

João Pedro da Ponte
Maria de Lurdes Serrazina

Versão de M. Santos
2001

**DIDÁCTICA DA MATEMÁTICA
DO 1.º CICLO**

**GEOMETRIA
e
MEDIDA**

Universidade Aberta
2000

Copyright © UNIVERSIDADE ABERTA – 2000

Palácio Ceia • Rua da Escola Politécnica, 147

1250 Lisboa

DL: 154504/00

ISBN: 972-674-313-3

Objectivos de aprendizagem

Com o estudo deste capítulo espera-se que:

- fique a conhecer os principais objectivos curriculares no domínio dos conhecimentos e capacidades a desenvolver no 1º ciclo da educação básica no que se refere à Geometria;
- saiba discutir e analisar as razões pelas quais os alunos devem aprender Geometria no 1º ciclo da educação básica;
- seja capaz de descrever os aspectos essenciais da teoria de van Hiele para o ensino e a aprendizagem da Geometria;
- saiba equacionar as várias questões que se colocam no ensino da Geometria neste ciclo.

8. Geometria

8.1 Introdução

Até há poucos anos era dada pouca importância à Geometria no 1º ciclo da educação básica. Os alunos limitavam-se a aprender um conjunto limitado de definições, regras e procedimentos. Esta situação tem vindo a ser alterada e o programa do 1º ciclo actualmente em vigor atribui a este tópico um significativo relevo¹.

A aprendizagem da Geometria neste nível deve ser feita de um modo informal partindo de modelos concretos do mundo real das crianças, de modo a que elas possam formar os conceitos essenciais. A manipulação de materiais e a reflexão sobre as actividades realizadas têm um papel primordial na construção desses conceitos. Cabe aos professores propor tarefas que promovam o desenvolvimento das capacidades espaciais, indispensáveis à progressão da aprendizagem da Geometria e de outras áreas da Matemática.

A Geometria – como estudo das formas no espaço e das relações espaciais – oferece às crianças uma das melhores oportunidades para relacionar a Matemática com o mundo real (Freudenthal, 1973). São geométricas e espaciais as primeiras experiências das crianças ao tentarem compreender o mundo que as rodeia, ao distinguirem um objecto de outro e ao descobrirem o grau de proximidade de um dado objecto. Ao movimentarem-se de um lugar para outro, usam ideias espaciais e geométricas para resolver problemas.

A Geometria pode ainda constituir um tema unificador na aprendizagem da Matemática, na medida em que fornece formas de representação com forte apelo visual para vários tópicos da Matemática. Um exemplo, é o da recta numérica que pode constituir um modelo representativo dos números. Outro, é o das figuras geométricas que podem auxiliar a compreensão das fracções e, em particular, dos números decimais.

A Geometria dá-nos ainda a oportunidade de ensinar a resolução de problemas e pela resolução de problemas, o que constitui outra razão para valorizar o seu estudo nos primeiros anos de escolaridade. Por exemplo, a construção de figuras no geoplano², permite trabalhar os nomes e características das figuras. Uma tarefa a propor pode ser construir figuras com dois ângulos rectos ou com seis pregos no seu interior. Trata-se de uma tarefa problemática, dada a grande variedade de soluções, mas a sua realização requer o uso de conceitos geométricos importantes.

A aprendizagem da Geometria no 1º ciclo da educação básica deve basear-se em experiências informais, constituindo desse modo a base para um ensino mais formal. Os alunos devem ter oportunidades para realizar experiências que lhes permitam explorar, visualizar, desenhar e comparar objectos do dia

¹ A Geometria, com o nome de Espaço e Forma, constitui um dos três blocos destacados do programa de Matemática do 1º ciclo.

² O geoplano é constituído por uma base de madeira onde se espetam pregos de modo a formarem uma malha que pode ter diversas texturas (ver Senzina, 1988). Uma experiência de resolução de problemas com o geoplano no 1º ciclo é referida em Araújo (1998).

Resumo

A Geometria constitui um domínio da Matemática extremamente importante. Todos os cidadãos precisam de desenvolver as suas capacidades espaciais e de organização do espaço para viverem numa sociedade que é cada vez mais visual.

Neste capítulo discutem-se as razões pelas quais se deve valorizar a Geometria no 1º ciclo da educação básica. Referem-se capacidades ligadas ao sentido espacial e à visualização, essenciais no desenvolvimento do sentido espacial das crianças. Indicam-se actividades que os alunos devem desenvolver para conhecer as figuras geométricas e as suas propriedades. Por último, apresenta-se a teoria de Dina e Peter van Hiele, sobre o ensino e a aprendizagem da Geometria.

a dia e outros materiais concretos. É nesta perspectiva que são definidos os objectivos curriculares para a Geometria neste nível de ensino (Quadro XXXIII).

Quadro XXXIII – Objectivos curriculares para a Geometria

-
- O reconhecimento de formas geométricas simples, bem como a aptidão para descrever figuras geométricas e para completar e inventar padrões;
 - A aptidão para realizar construções geométricas e para reconhecer e analisar propriedades de figuras geométricas, nomeadamente recorrendo a materiais manipuláveis e a *software* específico;
 - A aptidão para utilizar a visualização e o raciocínio espacial na análise de situações e na resolução de problemas em Geometria e outras áreas da Matemática;
 - A predisposição para procurar e explorar padrões geométricos e o gosto por investigar propriedades e relações geométricas;
 - A aptidão para formular argumentos válidos recorrendo à visualização e ao raciocínio espacial, explicitando-os em linguagem corrente;
 - O reconhecimento e a utilização de idéias geométricas em diversas situações, nomeadamente, na comunicação e a sensibilidade para apreciar a Geometria no mundo real.

(In Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999, pp. 90 - 91)

Muitos conceitos em Geometria não podem ser reconhecidos ou compreendidos a menos que, visualmente, o aluno possa perceber exemplos e identificar figuras e propriedades associando-os a experiências anteriores. Por exemplo, para que perceba que um triângulo e a sua imagem numa isometria são congruentes, precisa de ter a percepção da invariância da forma quando há um deslocamento. Essa percepção é adquirida pela experiência obtida através da manipulação de objectos reais. Para formar o conceito de rectângulo, primeiro o aluno aprende a reconhecer rectângulos e a diferenciá-los de outras figuras, depois aprende a copiar rectângulos e a desenhá-los no papel ou no geoplano e, por último, desenha os rectângulos de memória, considerando-os como elementos da classe das figuras rectangulares.

As relações espaciais são assim construídas pelo indivíduo por um processo de interacção com o meio. Para Piaget, as representações mentais dos objectos

físicos são o resultado de construções que se apoiam nas acções com os objectos e na coordenação dessas acções³. Este autor definiu diversos níveis de desenvolvimento das crianças em relação à organização espacial (ver Quadro XXXIV).

³ Para um estudo mais aprofundado das ideias deste autor sobre a aprendizagem das relações espaciais, ver Piaget e Inhelder (1967).

Quadro XXXIV – Níveis de organização espacial

Nível 1: <i>Espaço sensorio-motor</i> – percepções sensoriais das relações espaciais;
Nível 2: <i>Espaço intuitivo</i> – representações intuitivas num nível pré-operatório;
Nível 3: <i>Espaço concreto</i> – representações operativas, isto é, permitindo realizar operações reversíveis com materiais concretos;
Nível 4: <i>Espaço abstracto</i> – representações formais e abstractas.

8.2 A capacidade espacial

A capacidade espacial (ou o sentido espacial) é essencial em muitas tarefas, como escrever letras ou algarismos, ler tabelas, seguir direcções, fazer diagramas, ler mapas e visualizar objectos que são descritos verbalmente. Pode dizer-se que sem a capacidade espacial bem desenvolvida e o seu vocabulário próprio para descrever relações geométricas não podemos comunicar sobre as posições e relações entre dois ou mais objectos; dar e receber indicações para chegar a determinado local ou completar uma dada tarefa; nem imaginar as mudanças que resultam quando as figuras são divididas, associadas ou deslocadas no espaço.

Tarefas que requerem sentido espacial são, por exemplo, a comparação de duas figuras com diferentes orientações (em que mentalmente se estabelece a rotação de uma delas para facilitar a comparação), o reconhecimento da simetria de certas figuras e a relação entre um rectângulo e um paralelogramo com lados com o mesmo comprimento.

Quando os alunos chegam à escola possuem já uma longa experiência informal que deve ser continuada através da manipulação de objectos, da utilização de materiais como o geoplano e o tangram⁴, do desenho em papel pontado ou quadriculado, de dobragens, da realização de jogos envolvendo

⁴ O tangram é um puzzle muito antigo, com origem na China, e que consiste num quadrado decomposto em sete peças com algumas relações entre si. Algumas sugestões do que pode ser feito com alunos do 1º ciclo com este material encontram-se na revista *Educação e Matemática*, nº 16, pp. 19-20 (1990).

construção de padrões, do uso de espelhos, da realização de experiências com itinerários, etc.

O programa em vigor para o 1º ciclo tem subjacente a preocupação que o aluno realize actividades deste tipo de modo a desenvolver as noções geométricas. Neste processo, desempenham papel especial actividades que possam promover as capacidades espaciais do aluno. Como indicam Matos e Gordo (1993), a visualização espacial é simultaneamente facilitadora da aprendizagem da Geometria e é desenvolvida pelas experiências geométricas na sala de aula. Esta capacidade engloba um conjunto de aspectos relacionados com a forma como os alunos percebem o mundo à sua volta e como são capazes de representar, interpretar, modificar e antecipar transformações dos objectos. Aquelles autores apresentam sete capacidades de visualização espacial (ver Quadro XXXV)⁵.

