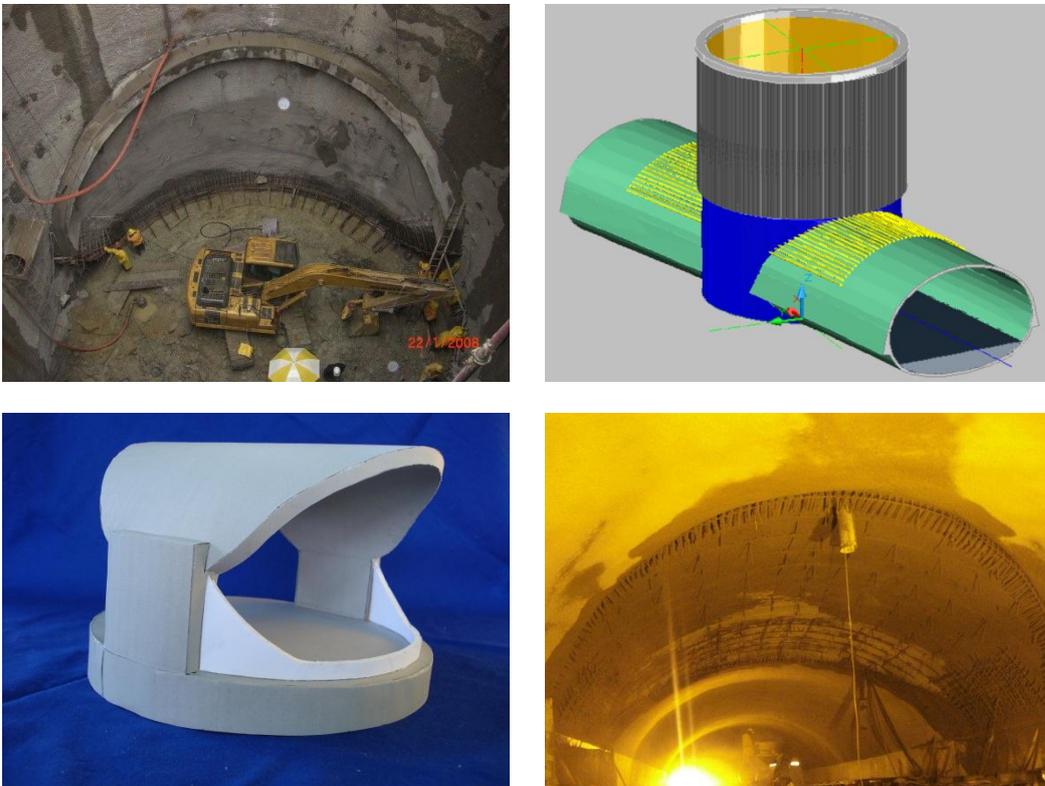


Figura 3

Na Figura 4, apresenta-se um reservatório cilíndrico com capacidade de 15.000 m³, com estrutura em casca, no qual a parede foi executada com chapa de aço.



