MAP5729 - Introdução à Análise Numérica

$1^{\underline{o}}$ Semestre de 2013

$1^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios

Exercício 1 Considere os sistemas lineares abaixo representados pelas respectivas matrizes aumentadas:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right] \quad \text{e} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right].$$

Usando o método de eliminação de Gauss, estude a existência e unicidade de soluções para estes sistemas.

Exercício 2 Calcule a decomposição LU de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -6 \\ -3 & 4 & 7 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

e verifique que $A = LU$.

Exercício 3 Usando o método de eliminação de Gauss com trocas de linhas, calcule uma decomposição $P^T LU$ de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -4 & -12 & 11 \\ 3 & 14 & -16 \end{bmatrix}$$

e verifique que $PA = LU$.

Exercício 4 A decomposição $PA = LU$ de uma matriz 3×3 é dada por:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; \text{e} \; U = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

a) Usando a decomposição acima, resolva o sistema linear $Ax = b$, onde $b = [\ 1 \quad 2 \quad -1\ ]^T$.

b) Obtenha a matriz A.

Exercício 5 Considere o sistema linear

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 6x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & & & = & 7 \\ x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & - & x_4 & = & -1 \\ -x_1 & & & - & x_3 & + & 3x_4 & = & -2 \end{array}$$

cuja matriz é simétrica definida positiva.

a) Obtenha a fatoração de Cholesky da matriz e resolva o sistema linear por substituições progressiva e regressiva.

b) Obtenha a fatoração LDL^T da matriz e resolva o sistema linear por substituições progressiva e regressiva.

Exercício 6 Usando a decomposição LDL^T, determine para que valores de α a matriz simétrica

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & 4 & -3 \\ -2 & 4 & -3 & \alpha \end{bmatrix}$$

é definida positiva.

Exercício 7 Dizemos que uma matriz A tem estrutura de banda, com banda inferior b_L e banda superior b_U, se $a_{ij} = 0$ quando $i - j > b_L$ ou $j - i > b_U$. Suponha que A é uma matriz de banda com bandas inferior b_L e superior b_U, e que a decomposição LU de A pode ser feita sem trocas de linhas. Mostre que L tem banda inferior b_L e U tem banda superior b_U.

Exercício 8 Uma matriz tridiagonal é uma matriz de banda com $b_L = b_U = 1$. Se $M_{n\times n}$ é tridiagonal, ela pode ser armazenada usando-se três vetores a, b e c da seguinte forma: $M_{i,i-1} = a_i$, $2 \leq i \leq n$, $M_{ii} = b_i$, $1 \leq i \leq n$, e $M_{i,i+1} = c_i$, $1 \leq i \leq n-1$.

a) Deduza as fórmulas para a decomposição LU de M em termos dos vetores a, b e c.

b) Usando a decomposição acima, mostre como resolver um sistema linear $Mx = d$.

c) Calcule o número de operações aritméticas para se obter a decomposição LU de M, e para se resolver o sistema linear.

Exercício 9 Suponha que $A_{n\times n}$ é uma matriz de banda com bandas b_L e b_U, e que a decomposição LU de A possa ser feita sem trocas de linhas. Se b_L e b_U forem pequenos comparados com n, mostre que o número de operações aritméticas para se obter a decomposição LU é da ordem de $2n \cdot b_L \cdot b_U$, e que o número total de operações aritméticas para se resolver $Ax = b$ é da ordem de $2n \cdot (b_L \cdot b_U + b_L + b_U)$.

Exercício 10 Sejam $D = \text{diag}(d_1, \cdots, d_n)$ uma matriz diagonal $n \times n$ e A uma matriz $n \times n$. Prove que $(DA)_{ij} = d_i\, a_{ij}$ e $(AD)_{ij} = d_j\, a_{ij}$, $1 \leq i, j \leq n$.

Exercício 11 Demosnstre os seguintes resultados:

a) Se U e V são matrizes triangulares superiores quadradas, então UV é uma matriz triangular superior.

b) Se U é uma matriz triangular superior quadrada, então o determinante de U é o produto dos elementos da sua diagonal (portanto U é inversível se e somente se os elementos da sua diagonal são diferentes de zero).

c) Se U é uma matriz triangular superior quadrada inversível, então U^{-1} é uma matriz triangular superior e $(U^{-1})_{ii} = 1/u_{ii}$, $1 \leq i \leq n$ (portanto, se U é uma matriz triangular superior quadrada, cujos elementos diagonais são iguais a 1, então U^{-1} é triangular superior com 1 na diagonal).

d) Se U e V são matrizes triangulares superiores quadradas, com elementos diagonais iguais a 1, então UV é triangular superior com 1 na diagonal.

d) Enuncie e demonstre resultados análogos para matrizes triangulares inferiores.