⁵ Pode aprofundar este tema em Gordo (1993).

Quadro XXXV – Aspectos da capacidade espacial

-
- *Coordenação visual-motora* – Capacidade de coordenar a visão com os movimentos do corpo;
 - *Memória visual* – Capacidade de recordar objectos que já não estão à vista;
 - *Percepção figura-fundo* – Capacidade de identificar uma componente específica numa determinada situação e que envolve a mudança de percepção de figuras contra fundos complexos;
 - *Constância perceptual* – Capacidade de reconhecer figuras geométricas em diversas posições, tamanhos, contextos e texturas;
 - *Percepção da posição no espaço* – Capacidade para distinguir figuras iguais mas colocadas com orientações diferentes;
 - *Percepção de relações espaciais* – Capacidade de ver e imaginar dois ou mais objectos em relação consigo próprios ou em relação connosco;
 - *Discriminação visual* – Capacidade para identificar semelhanças ou diferenças entre objectos.

(Matos e Gordo, 1993, adaptado)

Estas capacidades são desenvolvidas através da realização de experiências concretas. Por exemplo, a coordenação visual-motora começa a ser desenvolvida desde muito cedo em actividades como comer, jogar, vestir-se, etc. Pode também ser desenvolvida em actividades como resolver e fazer labirintos ou pintar desenhos. A memória visual desenvolve-se quando, por

exemplo, se mostra uma figura desenhada no geoplano e depois se pede aos alunos para a desenharem sem a voltar a observar. A percepção figura-fundo pode desenvolver-se, por exemplo, através de actividades com as peças do tangram (Figura 14).

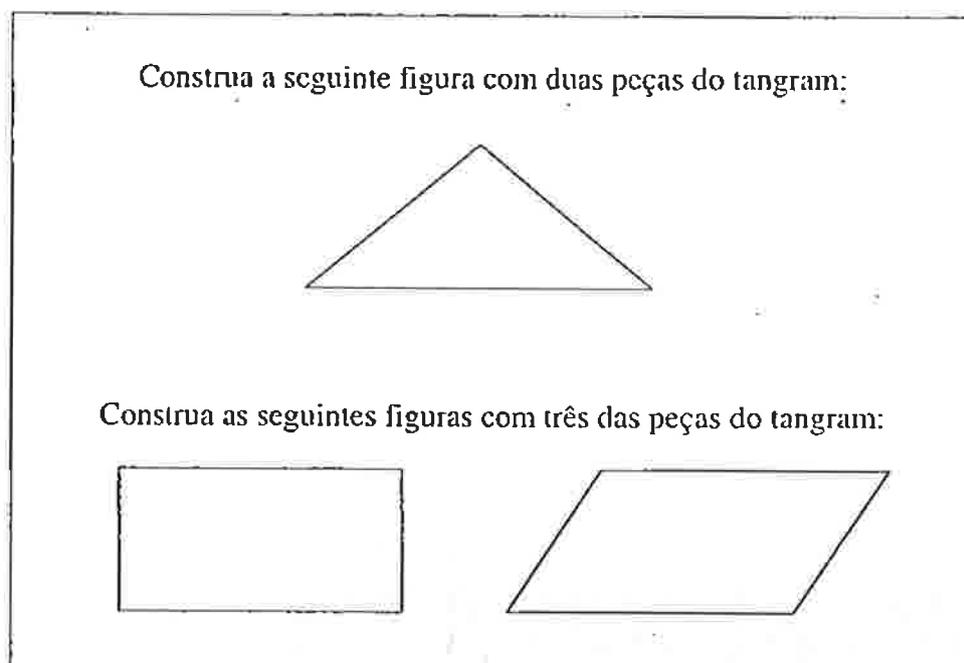


Figura 14 – Exemplo de uma tarefa para desenvolver a capacidade de percepção figura-fundo

A constância perceptual pode ser desenvolvida com a utilização do geoplano, uma vez que, devido à sua mobilidade, é possível desenhar uma figura e observá-la em diferentes posições. Ainda com o geoplano pode propor-se aos alunos que encontrem todos os quadrados não congruentes. A percepção da posição no espaço corresponde a identificar figuras que, sendo iguais do ponto de vista da percepção figura-fundo ou da constância perceptual, têm uma orientação diferente. É esta capacidade que permite distinguir os *pp* dos *bb*, dos *qq* ou dos *dd*.

Estamos a usar a percepção das relações espaciais quando fazemos corresponder a um sólido a respectiva planificação e vice-versa. Finalmente, a capacidade de discriminação visual pode ser desenvolvida quando damos aos alunos um dado conjunto de figuras geométricas, as agrupamos fazendo subconjuntos e lhes pedimos para identificarem o critério utilizado (Quadro XXXVI).

Quadro XXXVI – Identificar o critério de classificação e desenvolver a capacidade de discriminação visual

Distribuir a cada grupo de alunos um conjunto de triângulos.

- O professor pensa num critério para fazer um subconjunto dos triângulos;
 - Os alunos de cada grupo vão pegando num dos triângulos de cada vez e perguntam se pertence ou não ao subconjunto. O professor responde sim ou não;
 - Quando um dos grupos achar que já descobriu a regra diz que já sabe. O professor confirma se é essa a regra ou não. Ganha quem primeiro adivinhar a regra.
-

8.3 A aprendizagem das figuras geométricas

O programa do 1º ciclo da educação básica contempla o estudo das figuras geométricas bi e tridimensionais. Uma tarefa que os alunos podem realizar em grupo consiste em agrupar, pela forma, conjuntos de objectos de plástico – por exemplo, blocos lógicos. Quando cada grupo der a resposta deve explicar quais as diferenças e semelhanças usadas para fazer os agrupamentos.

As crianças podem arranjar subconjuntos e justificações em que o professor não tinha pensado. Este deve ser sensível ao nível de pensamento dos alunos, aceitando as suas ideias, encorajando-os a expressá-las claramente, mas ao mesmo tempo não deve perder de vista o objectivo de fazer com que eles progredam no seu nível de pensamento. Se os agrupamentos efectuados pelos alunos forem inteiramente visuais, o professor pode, depois deles acabarem, apresentar outro agrupamento na base das propriedades das figuras e pedir-lhes para imaginarem qual a justificação para a formação daquele subconjunto.

8.3.1 Figuras tridimensionais

A forma mais natural de começar a estudar as figuras geométricas é procurar objectos tridimensionais no universo dos alunos e explorá-los. As crianças devem ter oportunidades para descrever e comparar objectos tridimensionais (por exemplo: 'este rola', 'tem um bico', 'é plano dos dois lados', etc.). À

medida que as propriedades específicas são descobertas e verbalizadas, pode-se informalmente introduzir os seus nomes (por exemplo: esfera, cilindro, pirâmide, paralelepípedo rectângulo, cubo, etc.). Mas a prioridade deve ser dada à exploração e à discussão das características das formas dos objectos e não à memorização dos seus nomes.

Para levar os alunos a entrar no mundo das figuras geométricas, o professor pode pedir-lhes que levem caixas, latas, frascos de toda a espécie (de pasta dos dentes, de cereais, de bolachas, latas de sumo, latas de sopa, etc.). Uma questão natural é 'como os agrupar?' 'quais os critérios?'. Existem muitas respostas possíveis. Depois de alguma discussão pode-se optar pelo critério 'ter a mesma forma'. Aparecem normalmente 'os que rolam' que correspondem ao cilindro e 'os que não rolam' correspondendo aos prismas e paralelepípedos. Não é fácil encontrar modelos reais de pirâmides ou de cones e, por isso, é importante que o professor apresente os modelos dos sólidos (normalmente de madeira ou plástico) que existem na sala.

A partir dos sólidos devem ser desenvolvidas tarefas que levem os alunos a identificar as suas características, como:

1. Perante dois sólidos – por exemplo, um prisma triangular e um prisma quadrangular – responder às seguintes perguntas: O que é que os dois sólidos têm de comum? O que têm de diferente?
2. Dar a cada grupo de alunos um conjunto de sólidos: um cubo, um prisma triangular, um prisma quadrangular (não cubo), um prisma hexagonal, uma pirâmide triangular e uma pirâmide hexagonal. Cada aluno deve examinar todas as faces de cada um dos sólidos e preencher uma tabela do tipo da representada na Figura 15. A tabela pode ter ou não uma coluna com os nomes dos sólidos:

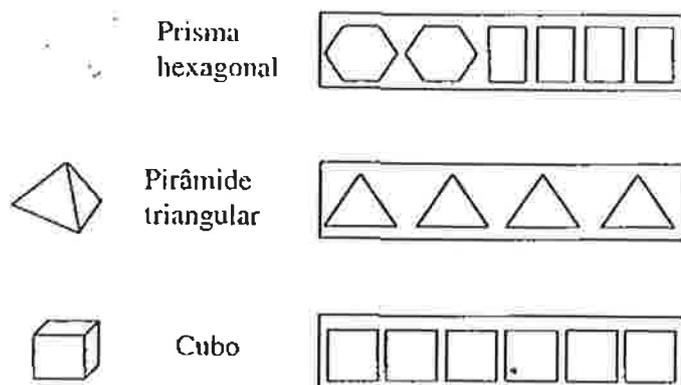


Figura 15 – Sólidos e as suas faces

Deste modo, os alunos devem perceber o que são quadrados e o que são retângulos e identificar as duas categorias. Esta identificação deve ter por base as semelhanças e as diferenças de modo que mais tarde seja fácil compreenderem que um quadrado é um retângulo especial. Do mesmo modo, os alunos podem encontrar semelhanças e diferenças entre retângulos e paralelogramos. Assim, serão capazes de compreender na devida altura a classificação dos quadriláteros (ver Figura 16).