Figura 4

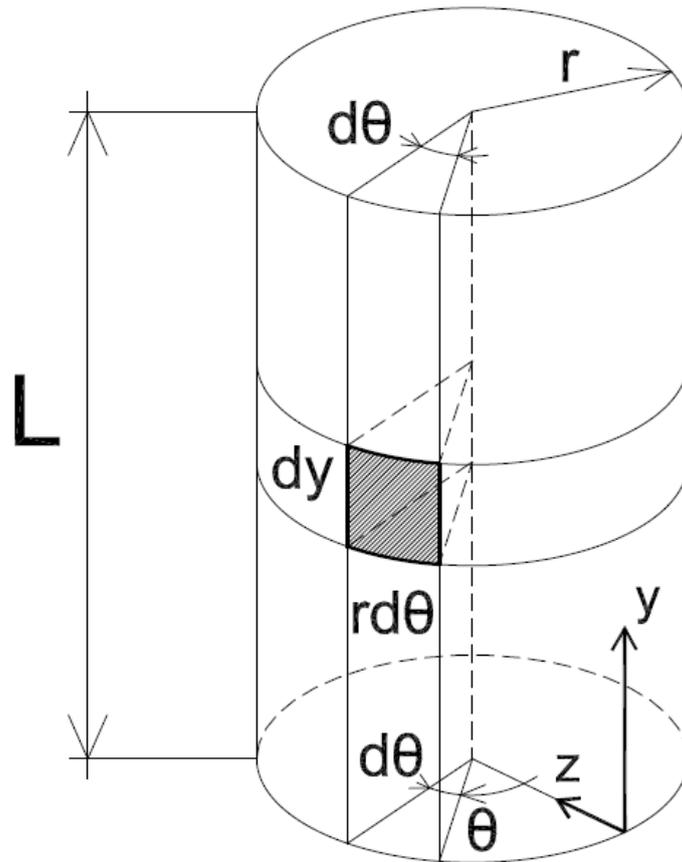
3. Teoria de membrana

3.1. Casca cilíndrica circular

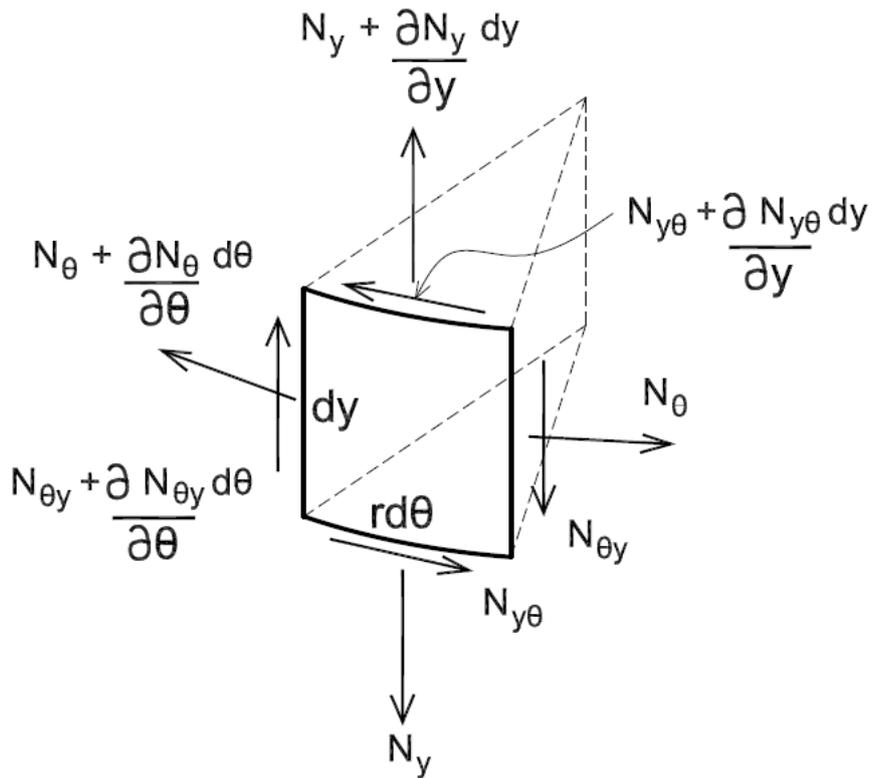
3.1.1. Esforços

Iniciando com uma casca cilíndrica, serão deduzidas as equações de equilíbrio a partir das definições mostradas na figura abaixo, sendo:

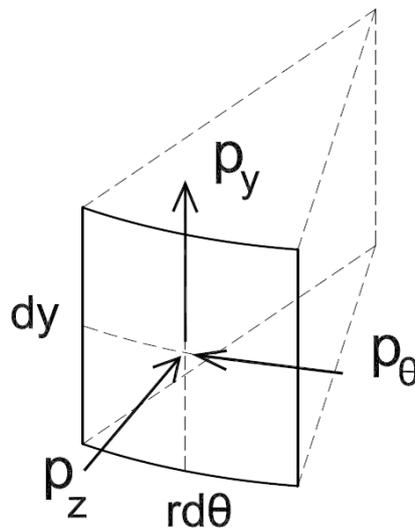
- r = raio da superfície média da casca;
- L = comprimento da casca cilíndrica;
- h = espessura da casca;



Nas figuras a seguir representam-se os esforços internos e as ações externas sobre um elemento diferencial.



