

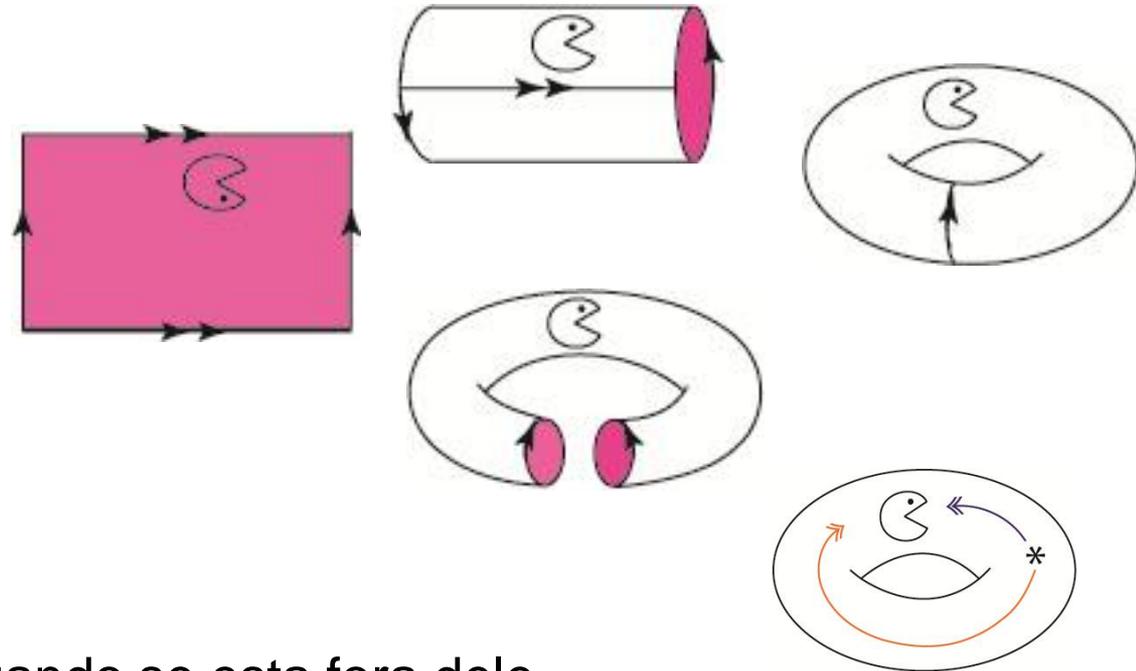
Para além da terceira dimensão

Ton Marar

SME

ICMC-USP

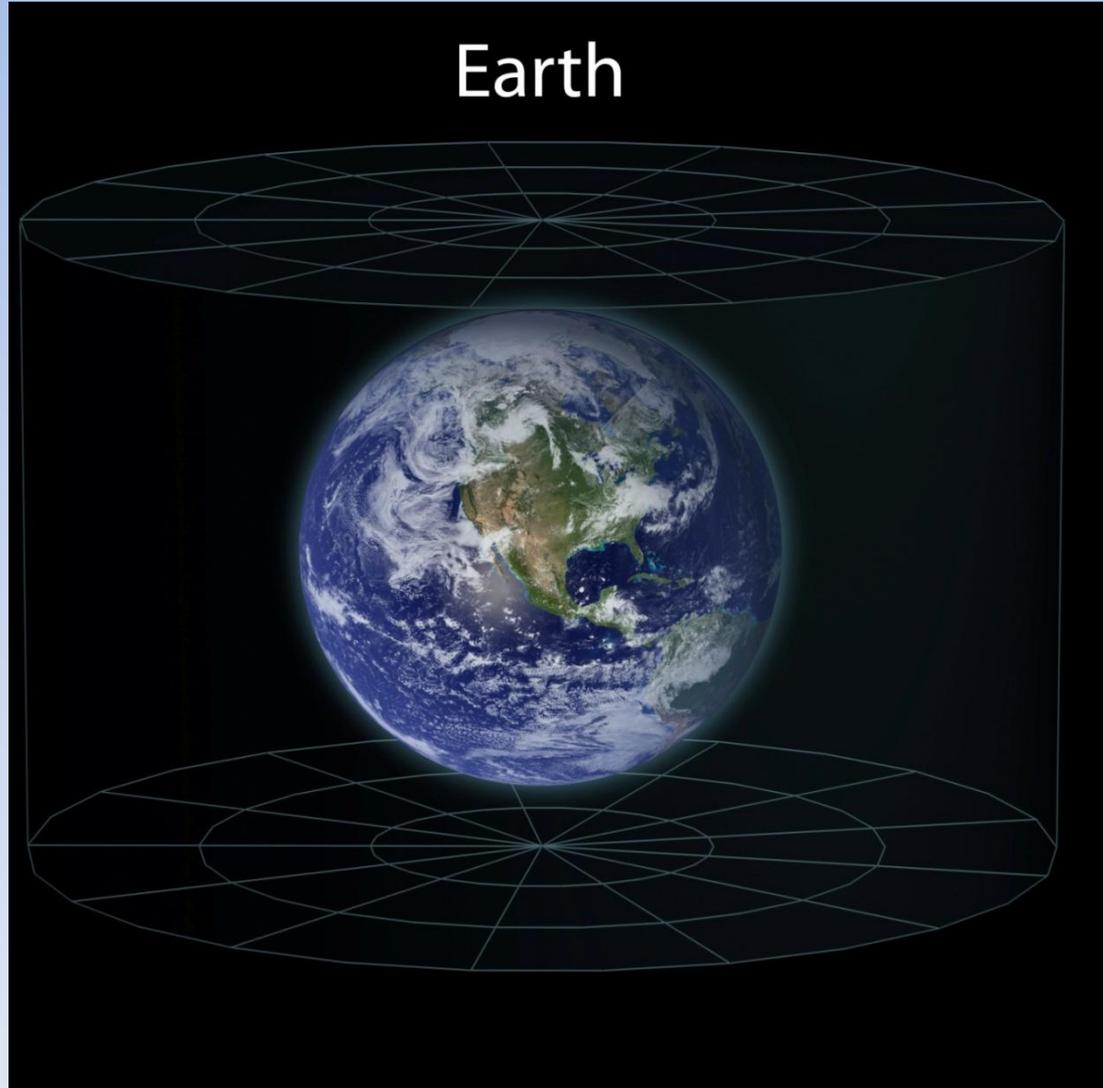
A percepção geométrica do universo no qual se vive é muito complicada.



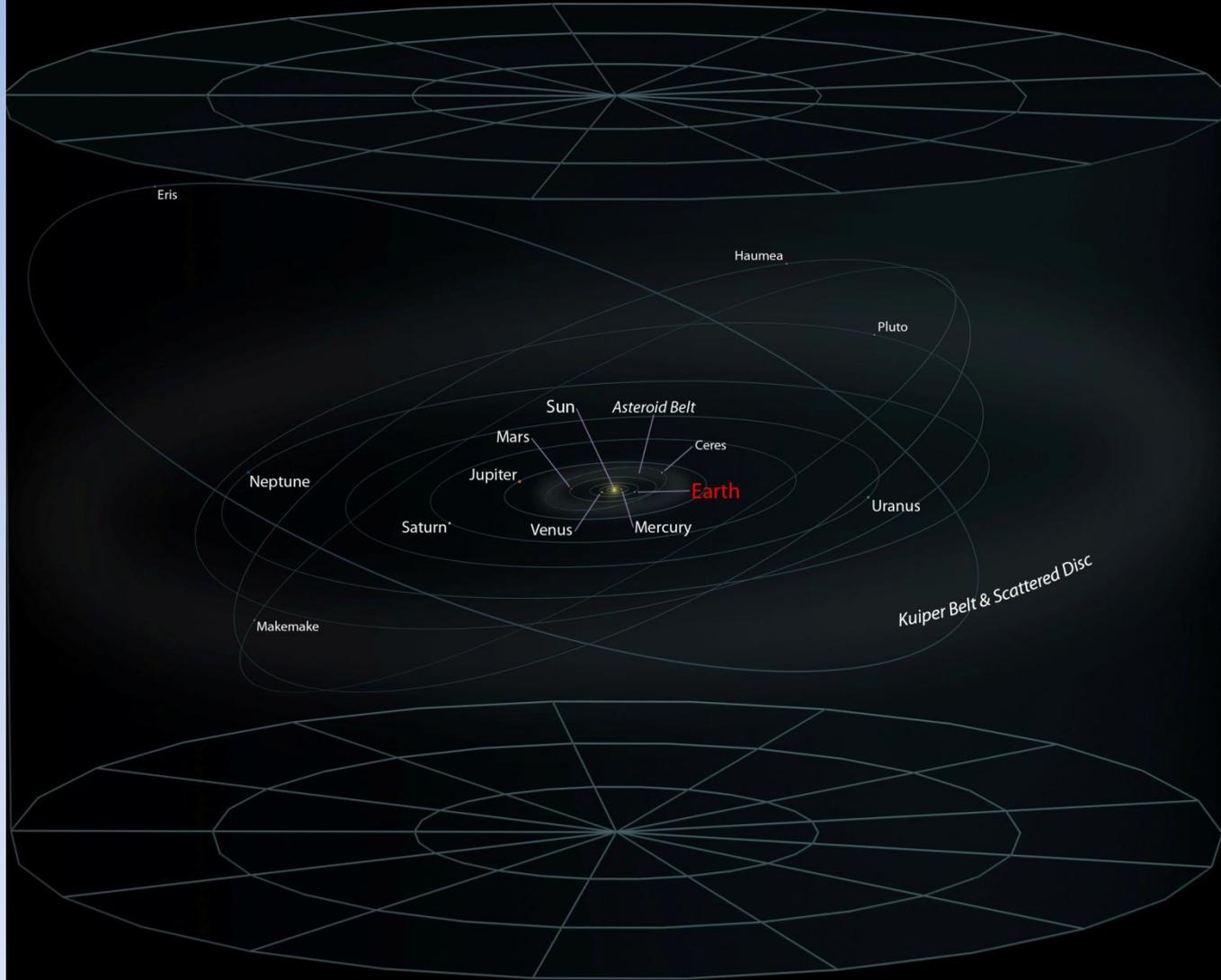
É mais fácil apreciar algo quando se está fora dele