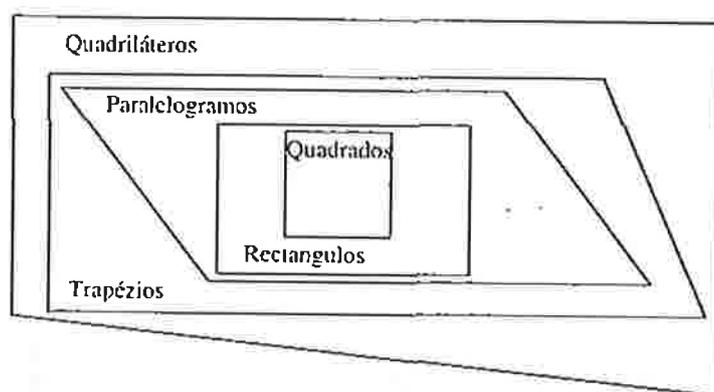


Figura 16 – Classificação dos quadriláteros.

b) Triângulos

Embora o programa não inclua a classificação de triângulos, é importante que, desde o início, o conceito de triângulo que os alunos adquiram seja o mais alargado possível não se limitando a um triângulo equilátero (ou isósceles “quase” equilátero e retângulo isósceles – ver Figura 17).

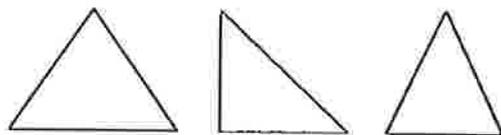


Figura 17 – Exemplos de figuras que os alunos identificam como triângulos.

Para que os alunos não formem uma concepção errada de triângulo devem ter oportunidades, desde o início, de contactar com diferentes triângulos em diferentes posições. Propôr aos alunos que desenhem tantos triângulos no

Os alunos discutem as suas tabelas uns com os outros. A tabela pode ser recortada em tiras de modo que cada uma delas tenha o nome ou as faces de um sólido. Pega-se numa dessas tiras e pede-se aos alunos para seleccionarem o sólido que tem aquelas faces. Essa selecção pode ser feita por tentativa e erro, colocando uma face de cada vez na fita, certificando-se assim da sua escolha.

As planificações dos sólidos e respectiva construção constituem uma boa oportunidade para a passagem de figuras tridimensionais a bidimensionais e vice-versa. Como já foi referido, os alunos, ao decidirem quais os padrões bidimensionais que ao dobrarem-se conduzem a uma dada forma tridimensional, estão a desenvolver o seu sentido espacial.

8.3.2 *Figuras bidimensionais*

a) *Quadriláteros*

Uma forma de abordar os quadriláteros é dar aos alunos um conjunto de régua de vários tamanhos com os quais podem construir diferentes figuras. Depois, o professor pede para observarem as figuras uns dos outros e identificarem as respectivas semelhanças e diferenças. Durante esta discussão deve introduzir as noções de vértice e lado e conduzir os alunos a agruparem os quadriláteros segundo várias categorias. Surgem então os nomes de quadriláteros como quadrados, rectângulos e paralelogramos. Nesta abordagem pretende-se que os alunos olhem sobretudo para as semelhanças e diferenças entre as figuras, em vez de memorizarem definições de cada figura individual.

Esta actividade levará naturalmente à conclusão que existem muitos tipos de quadriláteros e que os diferentes tipos têm algo em comum. Deste modo, evita-se começar a Geometria neste nível de ensino por dar desde logo aos alunos o nome de várias figuras. Por exemplo, são introduzidas duas categorias de figuras: os quadrados e os rectângulos – o quadrado é o polígono com quatro lados iguais e quatro ângulos rectos, enquanto que o rectângulo é o polígono com dois lados iguais e paralelos e o lado perpendicular de tamanho diferente. Normalmente, as crianças ficam com a ideia de rectângulo como sendo alto ou comprido. Como a sua experiência para distinguir quadrados de rectângulos é limitada a poucos exemplos, quando os professores mais tarde, no 2º ciclo, lhes dizem que os quadrados também são rectângulos, esta nova informação não condiz com a que aprenderam antes.

realizam com o próprio corpo. Por exemplo, “estar virado para o quadro preto, marcar essa direcção no chão da sala, virar para a janela, marcar a nova direcção, o que resulta?”

Uma vantagem de compreender ângulo como o que roda é a de contrariar a concepção errada que muitas vezes os alunos têm que o tamanho de um ângulo é determinado pelo comprimento dos seus lados, ou que um dos lados de um ângulo deve ser sempre horizontal.

Mais tarde, ao classificar figuras geométricas e identificar as suas propriedades, a criança contacta com a noção **estática de ângulo**, como o espaço limitado por um par de semirectas com a mesma origem.

Primeiro, os alunos olham os ângulos globalmente. Quando começam a reconhecer os ângulos podem notar que um triângulo tem sempre três ângulos, ou três vértices, mas não prestam atenção às propriedades particulares desses ângulos.

Posteriormente, através da observação dos ângulos de quadrados e de rectângulos, os alunos identificam ângulo recto como aquele em que os lados são perpendiculares. Depressa se apercebem que existem ângulos cuja amplitude é maior que a do ângulo recto (ângulos obtusos) e outros cuja amplitude é menor que a do ângulo recto (ângulos agudos) e começam a identificar propriedades e relações entre os ângulos. O passo seguinte é operar com essas relações, como por exemplo, “um triângulo não pode ter mais que um ângulo obtuso porque os três lados têm de formar uma figura fechada”.

Quadro XXXVII – Figuras e ângulos no geoplano

Desenhar no geoplano figuras tendo:

- ? Pelo menos um ângulo recto;
 - ? Exactamente dois ângulos rectos;
 - ? Seis ângulos rectos;
 - ? Nenhum ângulo recto;
 - ? Três ângulos rectos e sete lados;
 - ? Dois ângulos obtusos;
 - ? Só ângulos agudos.
-

geoplano quantos conseguirem e depois trocaram os desenhos entre si de modo a concluir se são ou não triângulos, é uma tarefa que ajuda a construir o conceito.

Uma outra tarefa, também no geoplano, consiste em propor aos alunos que desenhem triângulos com um prego no interior, dois pregos no interior, três e assim sucessivamente, até ao máximo de pregos no respectivo interior. Ao compararem os desenhos uns com os outros apercebem-se que há diferentes soluções para o problema colocado.

c) Outras figuras geométricas

É importante que o contacto dos alunos com figuras geométricas não se limite ao quadrado, rectângulo, triângulo e círculo, mas inclua outros polígonos, regulares ou não. O professor pode, por exemplo, propor a cada par de alunos que, com um conjunto de triângulos iguais e equiláteros, construa outras figuras, ligando dois triângulos por um dos lados. Os alunos, podem começar com dois triângulos, passar a três e depois a quatro triângulos. De seguida, podem comparar as figuras que cada par obteve e concluir sobre as diferenças e as semelhanças. Não se pretende que os alunos encontrem todas as figuras possíveis, mas que se apercebam como é que cada nova figura pode ser obtida. Além disso, ao compararem as suas figuras com as de outro par estão a desenvolver o seu sentido espacial.

A experiência pode ser repetida com triângulos rectângulos isósceles. O que se pretende é que, independentemente do material utilizado, os alunos sejam capazes de identificar propriedades das figuras que obtiveram e não os seus nomes. No entanto, designações como vértices, lados, ângulos, lados paralelos ou perpendiculares podem ser introduzidos a pouco e pouco⁶.

⁶ Uma experiência de construção de figuras geométricas é descrita em Almeida (1996). Partindo do tema do Natal os alunos trabalharam a construção e classificação de figuras variadas, utilizando o geoplano. Neste processo o papel do professor foi essencial na condução das discussões e na reflexão sobre as propriedades das figuras.

8.3.3 O conceito de ângulo

De acordo com a investigação piagetiana (Piaget, Inhelder e Szeminska, 1960), o conceito de ângulo desenvolve-se muito lentamente na mente da criança. Na verdade, desde cedo as crianças têm contacto com a noção de ângulo. Quando abrem a porta de uma sala, esta roda desde a posição de fechada até à posição em que pára, percorrendo um dado ângulo. Esta ideia, ligada ao movimento de uma semirecta em torno de um ponto, ou como uma rotação, costuma designar-se por **conceito dinâmico de ângulo**⁷.

Este conceito de ângulo – “o que roda” – é especialmente adequado para a iniciação do tópico e pode ser ilustrado através de rotações que os alunos

⁷ É este conceito de ângulo que está em jogo na linguagem LOGO, desenvolvida por Seymour Papert (Papert, 1987).