Esforços internos de membrana (F/L, p.ex. kN/m)



Ações externas (F/A, p.ex. kN/m²)

As equações de equilíbrio são apresentadas a seguir. Inicialmente, considere-se o equilíbrio de forças na direção circunferencial (θ):

$$(N_\theta + \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} d\theta) dy \cos(d\theta) - N_\theta dy + \frac{\partial N_{y\theta}}{\partial y} dy r d\theta + p_\theta dy r d\theta = 0$$

O termo $\cos(d\theta)$ é necessário porque a tangente é diferente nas duas faces do elemento. Porém, como $d\theta$ é muito pequeno, $\cos(d\theta)$ pode ser assumido igual à unidade. Dessa forma:

$$\frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + r \frac{\partial N_{y\theta}}{\partial y} + p_\theta r = 0$$

Considere-se agora o equilíbrio na direção vertical (y):

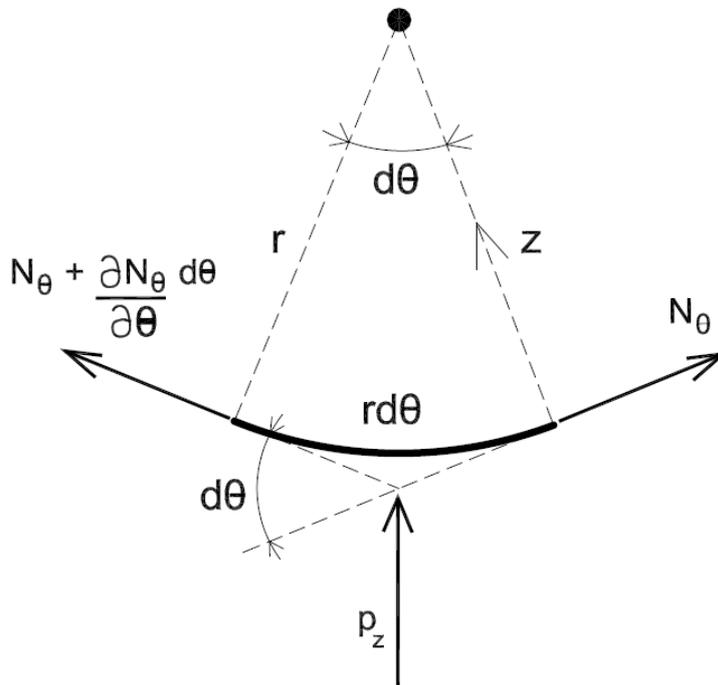
$$\frac{\partial N_y}{\partial y} dy r d\theta + \frac{\partial N_{\theta y}}{\partial \theta} d\theta dy + p_y r d\theta dy = 0$$

O que leva a:

$$r \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{\theta y}}{\partial \theta} + p_y r = 0$$

E, finalmente, considerando-se a direção radial (z), tem-se:

$$(N_\theta + \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} d\theta) dy \sin(d\theta) + p_z dy r d\theta = 0$$



Admitindo que $\sin(d\theta) \approx d\theta$ e desprezando termos de ordem superior envolvendo diferenciais:

$$N_{\theta} + p_z r = 0$$

Observar que a relação $N_{y\theta} = N_{\theta y}$ só é válida se a espessura (h) da casca é muito menor que o raio (r) da sua superfície média. Então, seguindo-se com essa hipótese de que $h \ll r$, o equilíbrio de momentos estaria satisfeito. As três equações de equilíbrio reproduzidas abaixo expressam o equilíbrio estático do elemento diferencial.

$$\frac{N_{\theta}}{r} + p_z = 0$$

$$\frac{\partial N_{\theta}}{\partial \theta} + r \frac{\partial N_{y\theta}}{\partial y} + p_{\theta} r = 0$$

$$r \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{\theta y}}{\partial \theta} + p_y r = 0$$

De acordo com BILLINGTON (1982), essas equações podem ser reescritas da forma como segue, para solução de alguns casos usuais de carregamentos:

$$N_{\theta} = -p_z r \quad (1)$$

$$N_{y\theta} = - \int \left(\frac{1}{r} \frac{\partial N_{\theta}}{\partial \theta} + p_{\theta} \right) dy + f_1(\theta) \quad (2)$$

$$N_y = - \int \left(\frac{1}{r} \frac{\partial N_{\theta y}}{\partial \theta} + p_y \right) dy + f_2(\theta) \quad (3)$$

Nas expressões acima, $f_1(\theta)$ e $f_2(\theta)$ dependem das condições de contorno nas bordas.