Quando o astronauta Yuri Gagarin (1934-1968) foi lançado ao espaço em 1961 na nave Vostok 1 e pode ver não só o formato, mas também a cor do planeta, exclamou: *A Terra é azul!*

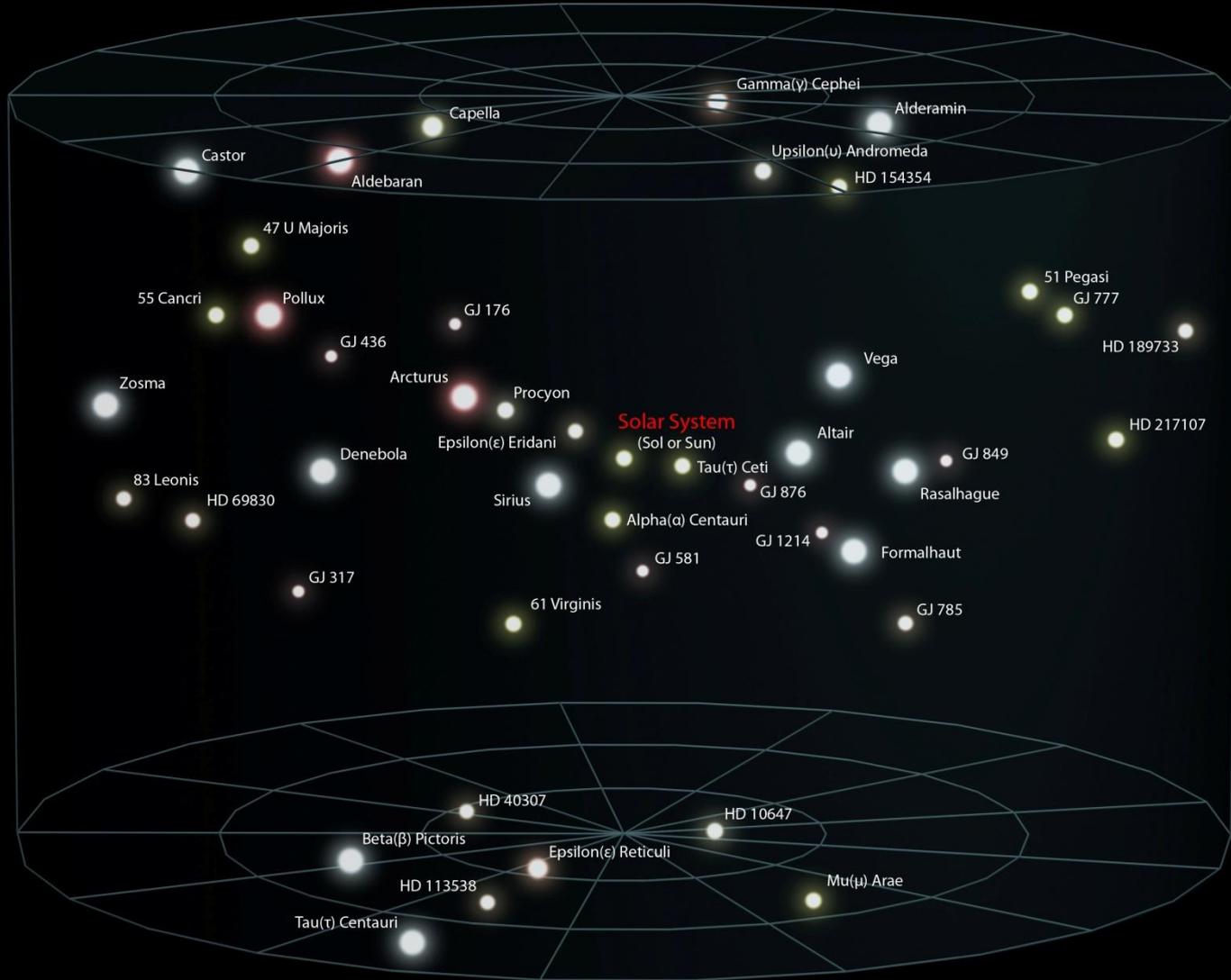
Nosso planeta de formato *esférico* pertence a um sistema solar e, como outros planetas, tem órbita *elíptica em torno do sol*.
Nosso sistema solar faz parte da via Láctea, uma galáxia que por sua vez ...