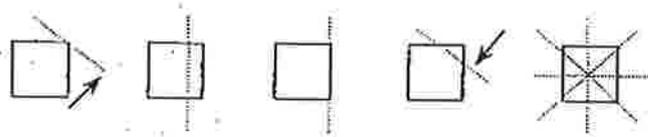


Figura 18 – Diferentes posições do espelho

Desta forma os alunos vão-se apercebendo das propriedades das figuras e dos seus eixos de simetria.

8.3.5 Outros conceitos geométricos

Os conceitos de comprimento, área e volume, por se tratarem de grandezas são tratados no Capítulo 9. No entanto, uma vez que se trata de grandezas geométricas devem aparecer em estreita relação com o estudo das figuras geométricas. O mesmo se passa com o perímetro, que não é mais que o comprimento da fronteira da figura geométrica.

A noção de comprimento está presente no dia a dia das crianças. Saber, por exemplo, qual o caminho mais curto entre dois pontos, implica visualizar o segmento de recta entre os dois pontos e a partir daí determinar a distância entre os dois pontos.

Muitas vezes os alunos têm concepções erradas sobre área e perímetro. É frequente pensarem que duas figuras com a mesma área também têm o mesmo perímetro e vice-versa. É fundamental que desenvolvam muitas tarefas de determinação de área e perímetro de modo a concluírem que se trata de duas grandezas diferentes e independentes⁹.

O Quadro XXXIX resume alguns aspectos que o professor deve ter presente para evitar a formação de concepções erradas sobre a Geometria por parte dos alunos.

⁹ Uma experiência de utilização do geoplano para trabalhar as noções de área e perímetro é relatada em Ponte (1990).

Estas ideias não podem ser apresentadas aos alunos como regras, mas devem surgir das actividades que eles desenvolvem com ângulos e polígonos. No Quadro XXXVII apresentam-se algumas sugestões de tarefas que lhes podem ser propostas. Mais uma vez, para alguns dos problemas são possíveis várias respostas. É essencial que cada aluno consiga argumentar de forma a justificar as suas conclusões.

8.3.4 *Simetrias*

A simetria em relação a uma recta é uma isometria que pode ser abordada de um modo informal neste ciclo. Através de dobragens os alunos podem reconhecer os eixos de simetria das diferentes figuras. Actividades com espelhos são normalmente muito apreciadas e são de grande utilidade para a formação da ideia de figuras simétricas e de eixos de simetria de uma figura⁸. O Quadro XXXVIII apresenta uma tarefa que permite trabalhar a simetria, as propriedades dos quadrados e rectângulos e os eixos de simetria do quadrado:

⁸ No artigo de Peixoto (1998) são apresentadas diversas actividades com simetrias axiais desenvolvidas com alunos do 1º ciclo.

Quadro XXXVIII – Tarefa com espelhos

Desenhar um quadrado em papel pontado.

A. Usar um espelho para fazer as figuras seguintes:

1. dois quadrados;
2. um rectângulo;
3. o maior rectângulo que consiga fazer;
4. um quadrado mais pequeno;

B. De quantas maneiras diferentes pode colocar-se o espelho sobre o quadrado desenhado de modo a obter uma figura que é a mesma da figura original?

Na figura 18 estão indicadas as várias posições em que se pode colocar o espelho para cada um dos casos.

Esta teoria desenvolveu-se num contexto histórico em que tinham acabado de aparecer materiais como o geoplano ou as barras de Cuisenaire. Na Holanda, onde surgiu, eram frequentes as discussões à volta do ensino da Geometria. Novos métodos, novos materiais, novos objectivos e novos conteúdos para o ensino da Matemática estavam a ser desenvolvidos. A teoria reflecte esta situação. Por um lado, pressupõe um currículo baseado na Geometria euclidiana que está hoje ultrapassado. Por outro lado, propõe uma nova abordagem pedagógica¹¹ que inclui uma forte utilização de materiais.

¹¹ Ver, por exemplo, Matos (1988).

Os van Hiele propõem que a aprendizagem da Geometria se desenvolve através de uma sequência de cinco níveis de compreensão. Começando pelo nível da visualização, onde as figuras são percebidas pela sua aparência, passando pelo nível 2, onde as figuras são o conjunto das suas propriedades, até ao nível 5 dos sistemas axiomáticos (Quadro XL).

A teoria de van Hiele sugere que o pensamento geométrico evolui de modo lento desde as formas iniciais de pensamento até às formas dedutivas finais onde a intuição e a dedução se vão articulando. As crianças começam por reconhecer as figuras e diferenciá-las pelo seu aspecto físico e só posteriormente o fazem pela análise das suas propriedades. Assim, é importante que ao nível do 1º ciclo se privilegie a abordagem intuitiva e experimental do conhecimento do espaço e do desenvolvimento das formas mais elementares de raciocínio geométrico em ligação com as propriedades fundamentais das figuras e das relações básicas entre elas.

Cada nível da teoria tem os seus próprios códigos linguísticos e a sua própria linguagem, o que explica a dificuldade de comunicação entre pessoas funcionando em níveis diferentes. Por exemplo, se o professor está a discutir propriedades das formas geométricas procurando mostrar a sua relação lógica (nível 3), mas a linguagem dos alunos permite apenas a identificação das propriedades através da manipulação das figuras (nível 2), a comunicação é impossível. Na melhor das hipóteses, o aluno aprende a dar as respostas certas ou a realizar as operações certas para agradar ao professor. Este pensa ter sido bem sucedido no seu ensino, mas o aluno apenas memorizou diversos nomes. Este tipo de aprendizagem não o ajuda a utilizar o conhecimento geométrico na resolução de problemas. Pelo contrário, dá origem a atitudes negativas em relação à Matemática. As crianças forçadas a aprender Geometria desta forma acreditam que a Matemática se resume a listas cada vez mais complexas de passos para seguir ou argumentos para recitar.

Segundo a teoria de van Hiele, a aprendizagem é possível desde que o professor escolha uma abordagem de ensino adaptada ao nível dos alunos, percorrendo em cada nível uma sequência de fases de aprendizagem. Primeiro, os alunos contactam com novos problemas (Informação). Depois,

Quadro XXXIX – Alguns aspectos a considerar na organização das tarefas de Geometria

- Dar o maior relevo às propriedades e características de um conceito;
- Proporcionar muitos exemplos e não exemplos. Os alunos não têm de saber os nomes dos não exemplos;
- Prestar atenção ao uso da linguagem. Dar oportunidades às crianças para mostrar e explicar o uso de termos específicos;
- Pôr questões do tipo: “Como se sabe que não é um quadrado?”; “Que tipos de mudanças deviam ser feitas para passar a ser um quadrado?”; “O que é que estas figuras têm em comum?”; “Em que são diferentes?”.



¹⁰ Peter van Hiele e sua mulher, Dina van Hiele-Geldof, são dois professores de Matemática holandesas que desenvolveram a sua teoria quando, em meados dos anos 50 escreveram as suas teses de doutoramento.

8.4 A teoria de van Hiele

A teoria de Dina e Peter van Hiele¹⁰ refere-se ao ensino e aprendizagem da Geometria. Esta teoria, desenvolvida nos anos 50, propõe uma progressão na aprendizagem deste tópico através de cinco níveis cada vez mais complexos (ver Quadro XL). Esta progressão é determinada pelo ensino. Assim, o professor tem um papel fundamental ao definir as tarefas adequadas para os alunos progredirem para níveis superiores de pensamento. Sem experiências adequadas, o seu progresso através dos níveis é fortemente limitado.

Quadro XL – Níveis de aprendizagem da Geometria (van Hiele)

- Nível 1: *Visualização* – Os alunos compreendem as figuras globalmente, isto é, as figuras são entendidas pela sua aparência;
- Nível 2: *Análise* – Os alunos entendem as figuras como o conjunto das suas propriedades;
- Nível 3: *Ordenação* – Os alunos ordenam logicamente as propriedades das figuras;
- Nível 4: *Dedução* – Os alunos entendem a Geometria como um sistema dedutivo;
- Nível 5: *Rigor* – Os alunos estudam diversos sistemas axiomáticos para a Geometria.

paralelas ou rectas perpendiculares. Actividades com *puzzles* como o tangram, que permite a construção de figuras geométricas, enriquecem a capacidade de visualização e de identificação das propriedades das figuras, favorecendo o progresso na aprendizagem.

8.5 Conclusão

Como já foi referido, é essencial para a construção dos conceitos geométricos, envolver os alunos em actividade geométrica, através, nomeadamente, da manipulação de materiais e da reflexão sobre as actividades desenvolvidas.

Actividades envolvendo *puzzles*, dobragens, desenhos ou blocos lógicos enriquecem as capacidades espaciais das crianças, ao mesmo tempo que desenvolvem o conhecimento das formas geométricas e das suas propriedades. Deste modo os alunos progridem na aprendizagem da Geometria. É importante ter presente que esta aprendizagem, neste nível, deve ser informal e que as crianças devem estar envolvidas em actividades. O professor deve planear o tipo de tarefas adequadas, direccionar a atenção das crianças para as qualidades geométricas das formas, introduzir a terminologia adequada envolvendo as crianças em discussões onde esta terminologia seja usada. Deve ainda encorajar as explicações e as abordagens de resolução de problemas que fazem uso do pensamento descritivo das crianças sobre as formas.

