# Universidade de São Paulo
# Escola de Engenharia de Lorena-EEL

**LISTA AULA 3**: Cálculo III — Teorema de Mudança de variáveis e Aplicações.

**Professor**: Juan Fernando Zapata Zapata — **Data**:17 de agosto de 2016

1. Considere o paralelogramo $R$ limitado pelas retas

$$\begin{aligned} ax+by &= \alpha \qquad & cx+dy &= \gamma \\ ax+by &= \beta \qquad & cx+dy &= \delta \end{aligned}$$

onde $ad-bc \neq 0$. Suponha que queremos calcular a integral dupla da função $f(x,y)$ sobre $R$ introduzindo novas variáveis

$$u = ax+by \quad \text{e} \quad v = cx+dy.$$

Obtenha a região $S$ obtida no plano $uv$ e escriba de maneira explicita a formula do teorema de mudança de variáveis.

2. Calcule

$$\int\int_{\Omega} \frac{\sin(x-y)}{(2x+y+1)} \text{dxdy}$$

onde $\Omega$ é o paralelogramo de vértices $(0,0)$, $(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})$, $(\frac{2\pi}{3},\frac{-\pi}{3})$ e $(\frac{\pi}{3},\frac{-2\pi}{3})$.(Ayuda: Utilize a mudança de variáveis proposta no item anteriror)

3. Considere a região $R$ limitada pelas curvas

$$xy = \alpha \quad \text{e} \quad xy = \beta$$

e pelas retas

$$y = \gamma x \quad \text{e} \quad y = \delta x$$

onde $\alpha,\beta,\gamma,\delta \geq 0$. Suponha que queremos calcular a integral dupla da função $f(x,y)$ sobre $R$ introduzindo novas variáveis

$$u = xy \quad \text{e} \quad v = \frac{x}{y}.$$

Obtenha a região $S$ obtida no plano $uv$ e escriba de maneira explicita a formula do teorema de mudança de variáveis.

4. Calcule

$$\int\int_{\Omega} y^2 \text{dxdy}$$

onde $\Omega$ é a região plana cujo contorno é formado pelo gráfico das funções $xy=2, xy=3, y=3x$ e $y=2x$. (Ajuda: Utilize a mudança de variáveis proposta no item anteriror)

5. Em cada um dos items a seguir, calcular o volume do corpo limitado pelas superfícies dadas:

   a. $x + y + z = 6$, $x^2 + y^2 = 1$ e $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$.

   b. $z = e^{-x^2-y^2}$ e $x^2 + y^2 = 1$.

   c. $y = \ln x$, $y = \ln^2 x$, $x = 1$, $x = e$, $z = 0$ e $z = 3$.

   d. $x^2 + y^2 + z^2 = 6$, $z = x^2 + y^2$ e $z \geq 0$.

6. Em cada um dos items a seguir, calcular o volume do corpo limitado pelas superfícies dadas é aconselhado fazer mudança de variáveis nas integral duplas que apareçam no problema:

   a. $z = 2x^2 + y^2$, $z = 3$.

   b. $z = x^2 + 4y^2 - 2$ e $z = 2 - x^2 - 4y^2$.

   c. $2x^2 + 4y^2 + z^2 = 6$, $z = \sqrt{2x^2 + 3y^2}$ e $z \geq 0$.

7. Em cada um dos items, utilizar integrais duplas para calcular a área da região limitada pelas curvas dadas:

   a. $y = \ln x$, $y = \ln^2 x$.

   b. $y = \ln x$, $y = -\ln x$ e $x = e$.

   c. $(x^2 + y^2)^2 = x^3 - 3xy^2$, $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

   d. $(x^2 + y^2)^2 = x^3 + y^3$, $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

   e. $(x + y)^3 = xy$, $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

8. Utilize integrais duplas para calcular a área da região limitada pela curva dada em coordenadas polares pela equação:

   a. $r = 1 + \cos\theta$ (esta curva é conhecida como cardioide).

   b. $r = |\sin 2\theta|$ (esta curva é conhecida como rosa de quatro petalas).

9. Calcular a massa de uma lamina quadrada de lado 4cm, se a densidade da lamina no ponto $P$ é proporcional ao quadrádo da distância de $P$ ao centro da lámina, sabendo que em cada um dos seus vertices a densidade é $2\frac{gr}{cm^2}$.

10. Determinar o centro de massa da região plana homogênea (densidade constante) dada.

    a. A região limitada pelos gráficos de $y = x^2$ e $y = 5x - 6$.

    b. A região limitada pela curva fechada $y^2 = x^2 - x^4$ e $x \geq 0$.