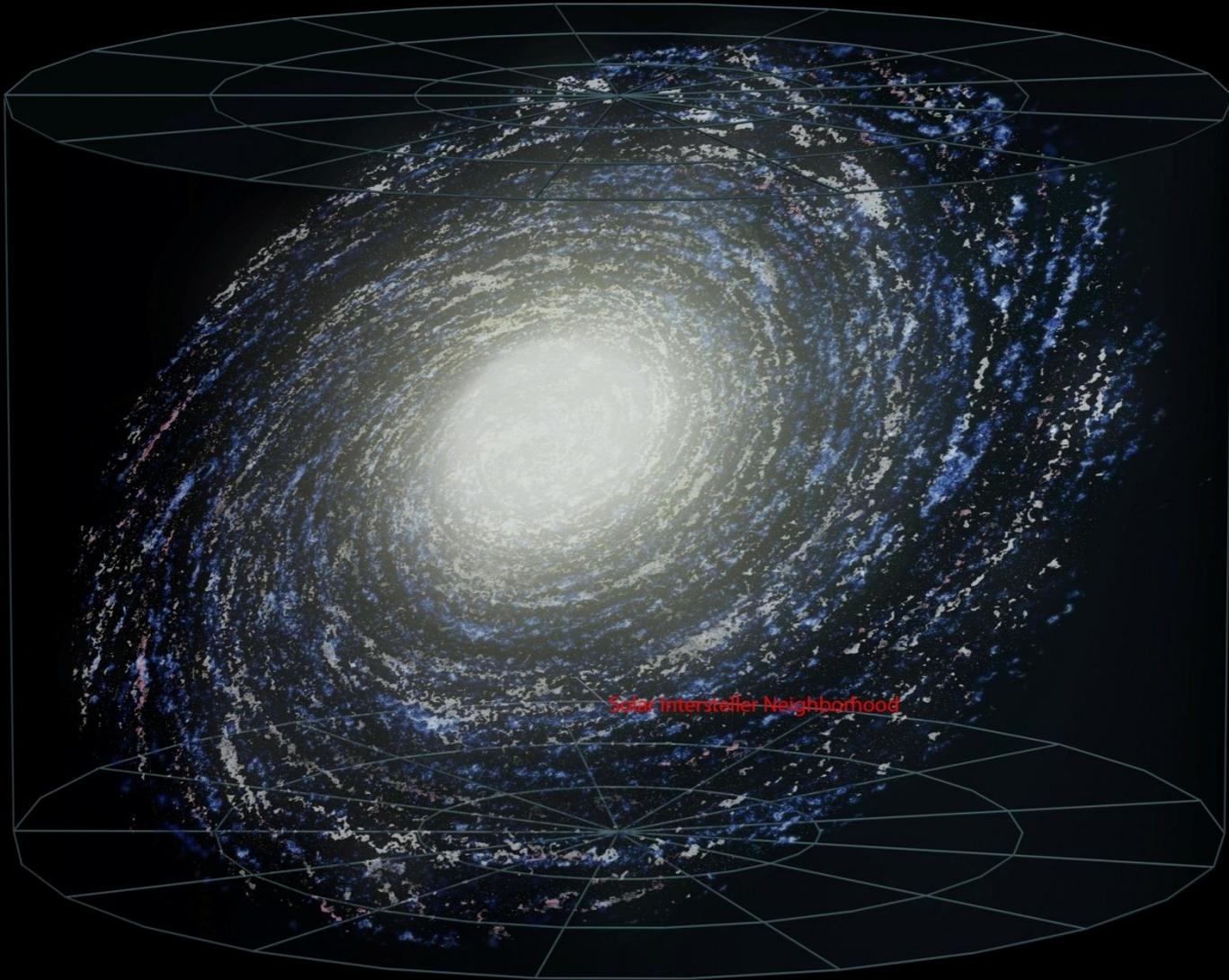
Solar System



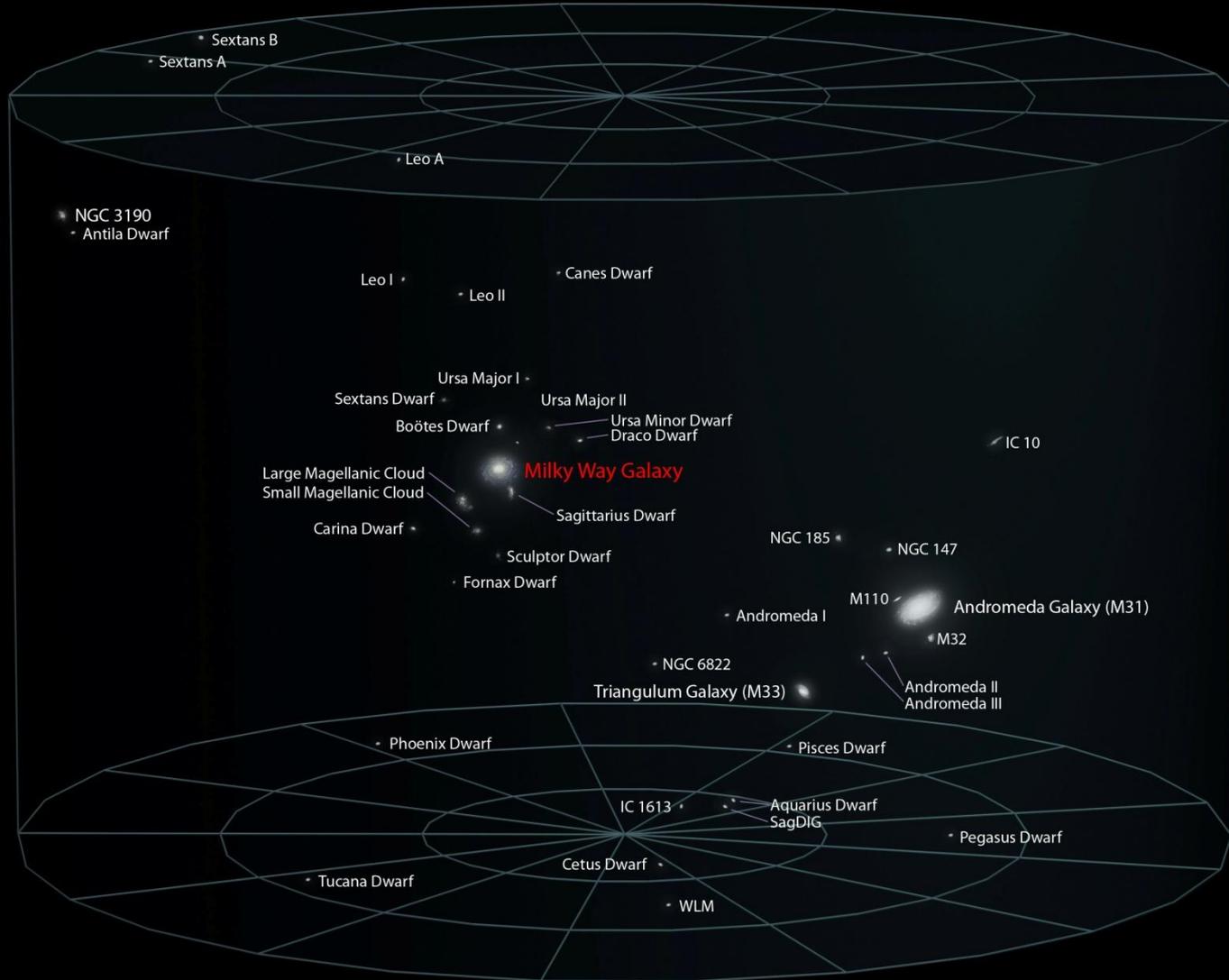
Solar Interstellar Neighborhood



Milky Way Galaxy



Local Galactic Group



Vivemos em um universo bastante complexo e não existe a menor chance de sairmos dele para então apreciarmos o seu formato, como fez Gagarin com o nosso planeta.

Teremos que *deduzir* esse formato.

A passagem de conceitos matemáticos para modelos físicos e vice-versa é motivo de grandes discussões lógicas e filosóficas.

Por exemplo, conceitualmente uma esfera é o conjunto dos pontos do espaço tridimensional equidistantes (raio) de um ponto (centro).

Quando dizemos que a Terra é esférica, queremos dizer que a esfera conceitual descreve bem o aspecto físico do nosso planeta.

Nossa experiência no mundo sugere que para cima / para baixo, para a direita / para a esquerda e para frente / para trás são as três direções perpendiculares que compõem todos os nossos deslocamentos.

Portanto, concluímos que o universo é tridimensional, salvo melhor juízo.

Qual seria o seu formato?

Para deduzirmos qual é o formato do universo, seria bom começar com a lista de todos os possíveis formatos de objetos tridimensionais.

Uma vez de posse desta lista, evidências físicas devem excluir certos casos e ajudar na solução deste grande mistério.

Tal como fizemos com o mundo bidimensional de pac-man, se imaginarmos nosso universo tridimensional contido em um espaço de dimensão mais alta, poderíamos tentar *enxergá-lo* desde lá.

Espaços para além da terceira dimensão!

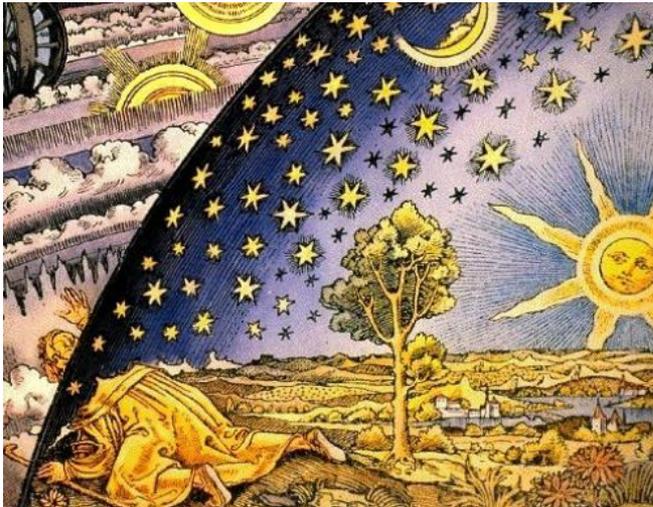
É claro que *enxergar* em um espaço de dimensão 4 não será a mesma experiência que temos no nosso mundo físico tridimensional: reflexão de luz que atinge nossa retina.

Será um enxergar intelectual, em outras palavras, a apreciação de uma representação.

Na geometria, mais especificamente na *topologia*, desde 1920 temos a lista dos possíveis formatos de objetos bidimensionais; para os tridimensionais ainda não temos, *mas falta pouco*.



Seria o universo, onde esta mergulhada nossa galáxia, infinito? Se for finito não deve ter borda, pois senão o que estaria para além da borda?

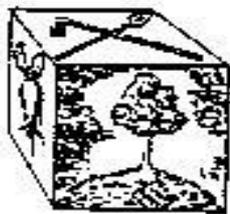
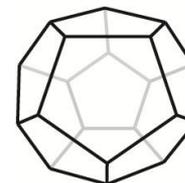
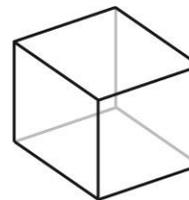
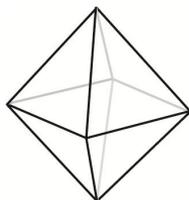
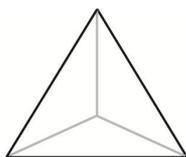


O grego Arquitas (428AC-347AC) foi o primeiro a argumentar que o universo tem que ser infinito pois, do contrário, segundo ele, ao chegar no *fim* do mundo, poderíamos esticar o braço para fora e o fim do mundo teria que ser expandido indefinidamente.

Teoria do *big bang* da Grécia antiga

Platão 427AC-347AC

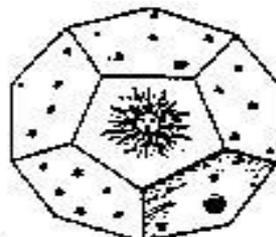
Timeu Os cinco poliedros regulares



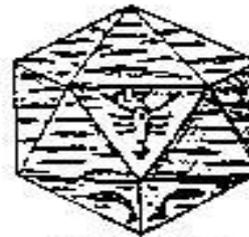
Cubo
Terra



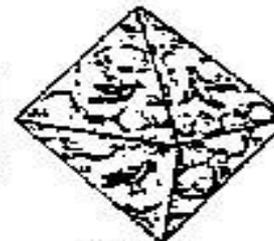
Tetraedro
Fogo



Dodecaedro
O Cosmos



Icosaedro
Água



Octaedro
Ar

Um dos problemas com o argumento de Arquitas é que ele assume a existência de *um fim do mundo*, de uma borda.

Ele ignora que é possível conceber um universo tridimensional finito e sem borda.

Neste caso, o argumento de Arquitas não se sustenta.

Em um universo finito e sem borda é possível, viajar sempre na mesma direção e, depois de muito tempo, retornar ao ponto de partida.

Para nós, os objetos tridimensionais limitados e sem borda, que denominaremos *hipersuperfícies*, são de difícil visualização.

Modelos de hipersuperfícies vivem em espaços de dimensão alta, no mínimo uma dimensão a mais que a do nosso mundo físico.

Nossa percepção de fenômenos que ocorrem em tais espaços *esotéricos* tem que ser ampliada para termos algum entendimento da geometria das hipersuperfícies.

25 de agosto 2016



Earth-sized planet around nearby star is astronomy dream come true
Planet orbiting Proxima Centauri is likely to be the focus of future interstellar voyages.