Tarefas

1. Organize um conjunto de tarefas para alunos do 1º ciclo que permitam desenvolver as capacidades espaciais definidas na secção 8.2.
2. Os hexaminós são figuras formadas por seis quadrados idênticos ligados por um lado. Identifique hexaminós que sejam planificações do cubo.
3. Faça uma adaptação da actividade sobre pavimentações de Dina van Hiele descrita por José Manuel Matos (1988) para ser desenvolvida com alunos do 1º ciclo do ensino básico.
4. Identifique contribuições importantes da teoria de van Hiele para a aprendizagem da Geometria.

devidamente orientados, estabelecem relações entre os objectos que estão a manipular (Orientação guiada). De seguida, expressam as suas opiniões sobre as regularidades que encontram (Explicitação). Segue-se uma fase em que realizam tarefas mais complexas e onde expandem os seus conhecimentos (Orientação livre). Finalmente, tiram conclusões sobre o que aprenderam (Integração). Uma ilustração desta sequência encontra-se no Quadro XLI.

Quadro XLI – Um exemplo de ilustração das fases de aprendizagem para o conceito de rectângulo (movimento do nível 1 para o 2)

Fases de aprendizagem	Exemplo de tarefa
Fase 1: <i>Informação</i>	O professor mostra aos alunos diversos rectângulos e pergunta-lhes se são ou não rectângulos. Os alunos são capazes de dizer se uma dada figura é ou não rectângulo, mas as razões apresentadas serão apenas de percepção visual.
Fase 2: <i>Orientação guiada</i>	Realizam-se outras actividades sobre rectângulos. Por exemplo, dobrar um rectângulo segundo os seus eixos de simetria; desenhar um rectângulo no geoplano que tenha as diagonais iguais, construir um maior e um menor.
Fase 3: <i>Explicitação</i>	As actividades anteriores são seguidas por uma discussão entre os alunos sobre o que descobriram.
Fase 4: <i>Orientação livre</i>	O professor coloca o problema de construir um rectângulo a partir de dois triângulos.
Fase 5: <i>Integração</i>	Os alunos revêem e resumem o que aprenderam sobre as propriedades do rectângulo. O professor ajuda a fazer a síntese.

Para ser adequado, isto é, para ter em conta o nível de pensamento dos alunos, o ensino da Geometria no 1º ciclo deve ter como preocupação ajudá-los a progredir do nível visual para o nível de análise. Assim, eles devem começar por identificar, manipular (construir, desenhar, pintar, etc.) e descrever figuras geométricas. Devem desenhar quadrados no geoplano e procurar rectas

9. Medida

Leituras recomendadas

MATOS, J. M.

- 1988 Um exemplo de didáctica da geometria, in *Educação e Matemática*, 6, pp. 5-10.

MATOS, J. M., E GORDO, F.

- 1993 Visualização espacial: Algumas actividades, in *Educação e Matemática*, 26, pp. 13-17.

PONTE, C.

- 1990 Um lugar para o geoplano no ensino da Geometria, in *Educação e Matemática*, 13, pp. 16-18.

Objectivos de aprendizagem

No fim deste capítulo espera-se que:

- fique a conhecer os principais objectivos curriculares no domínio das grandezas e medida a desenvolver neste nível de ensino;
- seja capaz de conceber e seleccionar tarefas para uma aprendizagem significativa dos conceitos de grandeza e de medida;
- identifique as diferentes etapas para a aquisição do conceito de medida pelos alunos;
- identifique os aspectos fundamentais a desenvolver com os alunos para a aquisição das diversas grandezas estudadas no 1º ciclo do ensino básico;
- seja capaz de referir actividades a desenvolver com os alunos para desenvolverem a sua capacidade de estimação.

Resumo

As grandezas e medidas têm uma grande importância no desenvolvimento da ciência e da tecnologia, na vida quotidiana e no mundo do trabalho. Realizar medições e manipular instrumentos de medida é importante tanto na vida do dia-a-dia como em muitas profissões.

O trabalho com grandezas e medida envolve os conceitos de grandeza e de medida. É fundamental realizar actividades de comparação directa e indirecta, de selecção de uma unidade de medida a fim de compreender o que é medir. A propriedade transitiva e a conservação de quantidades são aspectos essenciais neste processo.

Neste Capítulo são ainda passadas em revista as diferentes grandezas estudadas no 1º ciclo – comprimento, área, volume e capacidade, massa, tempo e dinheiro e o trabalho a realizar com os alunos neste domínio.

9.1 Introdução

O programa do 1º ciclo dá um lugar destacado às questões relacionadas com a medida¹. A sua inclusão justifica-se pois tanto na vida do dia-a-dia como em muitas profissões é importante realizar medições e ser capaz de manipular instrumentos de medida. Também a evolução tecnológica e científica está associada ao grau de precisão nas medidas.

¹ Aspectos ligados à medida são abordados no programa do 1º ciclo no bloco Grandezas e Medidas.

Aspectos como saber quando um atributo de um objecto pode ser quantificado e portanto mensurável, seleccionar unidades de medida adequadas ou compreender um sistema de medidas, são fundamentais em Matemática e devem ser trabalhados ao longo do 1º ciclo da educação básica. É nesta perspectiva que são definidos os objectivos curriculares para as Grandezas e Medidas (Quadro XLII).

Quadro XLII – Objectivos curriculares para as Grandezas e Medida

- A compreensão do processo de medição e dos sistemas de medidas e a aptidão para fazer medições em situações diversas do quotidiano utilizando instrumentos apropriados;
- A compreensão de conceitos como os de comprimento, área, volume e a aptidão para utilizar conhecimentos sobre esses conceitos na resolução de problemas;
- A aptidão para efectuar medições em situações diversas e fazer estimativas, bem como a compreensão do sistema métrico.

(In Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999, p. 90, 91)

9.2 Grandezas e Medidas

Muitos conceitos importantes em Matemática constroem-se tendo por base processos de classificação e ordenação. É o que acontece com o conceito de grandeza.

Parte-se de um conjunto de objectos e de entre os seus atributos – cor, tamanho, massa, comprimento, etc. – escolhe-se um que seja mensurável. Se o atributo escolhido for o comprimento, os objectos do conjunto comparam-se segundo o critério ‘é tão grande como’. A comparação dá origem a uma partição no conjunto de objectos de maneira que cada subconjunto da partição (classe de

equivalência) é formado por objectos que têm o mesmo comprimento. Obtém-se assim uma classificação dos objectos de partida segundo o atributo 'comprimento'. Cada classe de equivalência assim obtida chama-se quantidade da grandeza; neste caso quantidade de comprimento, ou simplesmente comprimento.

É assim possível comparar objectos que pertencem a classes diferentes e concluir que um é maior que o outro, estabelecendo-se no conjunto das classes de equivalência uma ordenação segundo o critério 'é mais comprido que' que ordena as diferentes quantidades da grandeza, isto é os diferentes comprimentos.

O conjunto de todas as quantidades constitui a grandeza. Neste conjunto é possível definir uma lei de composição interna, isto é, é possível 'somar' duas quantidades da mesma grandeza. Por exemplo, para 'somar' dois comprimentos basta tomar um representante de cada uma das classes a que eles pertencem e justapô-los. Sejam a e b dois comprimentos, l um representante da classe a e m um representante da classe b (Figura 16).

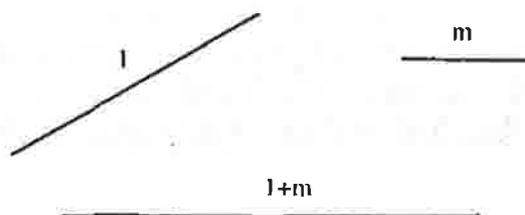


Figura 19 – Soma de dois comprimentos.

$l + m$ é um representante da classe soma de a com b .

Facilmente verificamos que a operação assim definida tem as propriedades associativa, comutativa e existência de elemento neutro.

Assim, podemos dizer que uma grandeza é um conjunto de classes de equivalência, onde se definiu uma relação de ordem e onde é possível definir uma lei de composição interna que tem as propriedades associativa, comutativa e elemento neutro.

No Quadro XLIII estão esquematizadas as diferentes etapas a prosseguir na construção do conceito de grandeza. De salientar que nas colunas dois e quatro estão indicadas actividades de dois níveis diferentes. No primeiro nível trabalha-se com objectos e no segundo nível com classes de objectos.

Nos Quadros XLIV e XLV estão representadas as diferentes etapas para os casos particulares das grandezas comprimento e capacidade, respectivamente.

Quadro XLIII – Diferentes etapas para o conceito de grandeza

Situação	Actividade I	Partição	Actividade II	Quantidades ordenadas
Objectos para comparar	Comparação de objectos dois a dois. Constituição de classes de equivalência	Classe de objectos da mesma grandeza - cada classe é uma quantidade	Ordenação das classes (a partir da comparação de objectos)	Classes ordenadas - cada classe é uma quantidade

Quadro XLIV – Diferentes etapas para a grandeza comprimento

Situação	Actividade I	Partição	Actividade II	Quantidades ordenadas
Segmentos. Barras de madeira, cordas, fios, ...	Comparação de objectos dois a dois, segundo o critério 'é tão comprido como'	Classe de objectos do mesmo comprimento. Cada classe define um comprimento	Comparação dois a dois de representantes das diferentes classes. Ordenam-se os comprimentos	Comprimentos ordenados

Quadro XLV – Diferentes etapas para a grandeza capacidade

Situação	Actividade I	Partição	Actividade II	Quantidades ordenadas
Recipientes, Copos, jarras, frascos, ...	Vasar de uns para outros. Comparação segundo o critério 'tem a mesma capacidade que'	Classe de objectos de igual capacidade. Cada classe define uma capacidade.	Comparação dois a dois de representantes das diferentes classes. Ordenam-se as capacidades.	Capacidades ordenadas.

