Equivalência entre AFD e AFN

IBM1088 Linguagens Formais e Teoria da Computação

Evandro Eduardo Seron Ruiz
evandro@usp.br

Universidade de São Paulo

Frase do dia

Triste época! É mais fácil desintegrar um átomo do que um preconceito.

Albert Einstein[a]

[a] Físico alemão (1879 – 1955).

Objetivos

- Mostrar a equivalência entre AFD e AFN
- Destacar as idéias da prova de equivalência
- Procurar entendimento maior sobre autômatos

Conteúdo

1. Prólogo
2. A prova da equivalência
3. Exemplo
4. Exercícios

Recordando o último encontro...

Parece mas...

A inclusão do não-determinismo é, aparentemente, um acréscimo de capacidade de resolução aos AFD mas na realidade o não-determinismo não aumenta o seu poder computacional.

Recordando o último encontro...

Parece mas...

A inclusão do não-determinismo é, aparentemente, um acréscimo de capacidade de resolução aos AFD mas na realidade o não-determinismo não aumenta o seu poder computacional.

AFD equivalente

Assim, para cada AFN é possível construir um AFD equivalente que realiza as mesmas computações.
O contrário também é verdadeiro.

Equivalência

Teorema

A classe dos AFD é equivalente a classe dos AFN.

Equivalência

Teorema

A classe dos AFD é equivalente a classe dos AFN.

Idéia da prova: Se uma linguagem é reconhecida por um AFN mostraremos que existe um AFD que também reconhece esta linguagem.

Equivalência

Teorema

A classe dos AFD é equivalente a classe dos AFN.

Idéia da prova: Se uma linguagem é reconhecida por um AFN mostraremos que existe um AFD que também reconhece esta linguagem.

Como?

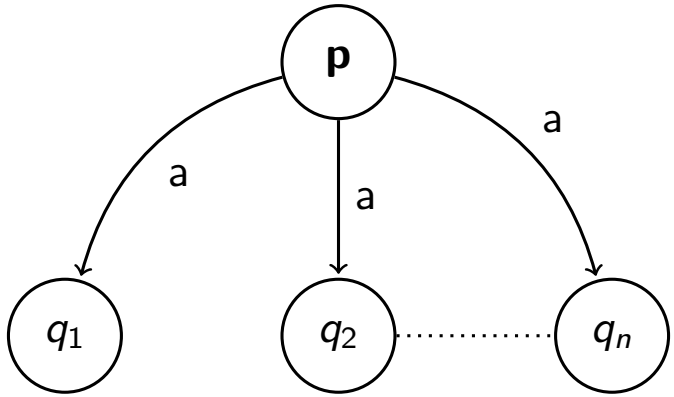
Mostraremos que existe um AFD para simular um AFN.
Idéia: converter um AFN num AFD

Recordando...

Partes de um conjunto

Seja $B = \{a, b\}, 2^B = P(B) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

Um AFN genérico



Se k for o número de estados num AFN, este AFN tem 2^k subconjuntos de estados possíveis.
Cada subconjunto corresponde a uma das possibilidades de transição do AFD, portanto o AFD simulado terá 2^k estados.

O que sabemos e o que precisamos conhecer

- Já conhecemos o conjunto de estados do AFD simulado, ou seja, $P(Q) = 2^Q$, que é o conjunto das partes de Q
- Agora precisamos conhecer:
  - O estado inicial;
  - Os estados de aceitação; e
  - A função de transição
- O vocabulário Σ deve permanecer o mesmo

O que sabemos e o que precisamos conhecer

- Já conhecemos o conjunto de estados do AFD simulado, ou seja, $P(Q) = 2^Q$, que é o conjunto das partes de Q
- Agora precisamos conhecer:
  - O estado inicial;
  - Os estados de aceitação; e
  - A função de transição
- O vocabulário Σ deve permanecer o mesmo
- Alguns detalhes ficarão para mais tarde
- Vejamos a prova, agora:

A prova

- Seja $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ o AFN que reconhece a linguagem A
- Vamos construir $M = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$, um AFD que também reconhece A
- Inicialmente vamos restringir o vocabulário para facilitar a demonstração

A prova

- Seja $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ o AFN que reconhece a linguagem A
- Vamos construir $M = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$, um AFD que também reconhece A
- Inicialmente vamos restringir o vocabulário para facilitar a demonstração

Caso 1: Usar $\Sigma^+ = \Sigma^* - \{\epsilon\}$, ou seja, nenhum movimento vazio será usado.

Montando o AFD

1. $Q' = P(Q) = 2^Q$, ou seja, como já vimos, é o conjunto de subconjuntos de Q

Montando o AFD

1. $Q' = P(Q) = 2^Q$, ou seja, como já vimos, é o conjunto de subconjuntos de Q
2. Seja R é um estado de AFD
   Para $R \in Q'$ e $a \in \Sigma$ seja
   $\delta'(R, a) = \{q \in Q \mid q \in \delta(r, a), \text{ para algum } r \in R\}$
   Se R é um estado de M é também um conjunto de estados de N

Montando o AFD

1. $Q' = P(Q) = 2^Q$, ou seja, como já vimos, é o conjunto de subconjuntos de Q
2. Seja R é um estado de AFD
   Para $R \in Q'$ e $a \in \Sigma$ seja
   $\delta'(R, a) = \{q \in Q \mid q \in \delta(r, a), \text{ para algum } r \in R\}$
   Se R é um estado de M é também um conjunto de estados de N
   Quando M lê a no estado R, o AFD mostra para onde a leva cada estado em R.
   Dado que cada estado pode ir para um conjunto de estados num AFN, $\delta'(R, a) = \cup_{r \in R} \delta(r, a)$

continuação...