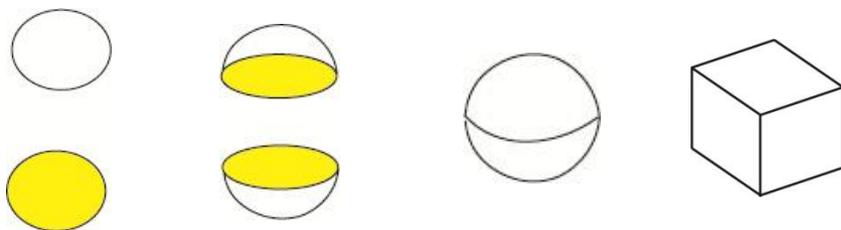
In 2012, a *Nature* paper reported that an Earth-mass planet orbited Alpha Centauri B. That result has now mostly been dismissed, but exoplanet specialists say the Proxima claim is more likely to hold up.

Analogias com espaços de dimensão mais baixa podem ajudar na nossa percepção de espaços de dimensão alta.

Por exemplo, uma esfera no espaço de dimensão 4, chamada *hiperesfera*, pode ser entendida por analogia com a esfera tradicional, que vive no espaço tridimensional.

Construção da esfera

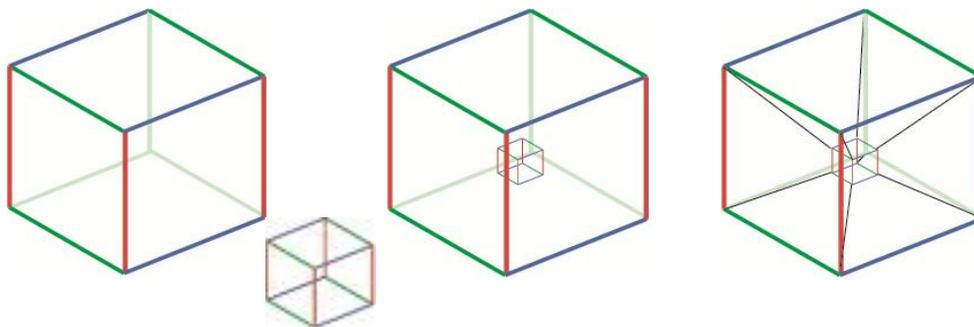
Duas regiões bidimensionais com borda unidimensional



Esfera obtida da identificação das bordas

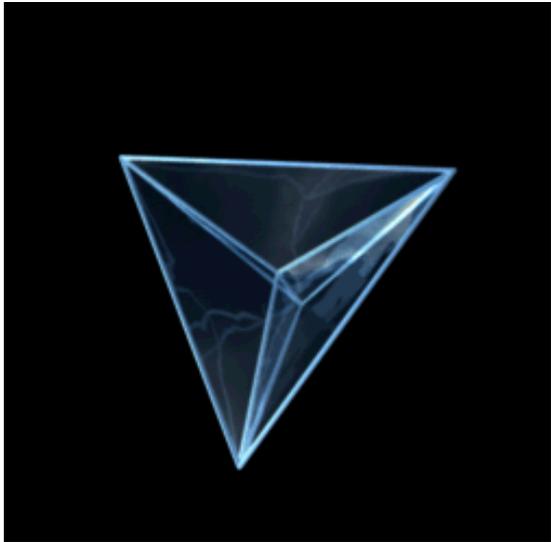
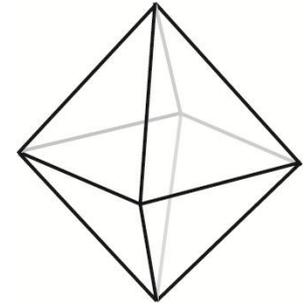
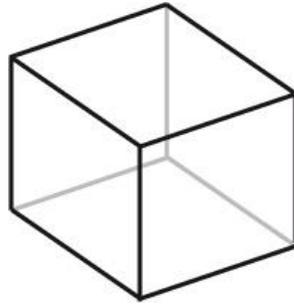
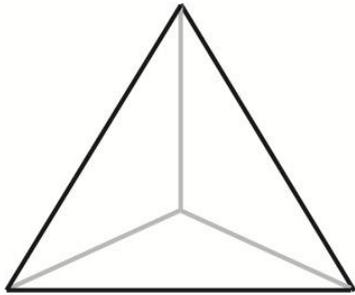
Construção da hiperesfera

Duas regiões tridimensionais com borda bidimensional

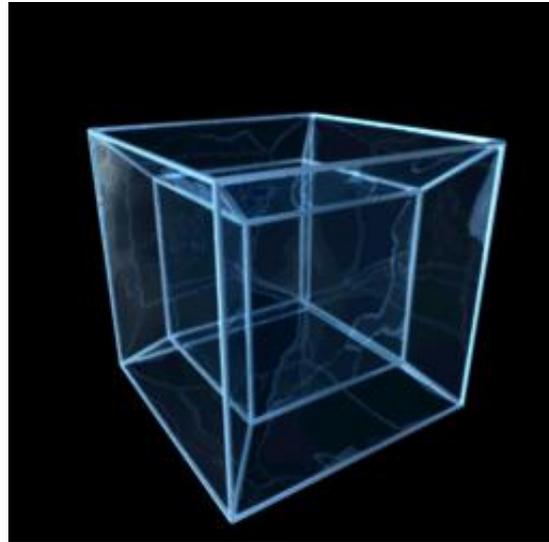


Hipercubo ou Tesseracto

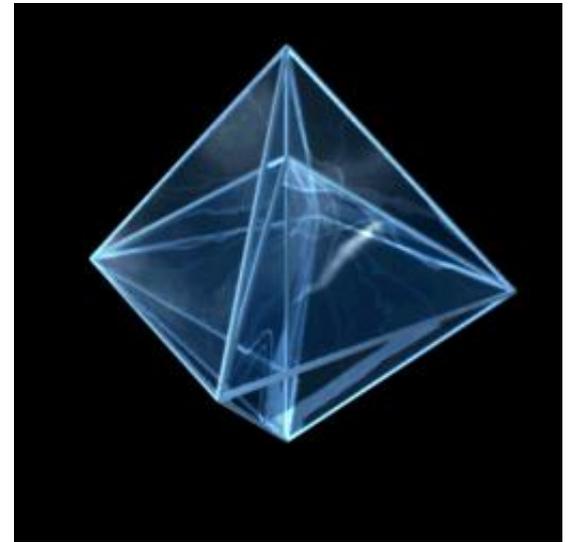
Hiperesfera obtida da identificação das bordas



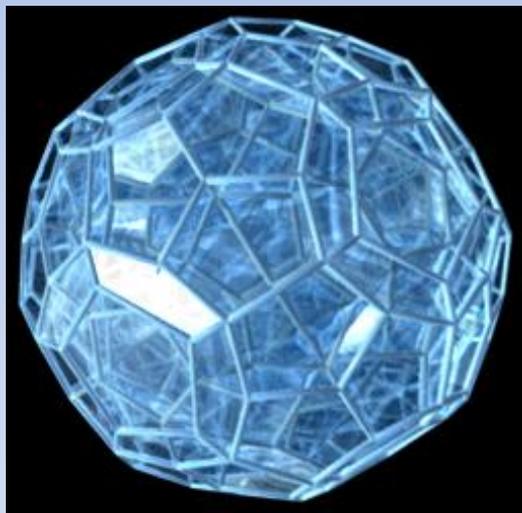
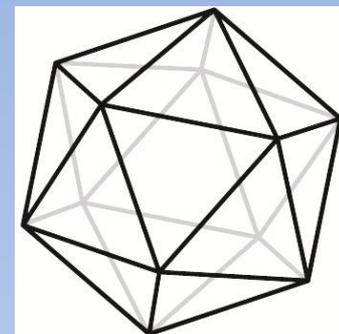
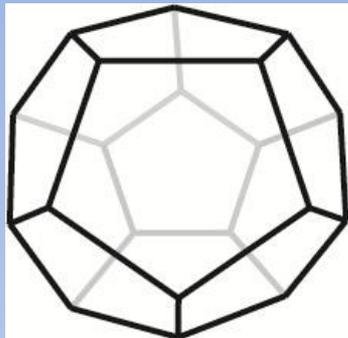
5-cell