Os alunos devem começar por tomar contacto com situações que os levem a descobrir as grandezas físicas, consideradas e percebidas como atributos ou propriedades de grupos de objectos que são comparados directamente através dos sentidos ou indirectamente com a ajuda de materiais ou instrumentos adequados (por exemplo, a balança). Para uma dada grandeza devem ser realizados os seguintes passos:

- considerar a grandeza como uma propriedade de um grupo de objectos, independentemente de outras propriedades que também possam ter;
- compreender a ideia que existem invariantes num dado objecto, isto é há algo que permanece constante, por exemplo o comprimento de um objecto não muda quando se altera a sua posição – Conservação de uma grandeza;
- ordenar em relação a uma dada grandeza, isto é, ser capaz de ordenar objectos tendo em conta unicamente a grandeza considerada;
- estabelecer uma relação entre a grandeza e o número, isto é, ser capaz de medir.

Por exemplo, para a grandeza massa, temos:

- considerar a massa como uma propriedade distinta de outras que um dado objecto possa ter;
- constatar que quando o objecto muda de posição, de forma, etc, a característica que se está a avaliar – a massa – permanece invariante;

- ordenar diferentes objectos de acordo com a sua massa, fazendo um raciocínio do tipo: 'este é menos pesado que aquele', 'este é mais pesado que aquele', 'este tem o mesmo peso que aquele';
- ser capaz de associar a um dado objecto um número, que é a sua massa³.

² Conseguir ordenar vários objectos pressupõe o domínio da propriedade transitiva: Se A pesa mais que B e B pesa mais que C, então A pesa mais que C.

³ Quando o aluno sente como importante o saber dizer, com alguma exactidão, quanto pesa um dado objecto, é preciso associar-lhe um número, o que implica a adopção de uma unidade de medida para chegar a que um dado objecto pesa, por exemplo, 5 kg.

A aquisição do conceito de grandeza pode ser facilitada se os alunos realizarem muitas actividades de ordenação e classificação. Estas podem ser feitas desde o pré-escolar utilizando diferentes materiais (barras Cuisenaire, fios de diferentes tamanhos, balanças de pratos, vasilhas de diferentes dimensões, etc.). Estas actividades favorecem a aquisição da conservação das respectivas grandezas. Não faz sentido abordar a medida de uma grandeza se a criança ainda não é capaz de compreender a equivalência de dois objectos, do ponto de vista da grandeza considerada.

A medida é usada hoje em múltiplas actividades no nosso dia a dia e é indispensável em muitos sectores, nomeadamente no comércio ou na construção civil. A medida é fundamental no desenvolvimento científico e na comunicação de muitas das suas descobertas. A maioria das profissões exige a medida de uma forma ou de outra. Estes usos variam em termos de escalas, códigos, numerais, etc. Por exemplo, a dureza da água é medida em termos de conteúdo mineral, a intensidade dos tremores de terra é medida em termos de escala de Richter, e a dureza da rocha é medida pela escala de Mohs, as temperaturas do forno ou da casa são medidas por um termómetro e podem ser controladas por um termóstato. Na vida do dia a dia as pessoas pesam-se, medem comprimentos de fios para diversos fins, marcam espaços nos quintais para fazerem plantações, etc. Pode dizer-se que medir constitui diferentes coisas para diferentes pessoas e profissões.

9.3 Aquisição do conceito de medida

Aspectos básicos de medida incluem a comparação directa (dois ou três objectos), ordenação (ou seriação), comparação indirecta, transitividade e conservação.

9.3.1 *Comparação directa e indirecta*

O fundamento de toda a medição é a comparação directa, pondo dois e depois mais do que dois objectos (ou acontecimentos) ordenados de acordo com o atributo em questão. Dois objectos são colocados lado a lado e os alunos determinam qual é o mais curto e qual o mais comprido. Dois objectos são colocados nos pratos de uma balança e determina-se qual o mais pesado e qual o mais leve. A água é vazada de um contentor para outro para determinar qual leva mais e qual leva menos. Dois alunos começam ao mesmo tempo a realizar determinada tarefa e observa-se quem leva mais e quem leva menos tempo. Esta fase não envolve unidades. A comparação directa leva à ordenação de dois ou mais objectos.

A primeira actividade de classificação envolve a comparação de objectos com objectivo de determinar se têm o mesmo tamanho em relação à grandeza considerada. Esta comparação pode ser feita usando os sentidos ou deslocando um dos objectos:

- Para o comprimento, a deslocação permite fazer coincidir um dos extremos de duas tiras de cartão e observar qual delas é mais comprida;
- Para comparar dois objectos em relação à massa, utilizam-se as mãos como se fossem os pratos de uma balança;
- Para comparar a capacidade de duas vasilhas, enche-se uma delas de água e vaza-se para a outra, vendo se é suficiente para a encher, se sobra ou se falta;
- Para comparar a área de duas superfícies, sobrepõem-se as duas ou pavimenta-se uma delas com a outra.

Mas nem sempre é possível fazer comparação directa entre dois objectos. Por exemplo, a comparação do comprimento de duas salas de aula tem de fazer-se de modo indirecto.

Na comparação indirecta podemos identificar três métodos. Temos, por exemplo, no caso do comprimento:

- Utiliza-se uma fita de papel, corda ou fio que possa ser marcado. Ajusta-se a corda aos comprimentos a medir e fazem-se marcas distintas, de forma que basta observar a disposição das marcas na corda para ver qual é o comprimento maior.
- Dispõe-se de uma quantidade suficiente de objectos de igual comprimento: fósforos, lápis, palitos, etc. O comprimento de cada um dos objectos que se quer comparar cobre-se com estes objectos.

Basta comparar o número de objectos utilizados para cada um deles, isto é, a comparação passa a ser do tipo numérico. Os objectos utilizados devem ser tais que permitam distinguir os dois comprimentos, ou seja, não pode acontecer que os dois comprimentos fiquem entre o mesmo número de objectos. Por exemplo, se o comprimento do objecto utilizado for c e os comprimentos a comparar l e l' , se $5c < l < 6c$ e o mesmo para l' , o objecto utilizado não tem um comprimento adequado para permitir fazer a comparação entre os dois comprimentos.

- Usam-se medidas antropométricas, como os pés, os palmos, os dedos, etc. Existem alguns problemas com esta utilização, que se prendem com o facto do palmo não ser sempre do mesmo tamanho (a mão não está sempre igualmente esticada), há dificuldade nas sobreposições, etc.

A comparação indirecta pressupõe o domínio da propriedade transitiva, isto é, perceber que se a tem o mesmo comprimento que b e b tem o mesmo comprimento que c , então a e c têm o mesmo comprimento. Na perspectiva piagetiana⁴ são definidas três etapas no desenvolvimento do conceito de medida (Quadro XLVI).

⁴ Indicada, por exemplo, em Piaget, Inhelder e Szeminska (1960).

Quadro XLVI – Etapas do desenvolvimento do conceito de medida para Piaget

1. Comparação perceptiva directa entre dois objectos sem recorrer a nenhuma medida comum nem a nenhum deslocamento dos objectos, apenas através do olhar ou pela utilização de algumas partes do corpo;
2. Deslocamento dos objectos aproximando-os um do outro de forma a poder compará-los mais facilmente ou utilização de um meio auxiliar como partes do seu corpo: dedos, palmos, pés, etc. Não se trata ainda de uma unidade de medida, mas é um passo nessa direcção.
3. Utilização operacional da propriedade transitiva: A mede o mesmo que B e B mede o mesmo que C, então A mede o mesmo que C. Esta etapa implica a conservação das grandezas ou das quantidades das grandezas. Nesta altura começa a perceber-se a ideia de unidade.

9.3.2 *A unidade de medida*

Como já foi referido, para que a criança possa medir tem de ter a conservação da grandeza correspondente. Deve ter também a noção de subdivisão, pois o objecto a medir é dividido em subunidades do mesmo tamanho. Podemos identificar cinco passos para a aquisição do conceito de unidade:

1. *Ausência de unidade:* A primeira medida realizada pelas crianças é puramente visual e comparativa. Assim as crianças são capazes de comparar dois objectos directamente, mas se se introduz um terceiro objecto a situação complica-se.
2. *Unidade ligada a um objecto:* É uma unidade ligada a um único objecto e claramente relacionada com o que deve medir-se.
3. *Unidade ligada à situação:* A unidade depende fortemente do objecto a medir mas pode mudar de um objecto para outro sempre que para cada um se realize a medição e se conserve uma certa relação, pelo menos na ordem de grandeza entre as unidades respectivas.
4. *Unidade figural:* Aqui a unidade a construir vai perdendo toda a relação com o objecto a medir, inclusive na ordem de grandeza, permanecendo ainda uma certa tendência para medir objectos grandes com unidades grandes e objectos pequenos com unidades pequenas.
5. *Unidade propriamente dita:* A unidade é totalmente livre da figura ou objecto considerado, tanto na forma como no tamanho e usa-se uma mesma unidade para medir todas as figuras ou objectos. Ter-se-á como resultado da medida um número.