3. $q_0' = \{q_0\}$
   Ou seja, M começa no estado correspondente ao estado inicial de N

continuação...

3. $q'_0 = \{q_0\}$
   Ou seja, M começa no estado correspondente ao estado inicial de N
4. $F' = \{R \in Q \mid R \text{ contém um estado de aceitação de } N\}$
   A máquina M aceita a linguagem. Aceita se um dos possíveis estados de N é um estado de aceitação.

Ainda a prova. . . Caso 2

Agora ampliando o vocabulário Σ. . .

Caso 2: Usando a transição ϵ, o movimento vazio
Façamos uma pausa para reflexão:

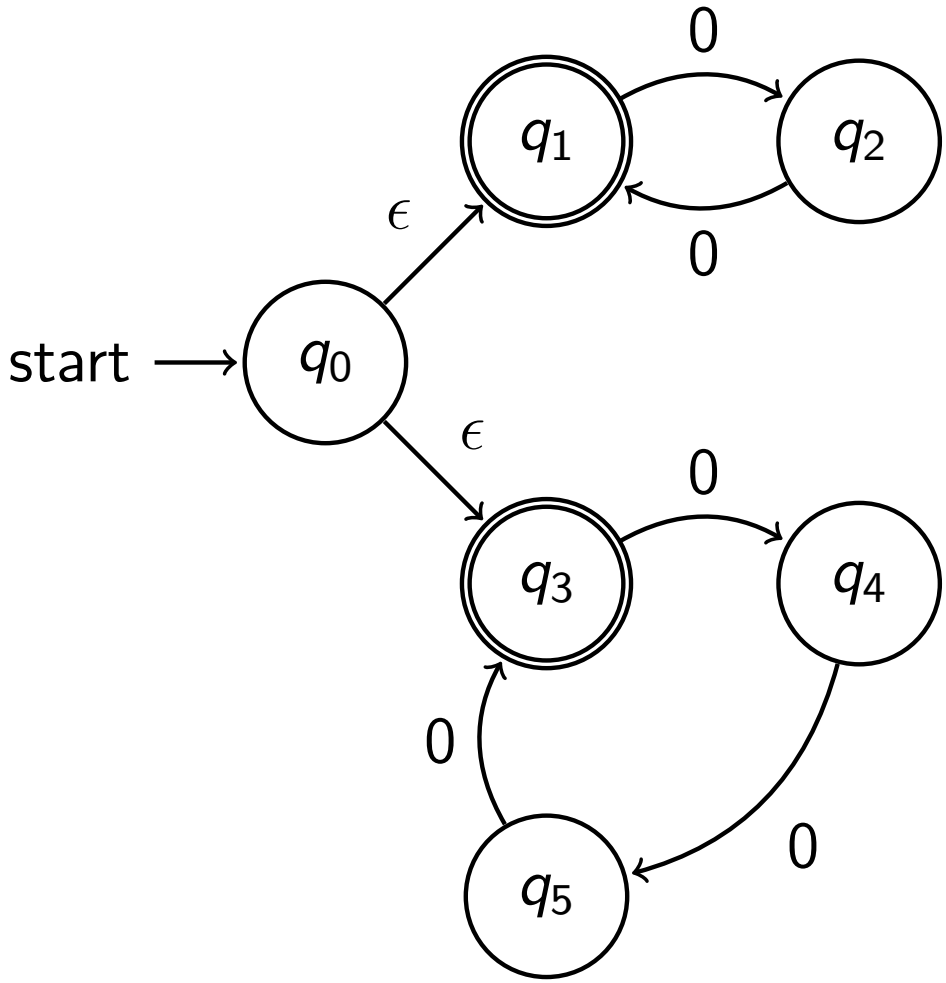
Facilidade

Veja na máquina AFN N_3 abaixo ($\Sigma = \{0\}$, alfabeto unário) a conveniência das transições usando ϵ

Veja o AFN a seguir:

$$L(N_3) = \{w \mid w \text{ é a cadeia da forma } 0^k \text{ para } k \text{ múltiplo de 2 ou 3}\}$$

Considerando ϵ: caso geral



Finda a pausa para reflexão

Para qualquer estado $R \in M$, definimos:

- $E(R)$= coleção de estados atingidos a partir de R usando somente 'setas' ϵ, incluindo os próprios membros de R

Finda a pausa para reflexão

Para qualquer estado $R \in M$, definimos:

- $E(R)$= coleção de estados atingidos a partir de R usando somente 'setas' ϵ, incluindo os próprios membros de R
- Formalmente, para $R \subseteq Q$
  $E(R) =$
  $\{q \mid q$ pode ser atingido por R através de zero ou mais 'setas' $\epsilon\}$

Finda a pausa para reflexão

Para qualquer estado $R \in M$, definimos:

- $E(R)$= coleção de estados atingidos a partir de R usando somente 'setas' ϵ, incluindo os próprios membros de R
- Formalmente, para $R \subseteq Q$
  $E(R) =$
  $\{q \mid q$ pode ser atingido por R através de zero ou mais 'setas' $\epsilon\}$
- Vamos então modificar a função δ' de M para incluir outros estados que podem ser atingidos por 'setas' ϵ após cada passo

continuando no Caso 2

- Substituindo $\delta(r, a)$ por $\epsilon(\delta(r, a))$ temos

continuando no Caso 2

- Substituindo $\delta(r, a)$ por $\epsilon(\delta(r, a))$ temos

$$\delta'(R, a) = \{q \in Q \mid q \in \epsilon(\delta(r, a)) \text{ para algum } r \in R\}$$