8-cell



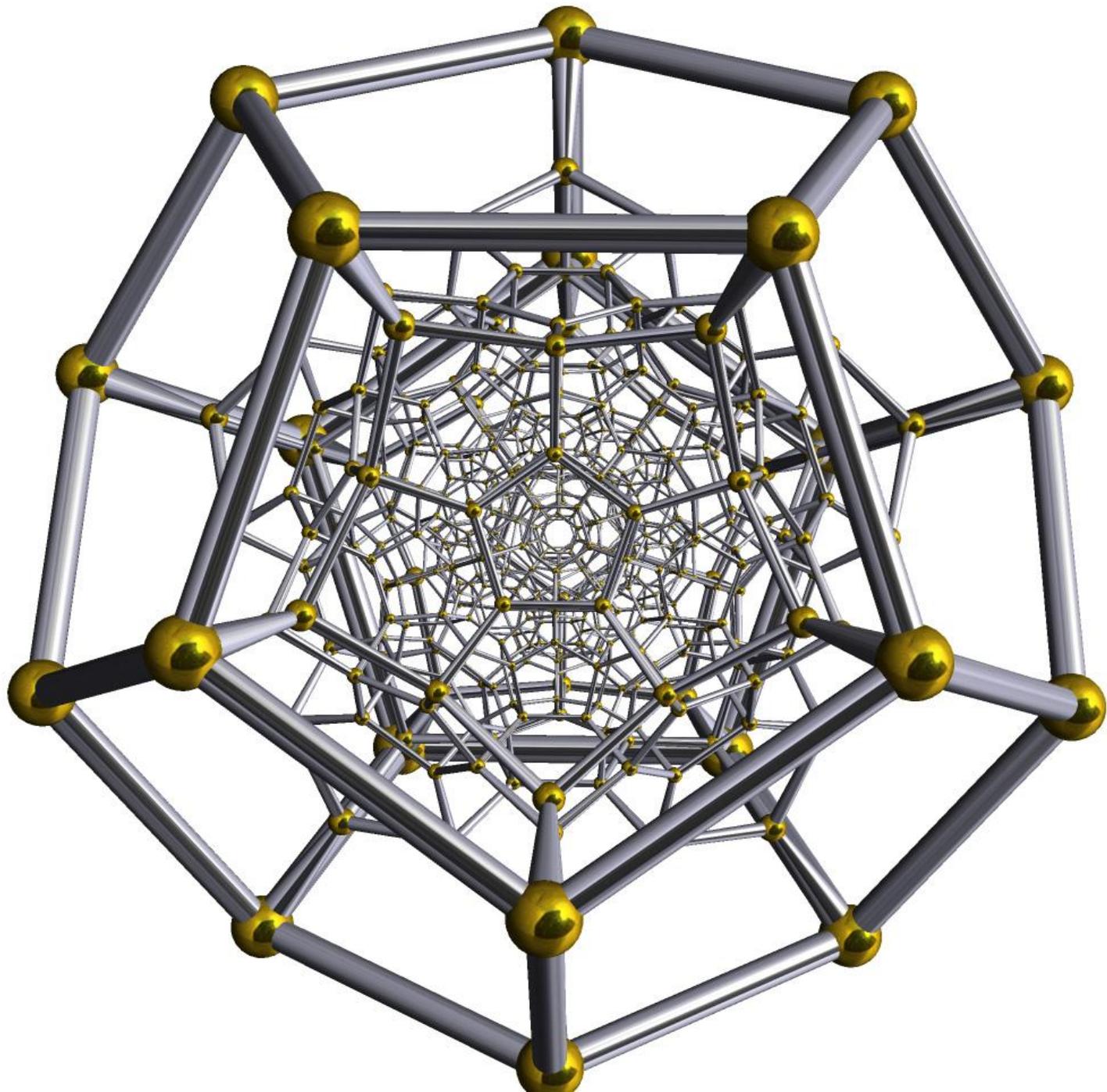
16-cell

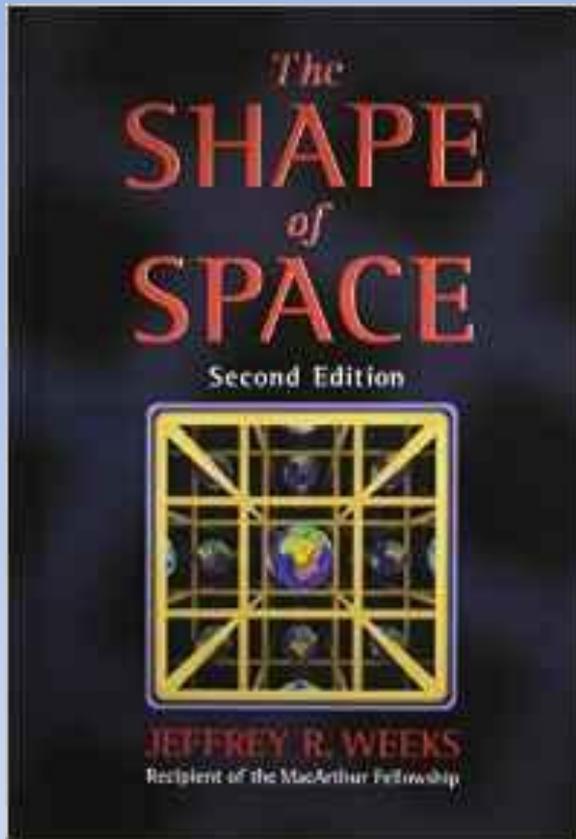


120-cell



600-cell





[The shape of the universe](#)

O debate sobre a possível *existência de espaços de dimensão maior que três é bastante* antigo. Aristóteles (385AC-322AC) negava tal possibilidade e muitos matemáticos e filósofos *demonstraram isso*.

É longa a lista de incrédulos:

C. Ptolomeu (90AD-168AD), G. Leibniz (1646-1716), I. Kant (1724-1804), para citar apenas alguns famosos que formularam *demonstrações bastante simplórias*, misturando Deus e a lei do inverso do quadrado da distância.

Na bíblia é mencionada uma dimensão extra:

...e perfeitamente compreender, com todos os santos, qual seja a largura, e o comprimento, e a altura, e a profundidade ..., Efesios 3:18.

Em física é comum decompor espaços de dimensão $4 = 3 + 1$: *três dimensões* localizam um corpo no espaço e a quarta dimensão resta a ser interpretada.

Um dos primeiros registros desta interpretação foi apresentado por Henry More (1614-1687), teólogo da Universidade de Cambridge, colega de Isaac Newton (1642-1726).

Para More, a quarta dimensão é o lugar da alma.

Outra interpretação é a quarta dimensão temporal em mecânica que foi introduzida pelos franceses D'Alembert (1717-1783) e Lagrange (1736-1813).

Geometricamente não há nada de espetacular na ideia de espaços de dimensão maior que três. Esses espaços de dimensão alta são tão abstratos quanto os espaços de dimensão um, dois ou três.

Representação de espaços n dimensionais

De 0D para 1D

Deslizando o **ponto** numa dada direção



De 1D para 2D

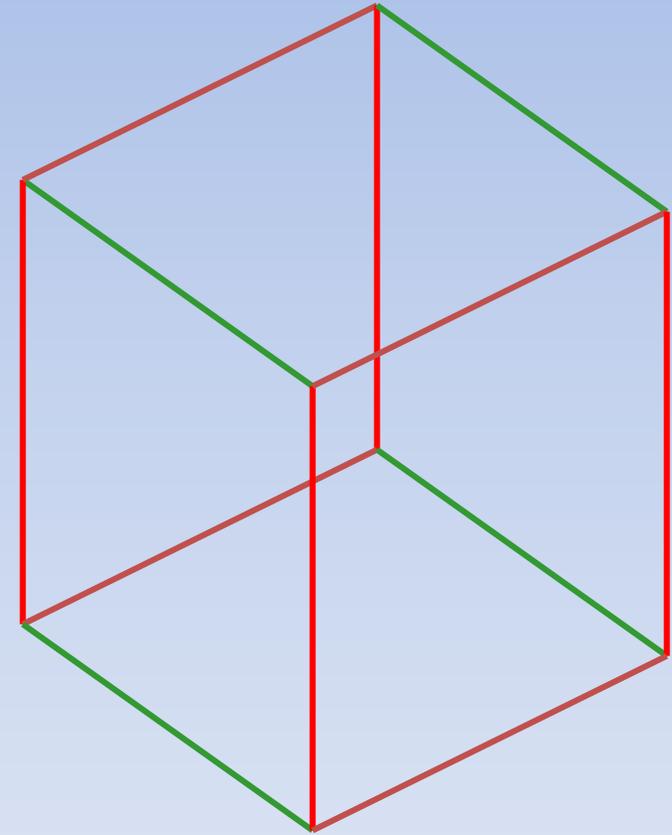
Deslizando o **segmento** numa direção **perpendicular**