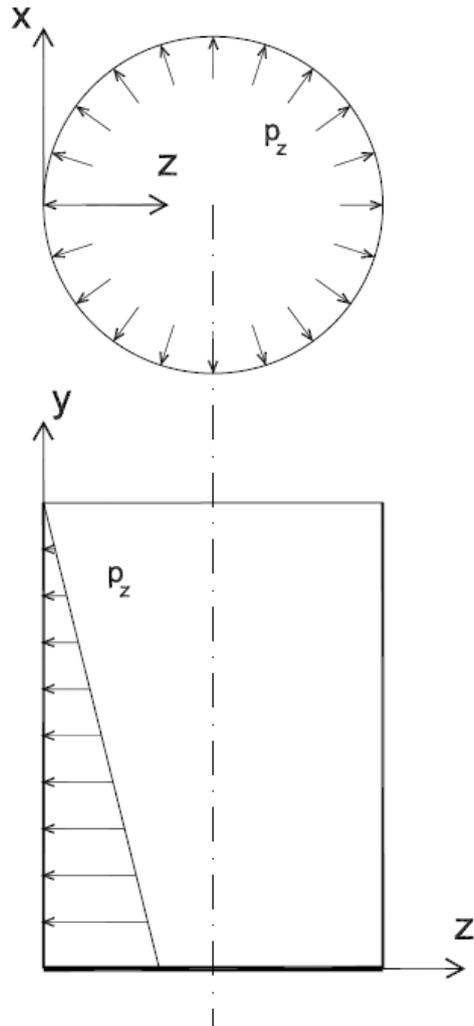
Um primeiro caso a ser analisado é de pressão variável com a profundidade, conforme figura abaixo. Considere-se o caso em que p_z varia somente com “ y ”, de forma linear – pressão hidrostática. Nesta situação:

$$p_z = -\gamma(L - y)$$

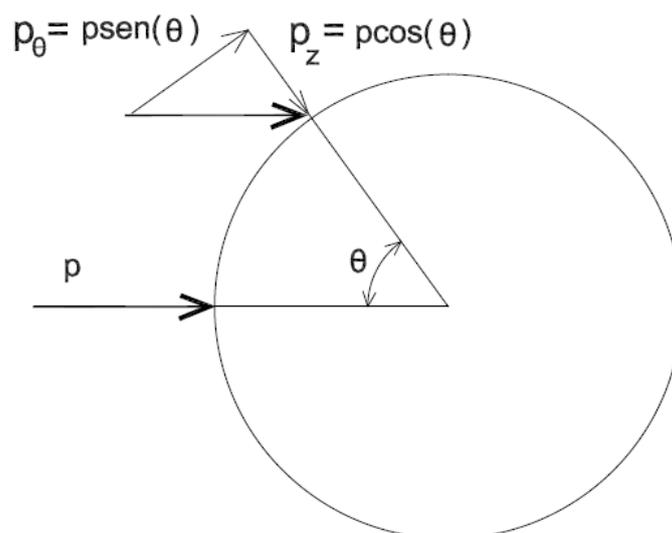
Onde γ é o peso específico do fluido. E, além disso, $p_y = p_{\theta} = f_1(\theta) = f_2(\theta) = 0$, considerando-se a simetria de revolução e as condições de contorno nas bordas. Desse modo, as expressões (1), (2) e (3), resumem-se a:

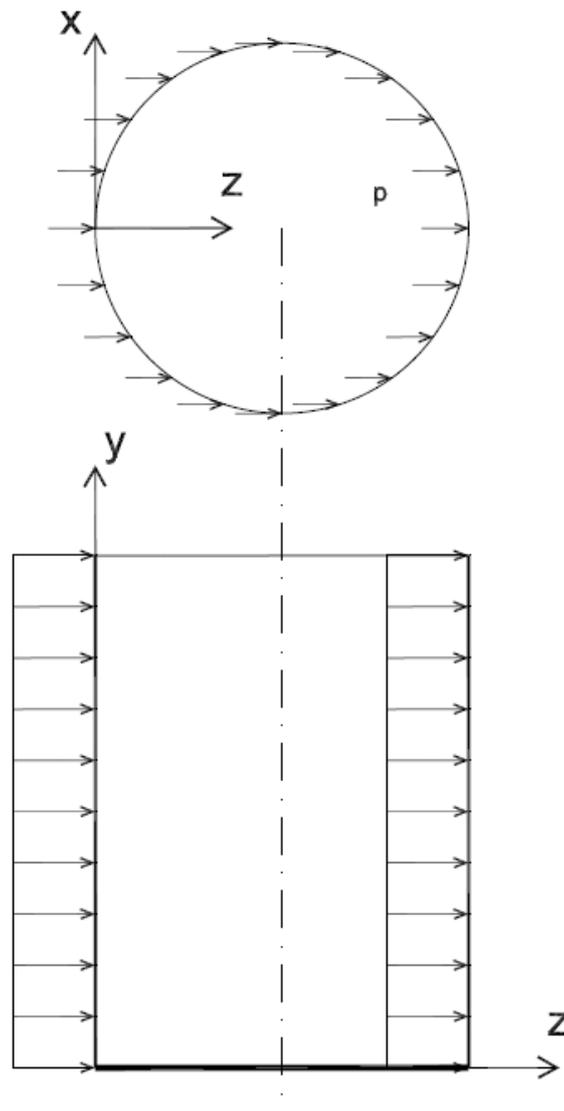
$$N_{\theta} = \gamma(L - y)r \quad (4)$$

$$N_{y\theta} = 0; N_y = 0$$



Outra situação usual é a mostrada nas figuras a seguir, onde p_θ e p_z são conhecidos e diferentes de zero e p_y é nulo.





Nesta situação, que pode ser devida à ação da gravidade, aplicando-se as expressões (1), (2) e (3), chega-se a partir da Eq.(1) a:

$$N_{\theta} = -pr \cos \theta$$

$$\frac{\partial N_{\theta}}{\partial \theta} = pr \sin \theta$$

Inserindo o resultado na Eq.(2), tem-se:

$$N_{y\theta} = - \int \left(\frac{1}{r} pr \sin \theta + p \sin \theta \right) dy + f_1(\theta) = -2p y \sin \theta + f_1(\theta)$$

Em $y=L$, tem-se $N_{y\theta}=0$, daí:

$$f_1(\theta) = 2pL \sin \theta$$

E, então:

$$N_{y\theta} = 2p(L - y)\text{sen}\theta \quad (5)$$

Derivando-se a expressão (5) em relação à θ , tem-se:

$$\frac{\partial N_{y\theta}}{\partial \theta} = 2p(L - y)\text{cos}\theta$$

E, a partir da Eq.(3), chega-se a:

$$N_y = - \int \frac{1}{r} 2p(L - y)\text{cos}\theta dy + f_2(\theta)$$

$$N_y = - \frac{2p}{r} \left(Ly - \frac{y^2}{2} \right) \text{cos}\theta + f_2(\theta)$$

Aplicando a condição de contorno, em $y=L$ $N_y=0$, encontra-se $f_2(\theta)$:

$$f_2(\theta) = \frac{p}{r} L^2 \text{cos}\theta$$

E, finalmente:

$$N_y = \frac{p}{r} (L - y)^2 \text{cos}\theta \quad (6)$$

BIBLIOGRAFIA

BILLINGTON, D. P. Thin shell concrete structures. New York, McGraw-Hill, 1982.

RAMASWAMY, G. S. Design and construction of concrete shell roofs. New York, McGraw-Hill, 1968.