continuando no Caso 2

- Substituindo $\delta(r, a)$ por $\epsilon(\delta(r, a))$ temos

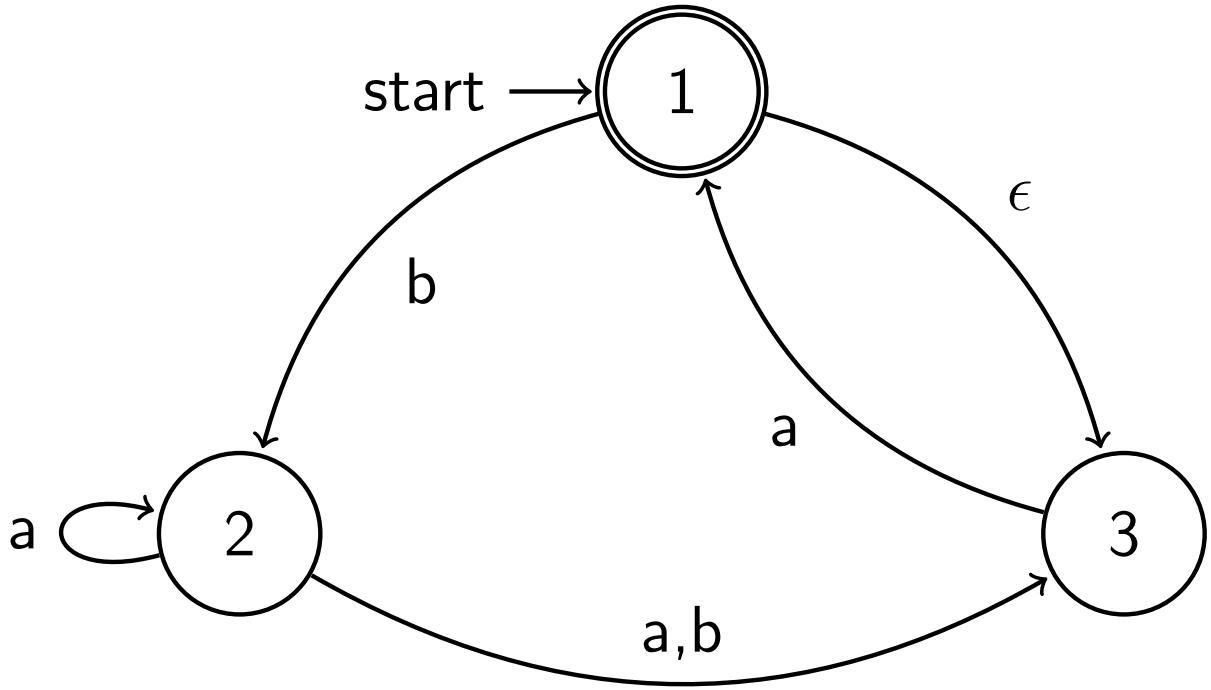
$$\delta'(R, a) = \{q \in Q \mid q \in \epsilon(\delta(r, a)) \text{ para algum } r \in R\}$$

- Mudamos também q_0' para $\epsilon(\{q_0\})$, ou seja, mudamos o estado inicial para também ser atingido por 'seta' ϵ.

Assim, podemos concluir que AFD M simula AFN N.

Exemplo

Seja $N_4 = \{Q, \{a, b\}, \delta, 1, \{1\}\}$ tal que $Q = \{1, 2, 3\}$ um AFN como representado abaixo:



Pergunta

Quais das palavras abaixo N_4 aceita?

- ϵ, a, baba, baa?
- b, bb, babba?

Pergunta

Quais das palavras abaixo N_4 aceita?

- ϵ, a, baba, baa?
- b, bb, babba?

Vamos agora construir um AFD D equivalente a N_4.

Quais os estado do AFD equivalente?

- $Q' =$ estados de D (AFD)
- $Q' = P(Q) = 2^P$, $|P(Q)| = 8$

Quais os estado do AFD equivalente?

- $Q' =$ estados de D (AFD)
- $Q' = P(Q) = 2^P$, $|P(Q)| = 8$
- $Q' = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$ e

Quais os estado do AFD equivalente?

- $Q' =$ estados de D (AFD)
- $Q' = P(Q) = 2^P$, $|P(Q)| = 8$
- $Q' = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$ e
- $q'_0 = \{1\}$ e

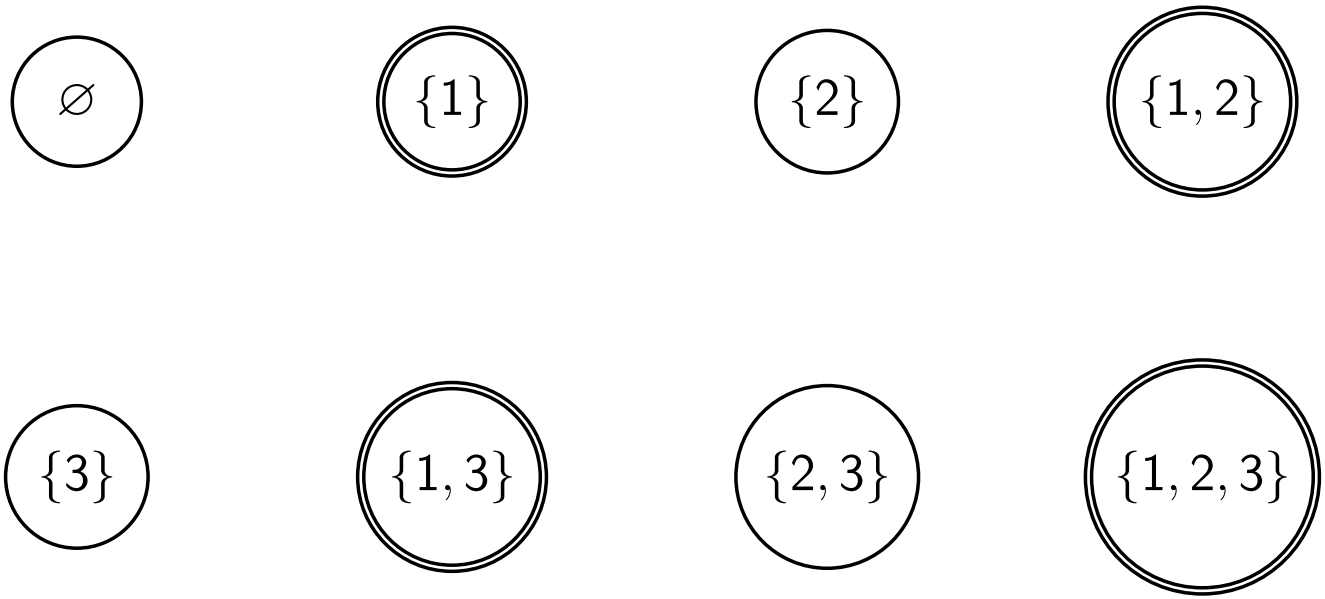
Quais os estado do AFD equivalente?