quadrado

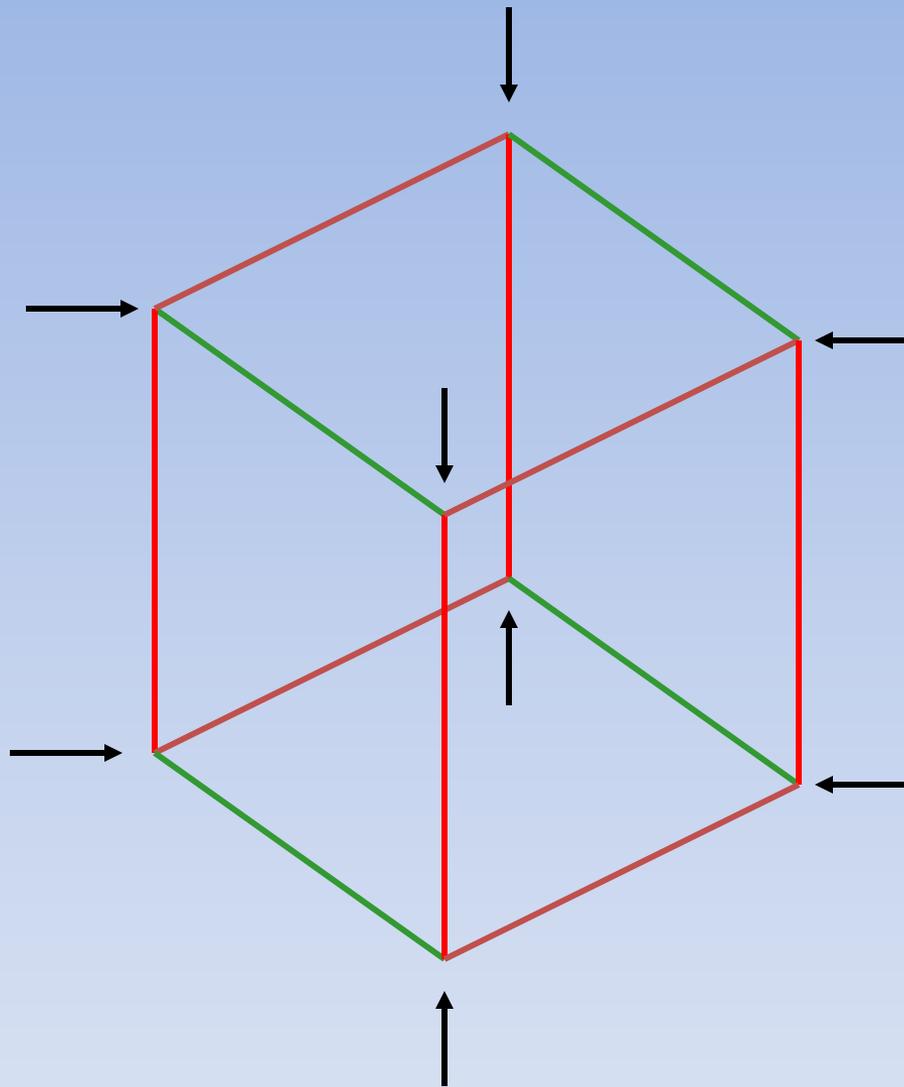
De 2D para 3D

Deslizando o **quadrado** numa direção **perpendicular**

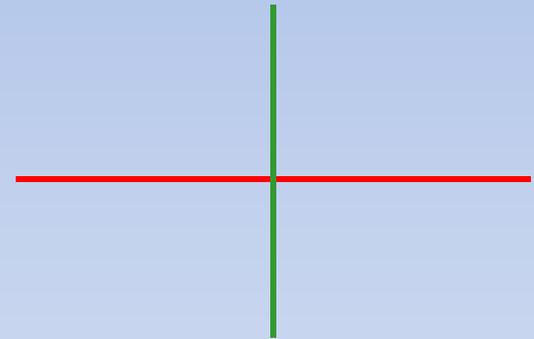


cubo

Três segmentos, dois a dois perpendiculares em cada vértice



Mentira!



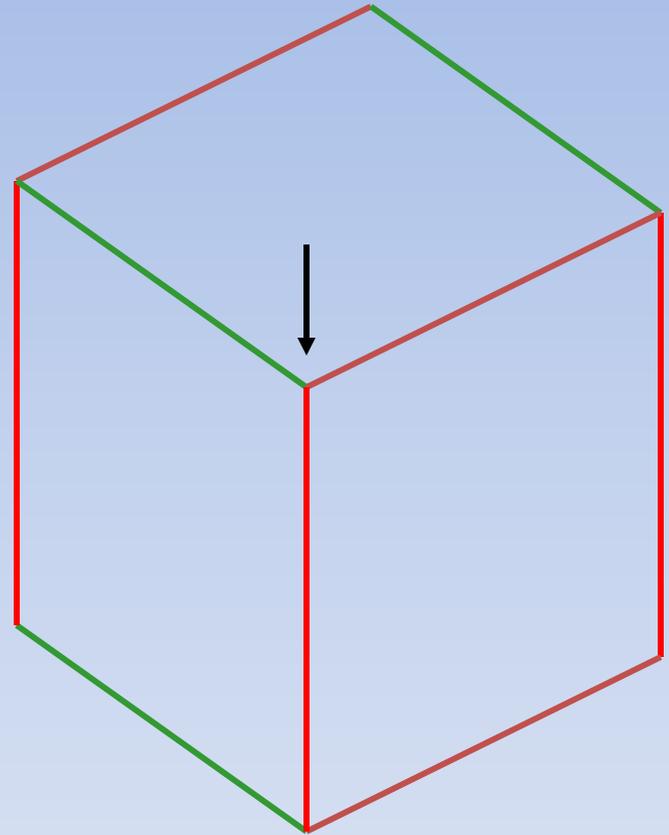
No plano, em cada ponto, no máximo dois segmentos perpendiculares

É necessário um acordo entre o que é desenhado e o que é observado

Um hexágono, aparentemente plano

Um cubo ?

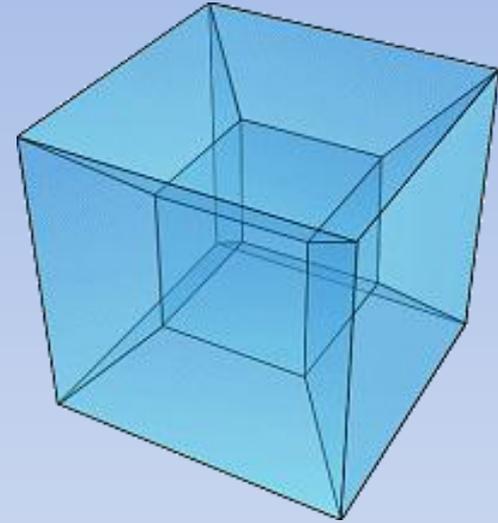
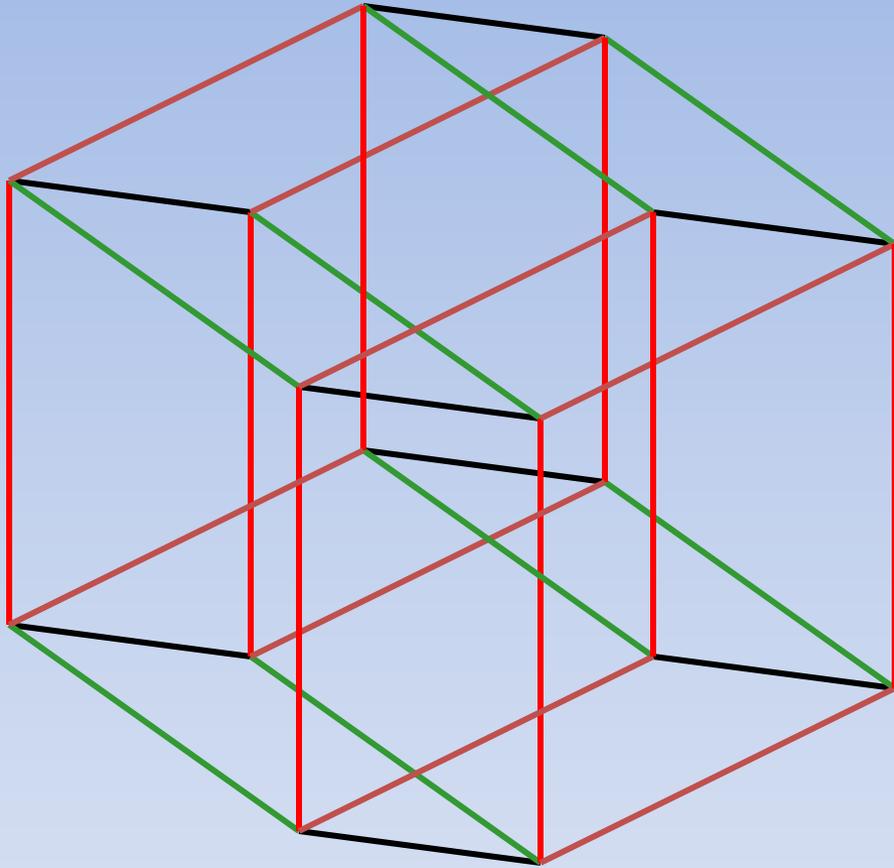
O vértice indicado está para fora ou para dentro ?



Em matemática, o desenho representa exatamente aquilo que eu quero que ele represente, nem mais nem menos

De 3D para 4D

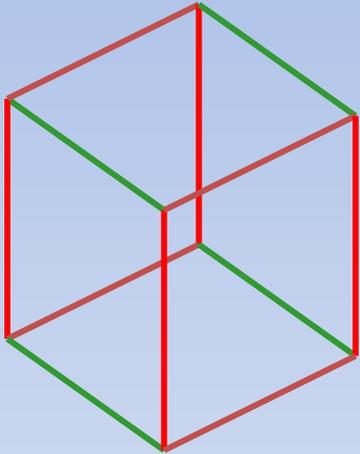
hipercubo



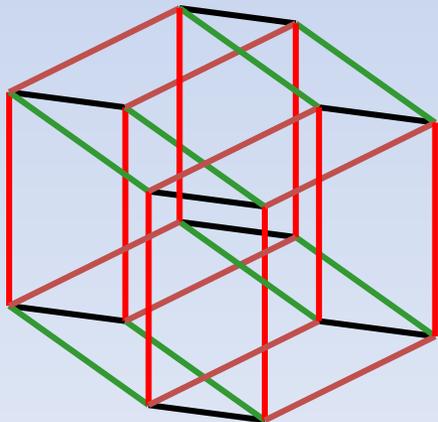
Deslizando o cubo numa direção perpendicular