Exercício 12 Seja V um espaço vetorial munido de uma norma $\| \ \|$. Prove que $\|u \pm v\| \geq | \ \|u\| - \|v\| \ |$ para todos u e v em V.

Exercício 13 Calcule $\|x\|_1$, $\|x\|_2$ e $\|x\|_\infty$ onde $x = [\ 2 \quad -5 \quad 5\ ]^T$.

Exercício 14 Calcule as normas subordinadas $\|A\|_1$ e $\|A\|_\infty$ onde A é a matriz do Exercício 2.

Exercício 15 Denote por $A(i : j, k : l)$ a submatriz de A formada pelos elementos que estão nas linhas i até j e colunas k até l. Mostre que se $A(1 : k, 1 : k)$ são não singulares para $1 \leq k \leq n$, onde n é a ordem da matriz A, então a decomposição LU de A pode ser obtida sem trocas de linhas.

Exercício 16 Suponha que A é uma matriz inversível e diagonal dominante. Prove que é possível obter a decomposição LU de A sem trocas de linhas (Sugestão: prove que se A é diagonal dominante e inversível, então $a_{11} \neq 0$. Depois, prove por indução que em cada etapa k da triangularização, a submatriz $(n - k) \times (n - k)$ é diagonal dominante e inversível).

Exercício 17 Suponha que A é uma matriz inversível tal que a sua transposta é diagonal dominante. Mostre que é possível obter a decomposição LU de A sem trocas de linhas, e que $|l_{ij}| \leq 1$.

Exercício 18 Para $x \in R^n$ defina

$$||x||_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty \quad \text{e} \quad ||x||_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

Mostre que $|| \bullet ||_p$ são normas em R^n, $1 \leq p \leq \infty$ e que

$$\lim_{p \to \infty} ||x||_p = ||x||_\infty.$$

Exercício 19 Demonstre as desigualdades

$||x||_\infty \leq ||x||_2 \leq ||x_1||$,

$||x||_2 \leq \sqrt{n}||x||_\infty$, e

$||x||_1 \leq \sqrt{n}||x||_2$,

onde $x \in R^n$. Pode ocorrer a igualdade em cada uma das relações acima?

Exercício 20 Considere uma norma em R^n. Prove que a sua norma subordinada é de fato uma norma no espaço vetorial das matrizes reais de ordem n, e que ela é consistente e submultiplicativa.

Exercício 21 Deduza a fórmula para a norma subordinada à norma $|| \bullet ||_1$ em termos dos coeficientes da matriz.

Exercício 22 Mostre que a norma de Frobenius de uma matriz é submultiplicativa e é consistente com a norma $|| \bullet ||_2$.

Exercício 23 Demonstre as seguintes relações para o número de condição de matrizes de ordem n, com a norma subordinada:

(a) $\kappa(AB) \leq \kappa(A)\kappa(B)$;

(b) $\kappa(cA) = \kappa(A)$, para todo $c \in R$;

(c) $\kappa_2(V) = 1$ para qualquer matriz *ortogonal* V;

(d) $\kappa_2(VA) = \kappa_2(A)$ se V é uma matriz ortogonal;

(e) $\frac{1}{n}\kappa_2(A) \leq \kappa_1(A) \leq n\kappa_2(A)$;

(f) $\frac{1}{n}\kappa_\infty(A) \leq \kappa_2(A) \leq n\kappa_\infty(A)$;

(g) $\frac{1}{n^2}\kappa_1(A) \leq \kappa_\infty(A) \leq n^2\kappa_1(A)$.

Exercício 24 A matriz de Frobenius G_j que é usada na etapa j do método de eliminação de Gauss pode ser representada na forma

$$G_j = I - \sum_{i=j+1}^{n} l_{ij} e_i e_j^T,$$

onde I é a matriz identidade e e_k é o k-ésimo vetor da base canônica do R^n. Usando a representação acima, prove que

$$G_j^{-1} = I + \sum_{i=j+1}^{n} l_{ij} e_i e_j^T.$$

Exercício 25 Seja A uma matriz $n \times n$ inversível tal que os elementos de A^{-1} são maiores ou iguais a zero. Prove que $||A^{-1}||_\infty = ||v||_\infty$, onde

$$Av = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$