- $Q' =$ estados de D (AFD)
- $Q' = P(Q) = 2^P$, $|P(Q)| = 8$
- $Q' = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$ e
- $q_0' = \{1\}$ e
- Os novos estados de aceitação são aqueles que contém $q_0 = \{1\}$

Quais os estado do AFD equivalente?

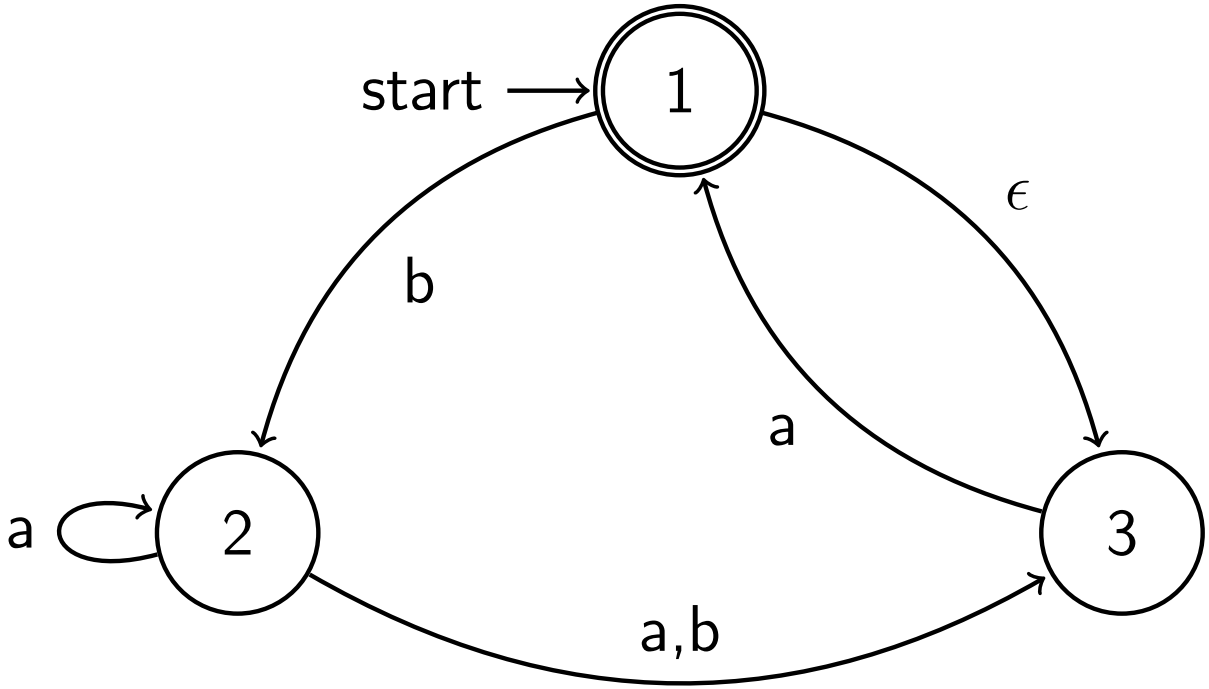
- $Q' =$ estados de D (AFD)
- $Q' = P(Q) = 2^P$, $|P(Q)| = 8$
- $Q' = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$ e
- $q'_0 = \{1\}$ e
- Os novos estados de aceitação são aqueles que contém $q_0 = \{1\}$
- $F' = \{\{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}$

Estes serão os estados: $P(Q)$



E agora a função δ':