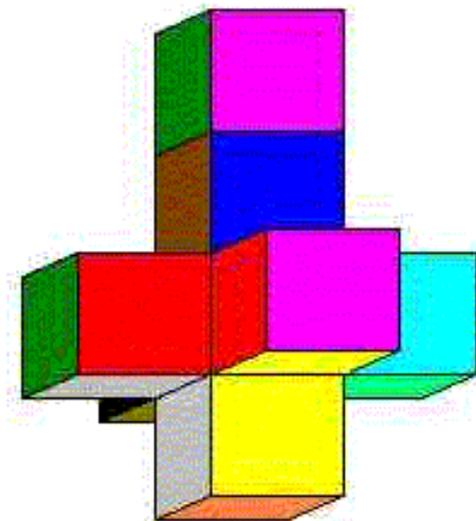
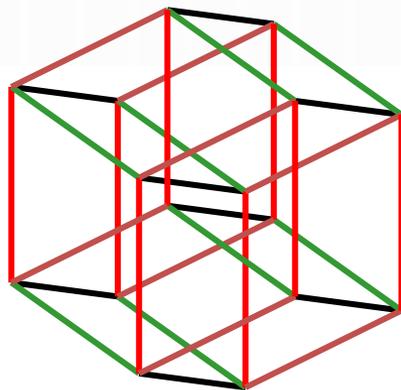
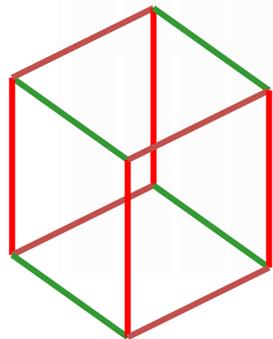
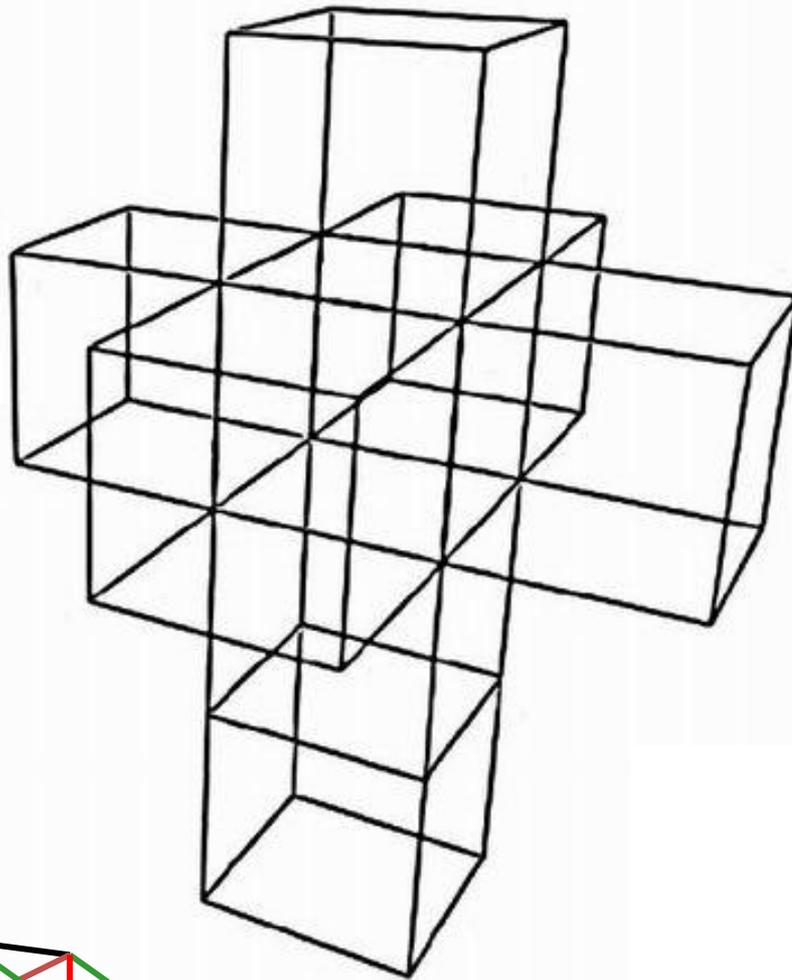
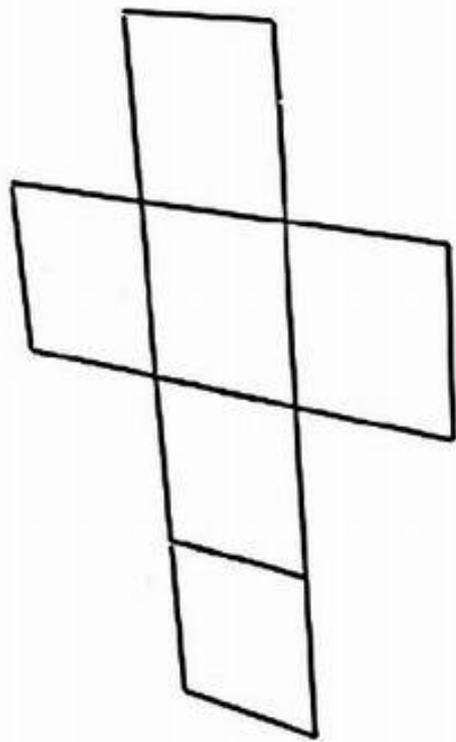
O quadrado encerra uma porção do espaço 2D

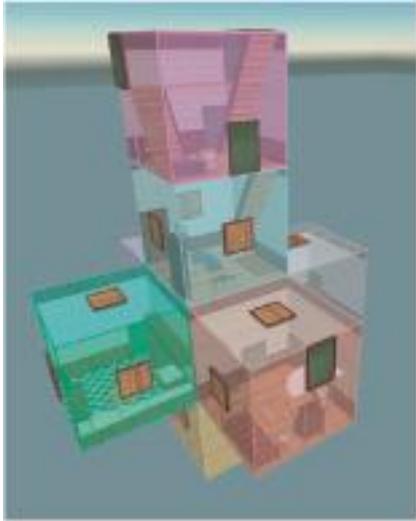


O cubo encerra uma porção do espaço 3D



O hipercubo encerra uma porção do espaço 4D





Robert Heinlein

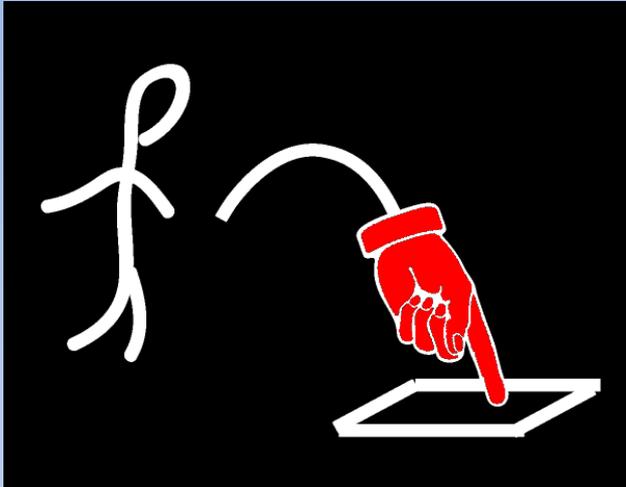


Magritte

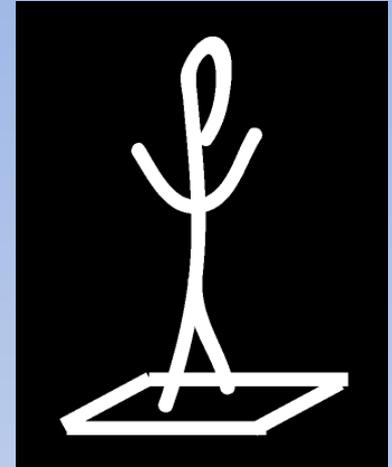


Salvador Dali

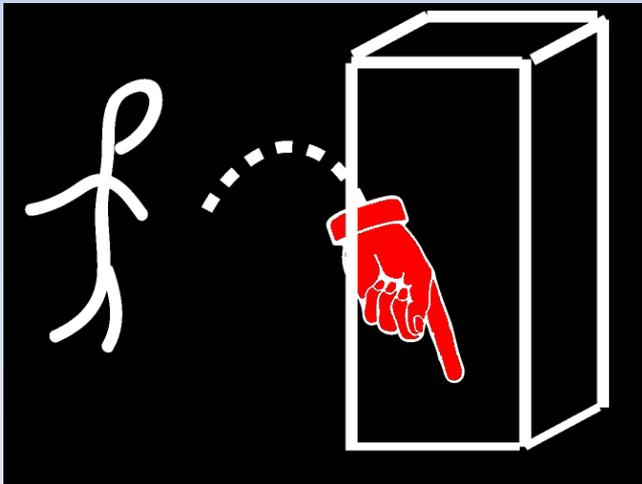
And he built a crooked house



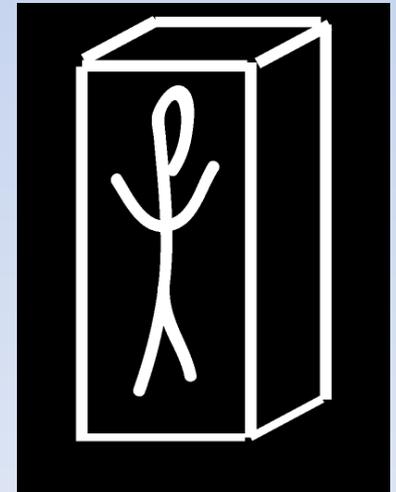
Usando a terceira dimensão podemos *entrar* numa região 2D limitada sem tocar na borda unidimensional



E vice-versa

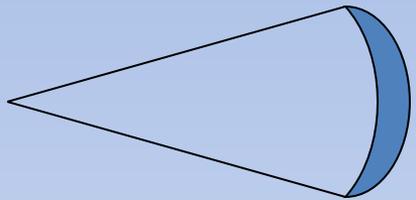


Usando a quarta dimensão podemos *entrar* numa região 3D limitada sem tocar na borda bidimensional

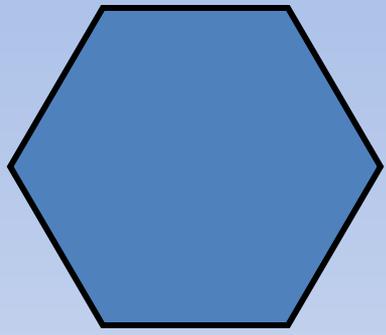


Sob o ponto de vista da terceira dimensão, qualquer região 2D fechada, está aberta.