9.3.3 *Afinal o que é medir?*

Podemos dizer que **medir** é uma síntese das operações de mudar de posição e de subdividir. Este processo corresponde a atribuir a uma quantidade de uma grandeza um número real. O processo de medir consiste em comparar uma quantidade dada de comprimento, massa, volume etc., com o comprimento, massa ou volume de um dado objecto a que chamamos unidade, permitindo associar um número a uma quantidade de grandeza. Trata-se de tornar comparáveis através dos números quantidades de grandeza do mesmo tipo, de forma que as relações entre as grandezas e as suas medidas sejam as mesmas. Espera-se que a objectos de igual quantidade de grandeza (igual comprimento, igual massa, etc.) corresponda o mesmo número e que uma

vez fixada a unidade de medida, a medida seja única para essa quantidade de grandeza.

Na prática, para medir utilizam-se instrumentos como termómetros, balanças, réguas, etc. A medição pode ser directa no caso do comprimento, da área, do volume ou da massa. A temperatura mede-se duma forma indirecta, isto é, num termómetro graduado mede-se na realidade o comprimento entre as marcas feitas nesse termómetro. O mesmo acontece com o tempo que é medido pelo ângulo percorrido pelos ponteiros do relógio, pelo comprimento que ardeu da vela ou pela quantidade de areia que caiu – o tempo é uma grandeza que está associada a processos e não se pode materializar em objectos físicos. Também as grandezas derivadas, que se definem a partir de outras grandezas, como a densidade, a velocidade e a maioria das grandezas usadas em Física não se podem medir directamente, mas não são objecto de estudo no 1º ciclo do ensino básico.

Um aspecto que desde cedo os alunos se devem aperceber é que a medida de uma dada grandeza pode ser mais ou menos rigorosa mas é sempre uma medida aproximada. Quando medimos comprimento, massa, volume, etc, o rigor da medida pode ser maior ou menor, dependendo do nível de precisão do instrumento utilizado, mas não é correcto falar de medida exacta.

9.4 Exemplos de grandezas

9.4.1 *Comprimento*

Antes das crianças começarem a medir comprimentos de objectos ou distâncias entre objectos devem desenvolver um conjunto importante de destrezas e conceitos. Actividades de classificação podem ser usadas num nível intuitivo para definir comprimento como uma característica de um objecto. Deve ser introduzida a terminologia adequada: 'tão comprido como', 'mais comprido que', 'mais curto que'. Respostas a perguntas como: Que comprimento? Quanto dista de? exigem aprender como medir para a unidade mais próxima. Destrezas de medida são desenvolvidas quando as crianças aprendem a medir com partes do seu corpo, com objectos da sua sala (unidades arbitrarias) e, por fim, com unidades estandardizadas comuns. As crianças devem construir instrumentos para medir comprimentos e utilizá-los, por exemplo tiras de cartão, folhas de papel, fios, etc. Estas actividades fazem com que elas se familiarizem com unidades de medida de comprimento.

É necessário ter em conta algumas ideias básicas:

- um número e um só é atribuído por contagem para descrever o comprimento de um segmento. Em vez de contar repetidamente, desenvolvemos e lemos escalas ou instrumentos calibrados que fazem a contagem por nós.
- a um segmento de recta, ou a um objecto linear, pode ser atribuído o comprimento 1. Isto torna possível o desenho de um instrumento de medida ou de uma régua.
- a aditividade permite ao comprimento ser tratado como um número. Assim, podemos adicionar segmentos de recta como adicionamos números.
- a iteração, ou seja, a aplicação repetida de uma unidade, é o que permite utilizar uma recta numérica ou uma régua para obter a distância entre dois pontos de um segmento.
- a transitividade permite-nos comparar segmentos. Sabemos por exemplo que se a Ana é mais alta que o Pedro e o Pedro é mais alto que o Tiago, a Ana é mais alta que o Tiago.

Estas ideias não são compreendidas por crianças muito jovens. É preciso começar por usar unidades não estandardizadas para desenvolver noções intuitivas, incluindo a ideia básica de 'unidade de medida'.

9.4.2 Área

O conceito de área corresponde à cobertura de uma superfície com uma unidade repetida, de forma a pavimentar essa superfície, isto é, não deixar buracos nem fazer sobreposições.

Fazer pavimentações pode ser uma boa preparação para o conceito de área. Deve começar-se por discutir quais as formas que pavimentam e as que não pavimentam. Devem usar-se formas regulares e irregulares para pavimentar. Deve também experimentar-se pavimentar com círculos ou outras formas não poligonais e perceber que ficam buracos.

Experiências de recortar figuras feitas em papel e juntar as partes de outra forma de modo a fazer uma nova figura, ajudam as crianças a concluir que as figuras são equivalentes, isto é, têm a mesma área.

Com as sete peças do tangram podem fazer-se novas figuras e perceber que todas as figuras obtidas têm a mesma área, uma vez que todas são formadas pelas mesmas sete peças.

Também o desenhar figuras no geoplano, identificar a unidade de área e concluir qual a área de cada uma das figuras, identificando figuras equivalentes ou não equivalentes podem ser actividades importantes para a formação do conceito de área de uma figura.

Desenhar figuras equivalentes em papel quadriculado ou triangular⁵ são experiências que contribuem positivamente para a aquisição do conceito de área (Figura 20).

⁵ O papel triangular, como o nome indica, é papel que previamente foi dividido em triângulos equiláteros, tal como o papel quadriculado está dividido em quadrados. Existem outros tipos de 'papel', nomeadamente divididos em paralelogramos, em rectângulos, etc.

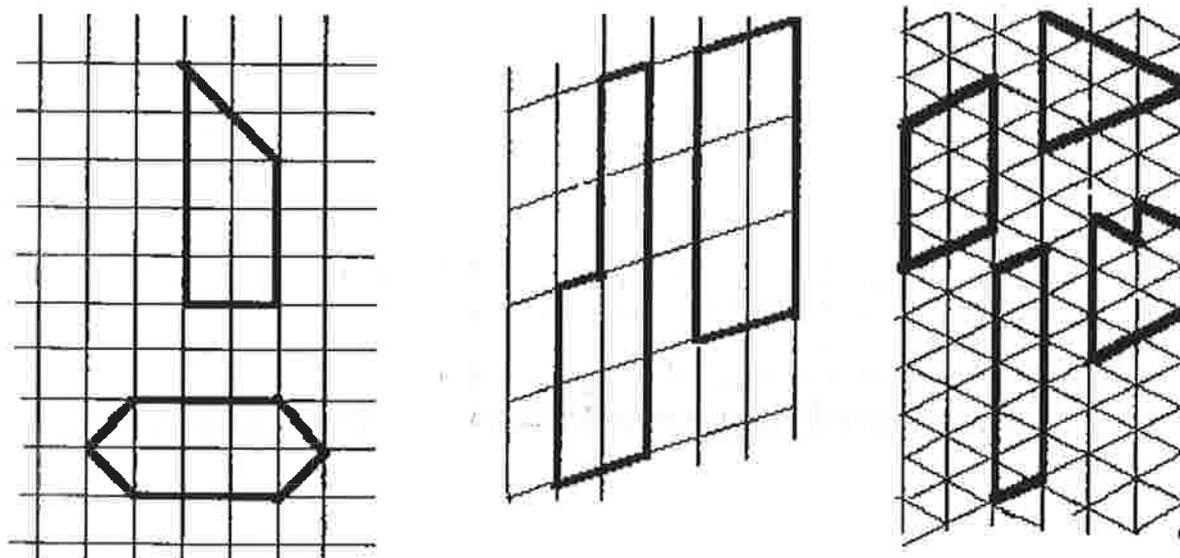


Figura 20 - Exemplos de figuras equivalentes.

Depois de ter sido compreendido que a medida da área de uma superfície é dada pelo número de figuras que a cobrem, podem ser introduzidas as unidades standardizadas: o decímetro quadrado, o metro quadrado e o centímetro quadrado⁶.

É fácil as crianças acharem a área de um rectângulo quando este tem um número inteiro de linhas, cada uma formada por um número inteiro de quadrados. Por exemplo, no rectângulo da Figura 21 não é necessário contar os rectângulos um a um: 3 linhas cada uma com 5 quadrados dá 15 quadrados ao todo.

⁶ Normalmente a unidade de medida que se introduz em primeiro lugar é o decímetro quadrado — um quadrado com 1 dm de lado. A partir da junção de decímetros quadrados pode chegar-se ao metro quadrado. O centímetro quadrado aparece através da subdivisão do decímetro quadrado.



Figura 21 – Rectângulo de área 15.

Em geral os rectângulos não têm lados com um número exacto de medidas de comprimento, mas é possível medir a área da sua superfície. Por exemplo se um rectângulo tem 12 cm por 20 cm a área é 240 cm². Como existem 100 cm² num dm², esta área é também 2,4 dm² (Figura 22).