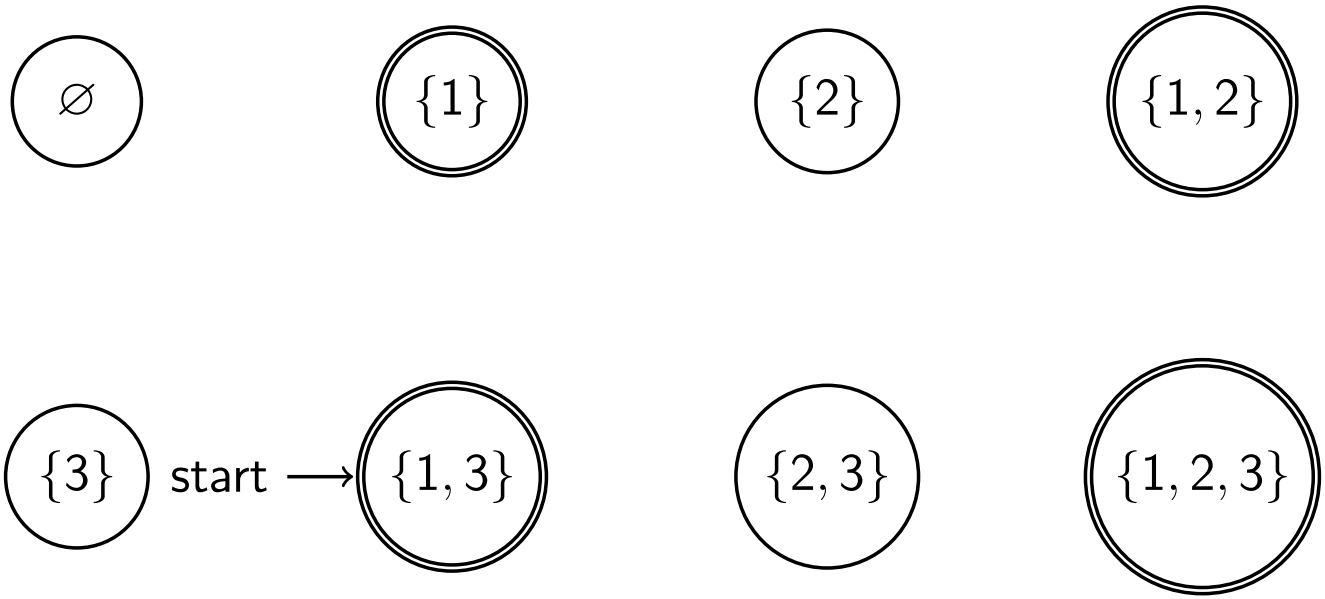
Dada a entrada ϵ em 1, quais são os estados atingíveis?



Resposta: O estados 1 e 3.

A função δ': iniciando...

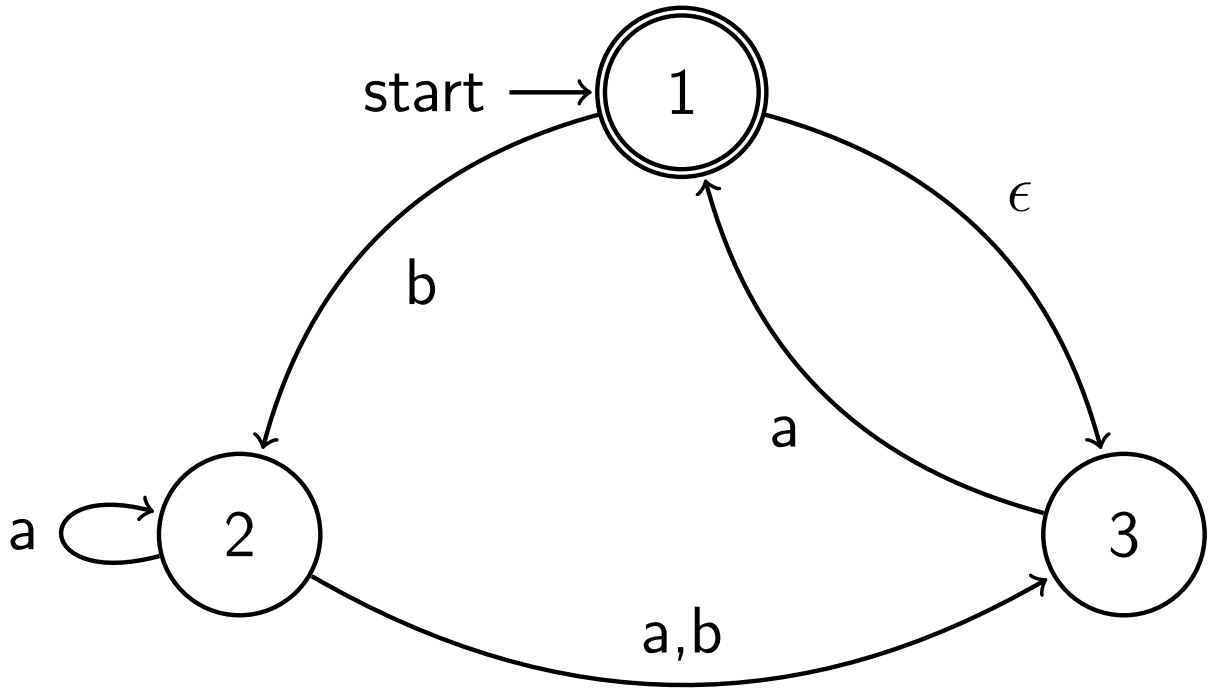
Dada a entrada ϵ em 1, quais são os estados atingíveis?