Olho 3D vê o interior

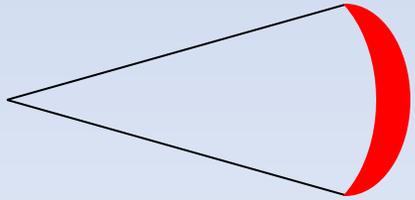


Região 2D fechada



Sob o ponto de vista da quarta dimensão, qualquer região 3D fechada, está aberta.

Olho 4D vê o interior

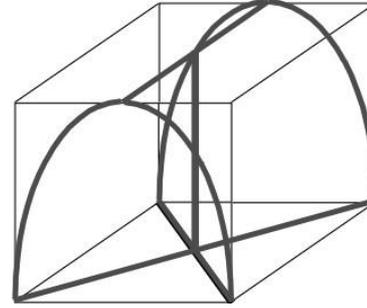
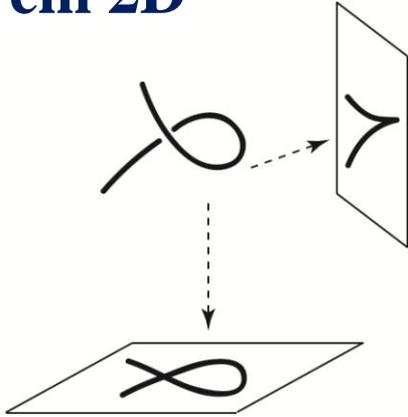


Região 3D fechada

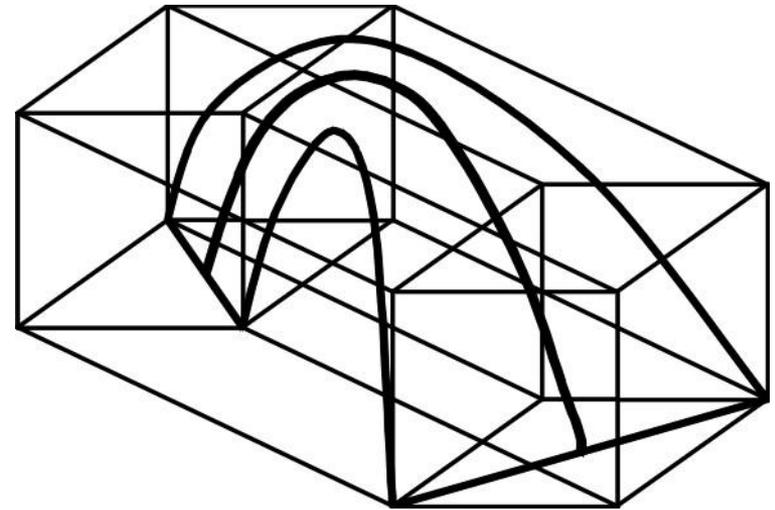
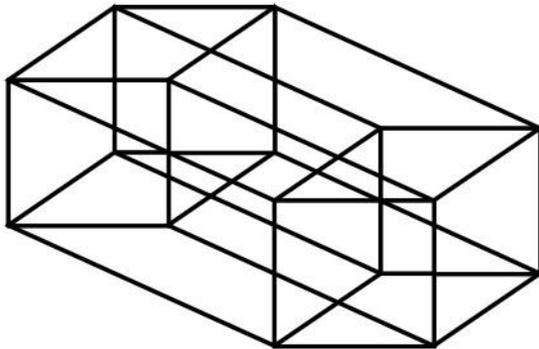


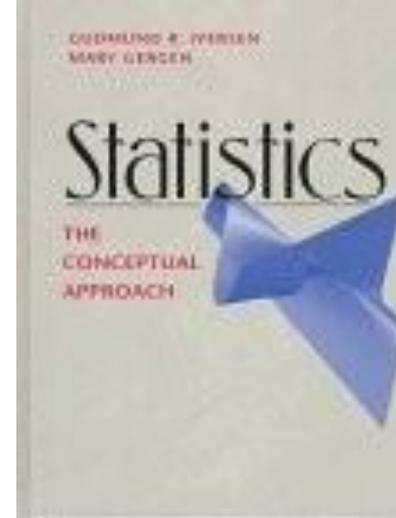
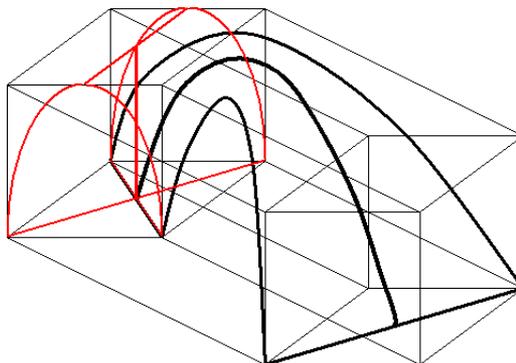
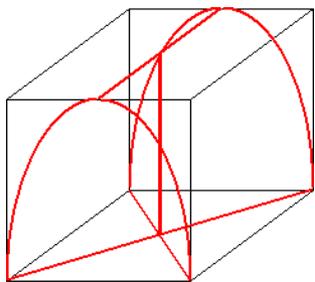
Projeções

de 3D em 2D



de 4D em 3D





Notices

ISSN 0002-9920

of the American Mathematical Society

March 1997

Volume 44, Number 3

Interview with
Bartel Leendert
van der Waerden
page 313

Van der Waerden's
Modern Algebra
page 321

From Matrix Mechanics
and Wave Mechanics
to Unified Quantum
Mechanics
page 323

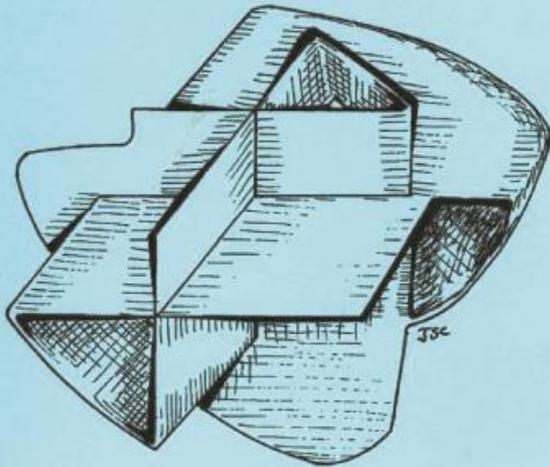
Detroit Meeting
page 400

Pretoria Meeting
page 402



Triple Point Ruled Surface (See page 309)

<http://www.tombanchoff.com/triple-point-twist.html>

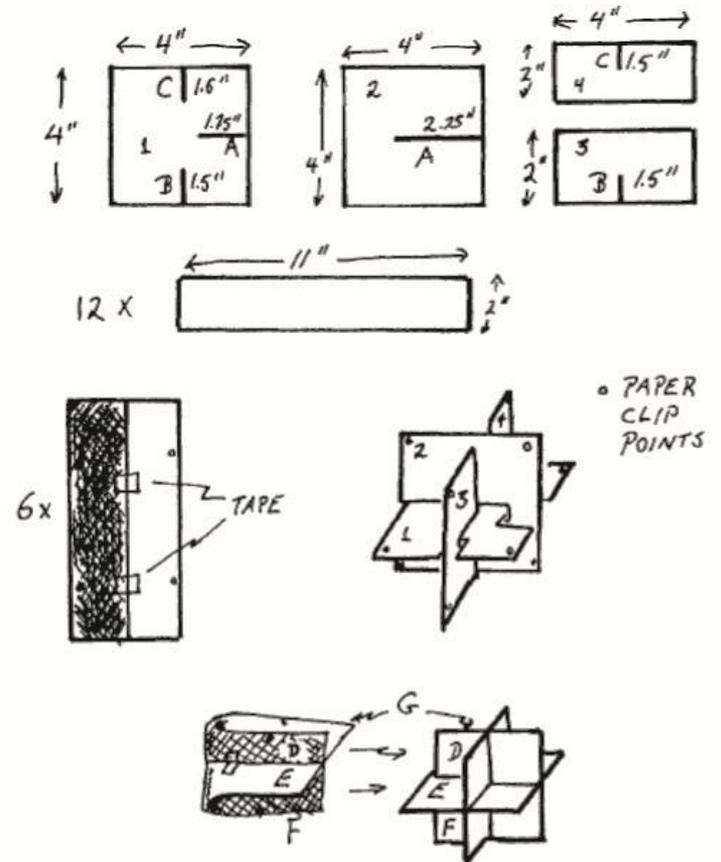


How Surfaces Intersect in Space

An introduction to topology
Second Edition

J Scott Carter

World Scientific



JSC

Figure 5.18: Marar's models of the surface



ton@icmc.usp.br