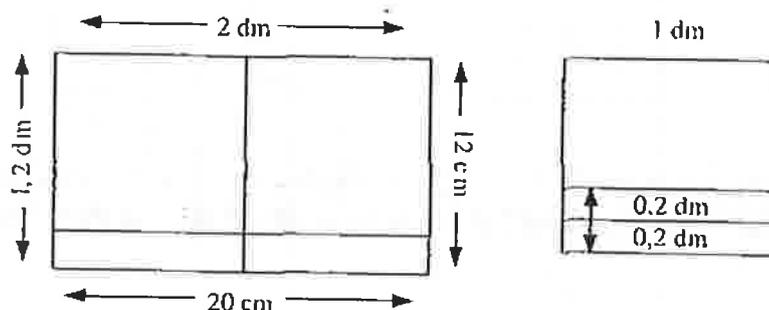


Figura 22 – Representação da área em duas unidades diferentes.

Se os lados do rectângulo são medidos em decímetros, os seus lados são 1,2 dm e 2 dm. Como

$$1,2 \times 2 = 2,4$$

a área do rectângulo é:

$$1,2 \times 2 \text{ dm}^2 = 2,4 \text{ dm}^2$$

Para calcular a área de um quadrado o processo é semelhante.

9.4.3 *Volume e Capacidade*

Volume é o espaço ocupado por um corpo sólido. Experiências como mergulhar corpos em líquidos contidos em vasos permitem reconhecer o volume – através da subida do líquido no vaso. Experiências sucessivas de mergulhar vários sólidos num vaso marcando o nível de subida do líquido permitem comparar os volumes de diferentes corpos.

Com cubos de encaixar ou com os cubos do material Cuisenaire é possível construir sólidos equivalentes com diferentes formas mas com o mesmo volume (Figura 23):

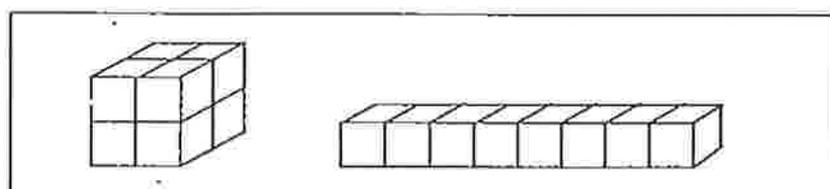


Figura 23 – Sólidos equivalentes

A capacidade é muitas vezes confundida com o volume e, por vezes, as crianças têm dificuldade em separar o volume de um objecto do seu peso. Enquanto que volume de um objecto é a quantidade de espaço que ocupa, a capacidade é a quantidade de espaço ou de líquido que pode conter.

9.4.4 *Massa*

A compreensão da grandeza massa requer que as crianças compreendam e reconheçam palavras como pesado, leve, em equilíbrio, etc. Para que isso aconteça têm de envolver-se em muitas experiências práticas. Existe aqui um problema de linguagem uma vez que a palavra correcta é massa, mas na linguagem comum utiliza-se a palavra peso e fala-se de objectos mais pesados e menos pesados ou mais leves. Na realidade existem duas grandezas: a grandeza massa que se define como a quantidade de matéria que um corpo contém e que é uma grandeza absoluta, isto é não varia com o local da Terra onde o corpo se encontra; a grandeza peso que é definida como a força que atrai um corpo para a Terra e que muda conforme o lugar em que nos encontramos.

Através de uma balança de pratos é possível fazer muitas actividades de comparação:

- Encontrar objectos mais leves ou mais pesados do que um dado objecto. Coloca-se num dos pratos da balança um dado objecto e no outro vão-se colocando objectos e verificando se são mais leves ou mais pesados. Trata-se de uma actividade de comparação directa. Não é fácil encontrar objectos que tenham o mesmo peso – podemos consegui-lo através de múltiplas actividades de comparação por tentativa e erro. É preciso que as crianças tenham compreendido que há objectos mais pesados, menos pesados e igualmente pesados, para poderem chegar à noção de unidade de peso.
- Pedir às crianças para encontrarem tantas coisas diferentes quanto possível que tenham o mesmo peso, mas de diferentes tamanhos e formas. Podem agora fazer comparações entre os diferentes objectos utilizando unidades de peso. Trata-se de fazer comparações indirectas – este objecto pesa 6 unidades e aquele pesa 8 unidades, portanto o primeiro é mais leve que o segundo.

A introdução das unidades standardizadas pode ser também feita através das balanças com a vantagem de se poderem ver e manipular os pesos.

9.4.5 *Tempo*

O tempo é uma das grandezas mais difíceis para ensinar porque é intangível e contínua. As crianças tem alguma dificuldade em perceber as noções de 'futuro' e de 'passado'.

O ritmo é um padrão repetido de tempo e para medir tempo devemos fazer uso desta repetição. É importante analisar com as crianças os ritmos diários: o dia e a noite, as refeições, o levantar e deitar.

A capacidade de medir o tempo não se desenvolve até que a criança perceba que os acontecimentos são separados por intervalos de tempo. Na verdade, a noção de *intervalo de tempo*, isto é o espaço de tempo ocupado por uma actividade ou o tempo que vai de um instante a outro é uma ideia-chave que ela tem de perceber.

Na medida do tempo é preciso estar consciente da diferença entre tempo subjectivo e tempo objectivo. Tempo objectivo é o que nos é dado por um instrumento de medida, por exemplo, o relógio. Tempo subjectivo é como o

sentimos. Se estamos a realizar uma actividade interessante cinco minutos passam rápido, mas se a actividade for desinteressante acontecerá o oposto.

9.4.6 Dinheiro

Para uma criança o dinheiro não tem nenhuma ligação com a medida. O dinheiro é usado para comprar aquilo que ela quer, indica o número de moedas exigidas em troca de um gelado ou de uma pastilha. Por isso, a grandeza dinheiro deve ser tratada de modo diferentes das outras. O professor deve partir do princípio que há um certo número de moedas que já são familiares às crianças e estas devem compreender as relações entre elas e perceber quantas moedas de um tipo são equivalentes a outra ou são necessárias para completar um dado preço.

9.5 Estimação

Na maioria dos casos da vida corrente não necessitamos de saber com grande precisão a medida de um objecto, basta enquadrá-la (“está entre tanto e tanto”) ou dar aproximações (“é à volta de”). Mas, assim como medir é uma técnica que se vai aperfeiçoando através da prática, fazer aproximações é algo a que a escola deve dar atenção.

A estimação⁷ desenvolve-se através de actividades práticas de medida de objectos reais de forma a que o erro cometido vá diminuindo com o número de estimações realizadas.

Deve trabalhar-se a estimação com as crianças antes delas terem medido com unidades e depois de terem usado o sistema estandardizado de unidades de medida. No primeiro caso o objectivo é o de fazer comparações directas de objectos que conduzem às comparações indirectas e ao uso de unidades. Saber estimar quando já se conhece um sistema de medidas é indispensável na vida do dia a dia. Por exemplo, quando temos de indicar medidas aproximadas sem utilizar instrumentos de medida.

Devem ser aproveitadas todas as oportunidades de praticar a estimação de comprimentos, alturas, larguras e distâncias, volumes e capacidades, e massas. Uma forma de melhorar as estimativas é arranjar itens de referência (Quadro XLVII).

⁷ A estimação que é tratada aqui é a estimação de medida. Outros tipos de estimação foram referidos na secção 7.6 do Capítulo 7.

Quadro XLVII – Itens de referência para melhorar as estimativas

-
- Um dedo duma criança tem cerca de 1 cm de largura;
 - Uma folha de papel A4 tem cerca de 21 cm por 30 cm;
 - A porta da sala de aula tem à volta de 200 cm ou 2 m de altura;
 - A massa de um pacote individual de batatas fritas é de 50 g;
 - Uma lata de bebida tem a capacidade de 330 ml;
 - Uma garrafa vulgar leva 750 ml de vinho;
 - Os pacotes habituais de leite são de 1 l;
 - Um litro de água tem a massa de um quilograma (1000g).
-

O professor deve ajudar as crianças a desenvolverem estratégias de estimação. Apresentam-se algumas estratégias de estimação, tomando como exemplo o comprimento:

- Visualizar a unidade que se vai usar na estimação e repeti-la mentalmente sobre o objecto a medir;
- Comparar o comprimento a medir com o comprimento de um objecto conhecido;
- Servir-se de objectos iguais regularmente distribuídos ao longo de um comprimento;
- Achar metades. Se o comprimento a estimar é demasiado grande estima-se a metade. Se esta ainda for grande, estima-se a metade e assim enquanto for preciso.

Os alunos devem praticar os diferentes métodos e escolher em cada caso a estratégia que mais se adapta à situação concreta. A estimação baseia-se na escolha de uma unidade adequada e na sua contagem. Por exemplo, para estimar o comprimento da sala de aula ou a distância entre a sala e o recreio pode-se imaginar mentalmente o que será um metro e contar o número de metros que cabem nesse comprimento.

Tarefas

1. Faça um esquema semelhante ao apresentado no Quadro XLI para a grandeza área.
2. Organize uma sequência de actividades a desenvolver com crianças do 1º ciclo para desenvolver o conceito de medida e de unidade de medida
3. Identifique os aspectos fundamentais a desenvolver com os alunos para a aquisição da grandeza capacidade.
4. Enumere ideias relevantes que se relacionam com a estimação de medidas.

Leituras recomendadas

FERREIRA, I. C.

1998 A estimativa no 1º ciclo do ensino básico, in *Educação e Matemática*, 46, pp. 16-19.

MENDES, A., E GIRALDES, B.

1989 Estimação e medidas, in *Actas do ProfMat 89* (pp. 113 -120). Lisboa: APM.