Resposta: 1 e 3, portanto $q_0 = \{1, 3\}$

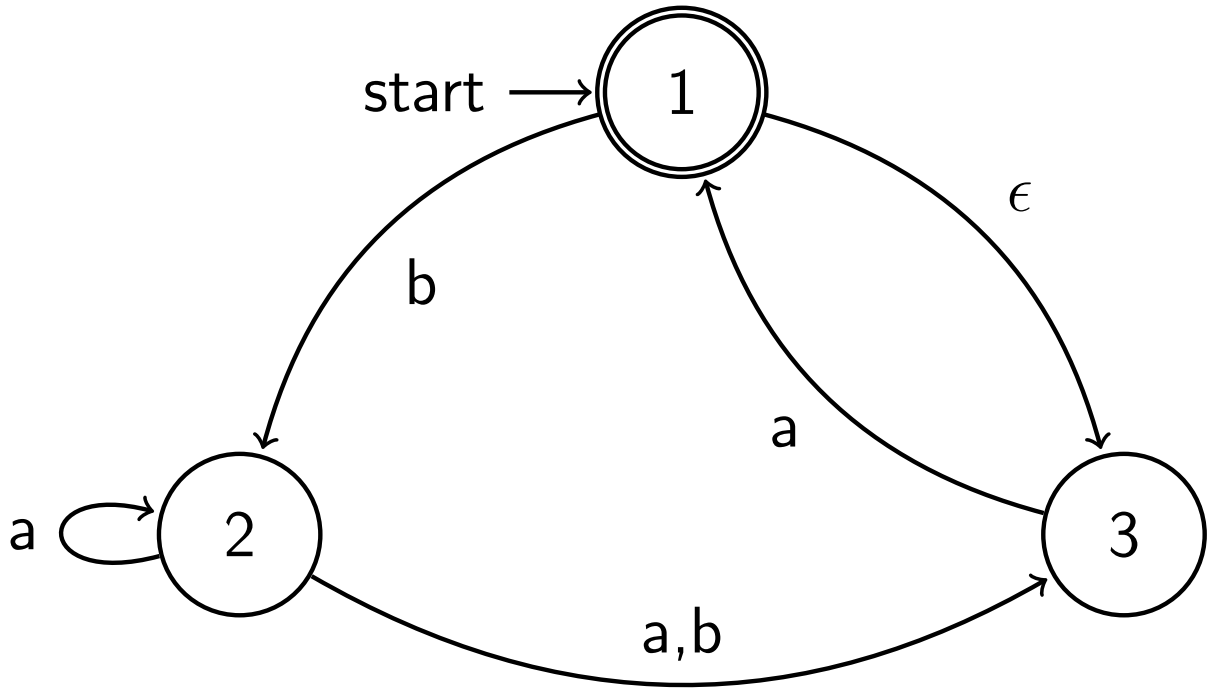
Construindo a função δ':

Quais são os estados atingíveis a partir de $\{1\}$ dadas as entradas a e b?



Construindo a função δ':

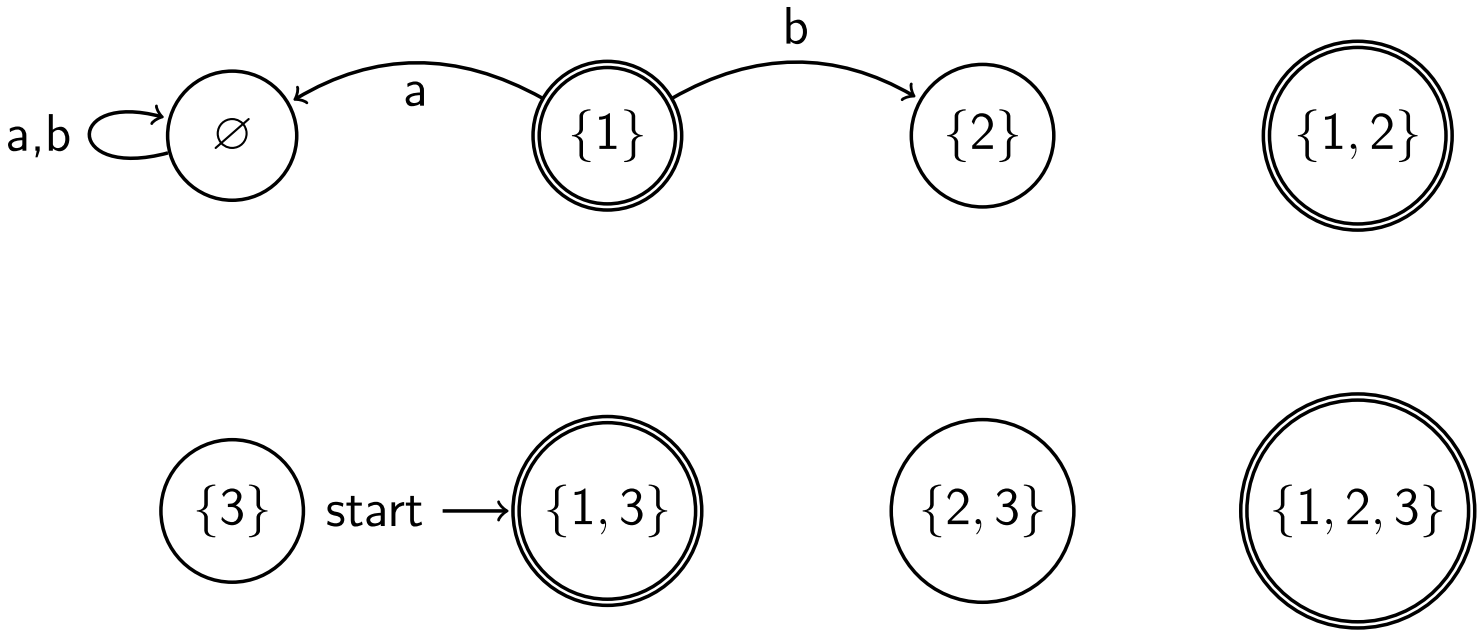
Quais são os estados atingíveis a partir de $\{1\}$ dadas as entradas a e b?



