Universidade de São Paulo
Escola de Engenharia de Lorena-EEL

LISTA AULA 2: Cálculo III — Teorema de existência, Integrais em retângulos

Professor: Juan Fernando Zapata Zapata — **Data**:10 de agosto de 2016

1. Suponha que $f(x,y)$ é uma função continua. Nos exercicios a continuação é dada uma região B do plano. Escreva a integral $\int\int_B f(x,y)dxdy$ como uma integral iterada dependendo se a região B é do tipo I ou II. Caso a região seja dos dois tipos escreva a expresão para ambos.

   a. B é a região limitada pelos eixos coordenados e a reta $y = 4 - 3x$.

   b. B é o tiângulo de vértices $(1,1)$ $(5,1)$ e $(5,6)$.

   c. B é a região determinada pelas desigualdades $x^2 \leq y$ e $y \leq \sqrt{x}$.

   d. $B = \{(x,y) : y^2 + 2 \leq x \leq y + 3\}$.

2. Nos exercicios a continuacão é dada uma região B do plano. Para calcular $\int\int_B f(x,y)dxdy$ é necessário expressar B como união de sub-regiões tipo I ou II , aplicar o teorema de Fubinni em cada sub-região e escrever $\int\int_B f(x,y)dxdy$ como a soma das integrais em cada sub-região. Escreva em cada casso a correspondente soma de integrais iteradas.

   a. B é o losango de vértices $(0,0)$ $(2,3)$, $(0,6)$ e $(-2,3)$.

   b. B é o quadrilatero com vértices $(1,0)$ $(10,1)$, $(7,5)$ e $(3,5)$.

   c. B é a região no plano determinada pela desigualdade $|x| + |y| \leq 1$

3. Em Cada um dos itens, explique porque a integral $\int\int_B f(x,y)dxdy$ existe e calcule o valor, se:

   a. $f(x,y) = x\cos(2x - y)$ e $B = \{(x,y) : x \in [1,2] \quad \text{e} \quad y \in [0,3]\}$.

   b. $f(x,y) = \dfrac{x^2}{y}$ e B é a região limitada pelas parábolas $y = x^2$ e $x = y^2$.

   c. $f(x,y) = e^{x+2y}$ e B é a região determinada pela desigualdade $|x| + |y| \leq 1$.

4. Considere a a transformação em coordenadas polares que relaciona cada ponto do plano $r\theta$ com o ponto do plano xy através da relação $P(r,\theta) = (x(r,\theta), y(r,\theta))$, onde $x(r,\theta) = r\cos\theta$ e $y(r,\theta) = \sin\theta$. Em cada um dos exemplos a seguir é dada uma região B no plano xy, determine a região S no plano $r\theta$ tal que $P(S) = B$ e faça um gráfico da situação.

   a. $B = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$.

   b. $B = \{(x,y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, \quad x \leq 0\}$.

   c. $B = \{(x,y) : (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$.

   d. $B = \{(x,y) : x^2 + (y-1)^2 \leq 4\}$.

e. $B = \{(x,y) : x^2 + y^2 + 4x \leq 0, y \geq 0\}$.

f. B é a região limitada pelas circunferências $x^2 + y^2 \leq 1$, $x^2 + y^2 \leq 3$ e as retas $y = x$ e $y = 3x$.

5. Utilizar mudança de coordenadas polares para calcular $\int\int_B \ln(x^2 + y^2 + 1) dxdy$, onde B é a região determinada pelo circulo $\{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$

6. Queremos calcular $\int\int_B \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dxdy$ onde B é a região limitada pela elipse $\{(x,y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$. para isto considere a mudaną de coordenadas $T(r,\theta) = (ar\cos\theta, br\sin\theta)$.

   a. Verifique que T satisfaz todas as condições do teorema de mudança de variáveis.

   b. Determine a região S no plano (r,θ) tal que $T(S) = B$.

   c. Calcule $\int\int_B \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dxdy$

7. Calcule a integral da função $f(x,y) = 1$ sobre a região $B = \{(x,y) : 4 \leq x^2 + 4y^2 \leq 16\}$. (Ajuda:Adapte a mudança de variáveis do exemplo anterior para ajudar nos cálculos)

8. Utilizar o teorema de mudança de variáveis para calcular $\int\int_B y dxdy$ onde B é o paralelogramo limitado pelas retas $y = x - 2$, $y = x + 1$, $y = 2 - x$ e $y = -x$.

9. Utilizar o teorema de mudança de variáveis para calcular $\int\int_B e^{x+2y} dxdy$ onde B é a região determinada pela desigualdade $|x| + |y| \leq 1$.

10. Calcular $\int\int_B \arctan\left(\frac{y}{x}\right) dxdy$, onde B é a região no primeiro quadrante limitada pelas circunferências $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$ e as retas $y = x$ e $y = \sqrt{3}x$.