Resposta: $a \to \varnothing, b \to \{2\}$

Construindo a função δ':

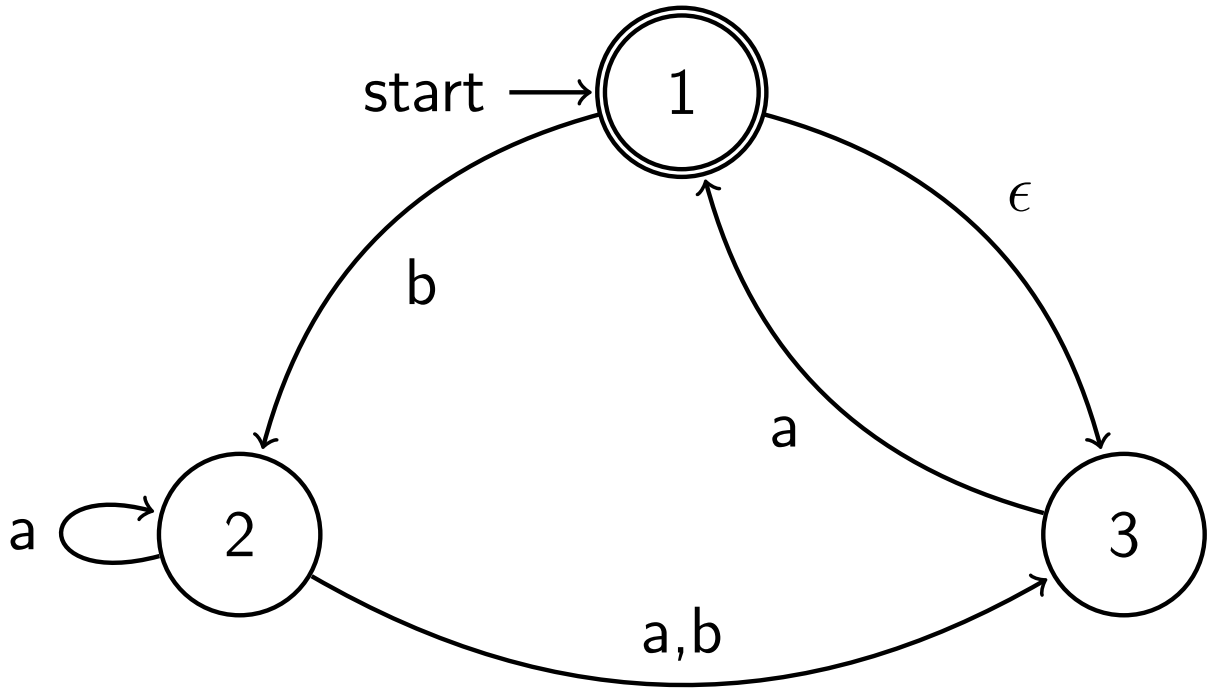
Quais são os estados atingíveis a partir de $\{1\}$ dadas as entradas a e b?



$\varnothing$ é estado terminal, estado final. Não sai mais daí.

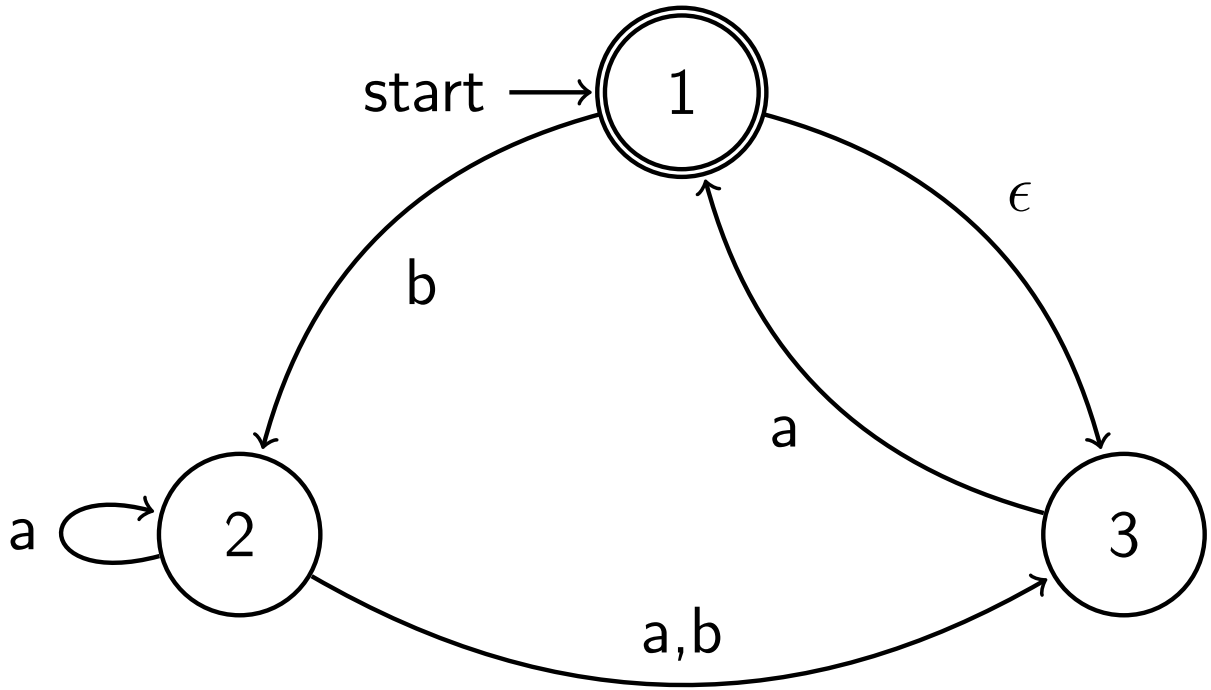
Construindo a função δ':

Quais são os estados atingíveis a partir de $\{2\}$ dadas as entradas a e b?



Construindo a função δ':

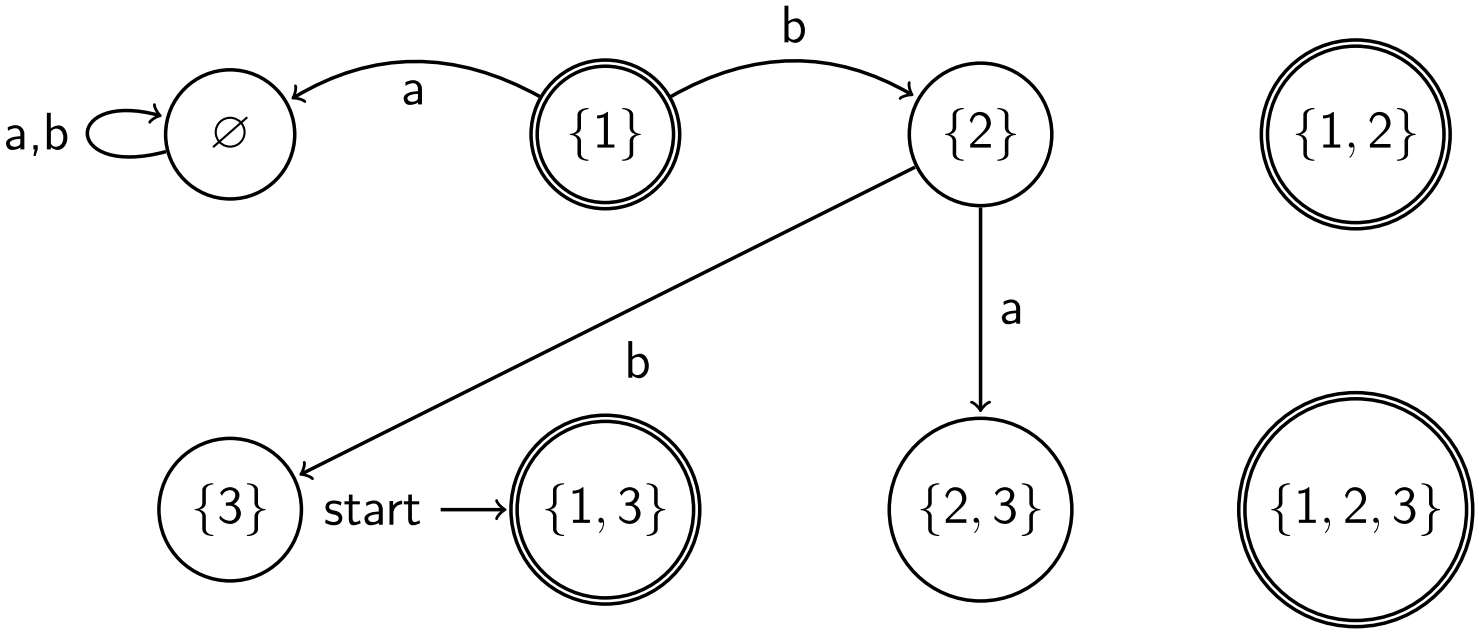
Quais são os estados atingíveis a partir de $\{2\}$ dadas as entradas a e b?



Resposta: $a \to \{2,3\}, b \to \{3\}$

Construindo a função δ':

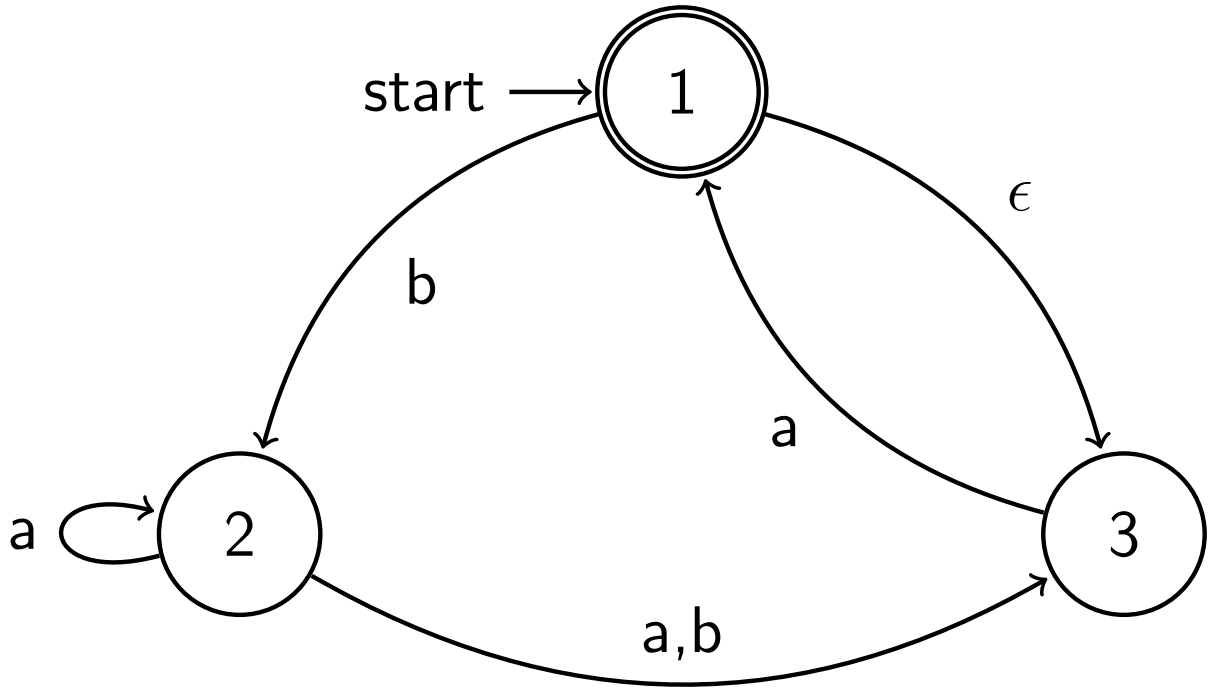
Quais são os estados atingíveis a partir de $\{2\}$ dadas as entradas a e b?



Resposta: $a \to \{2,3\}, b \to \{3\}$

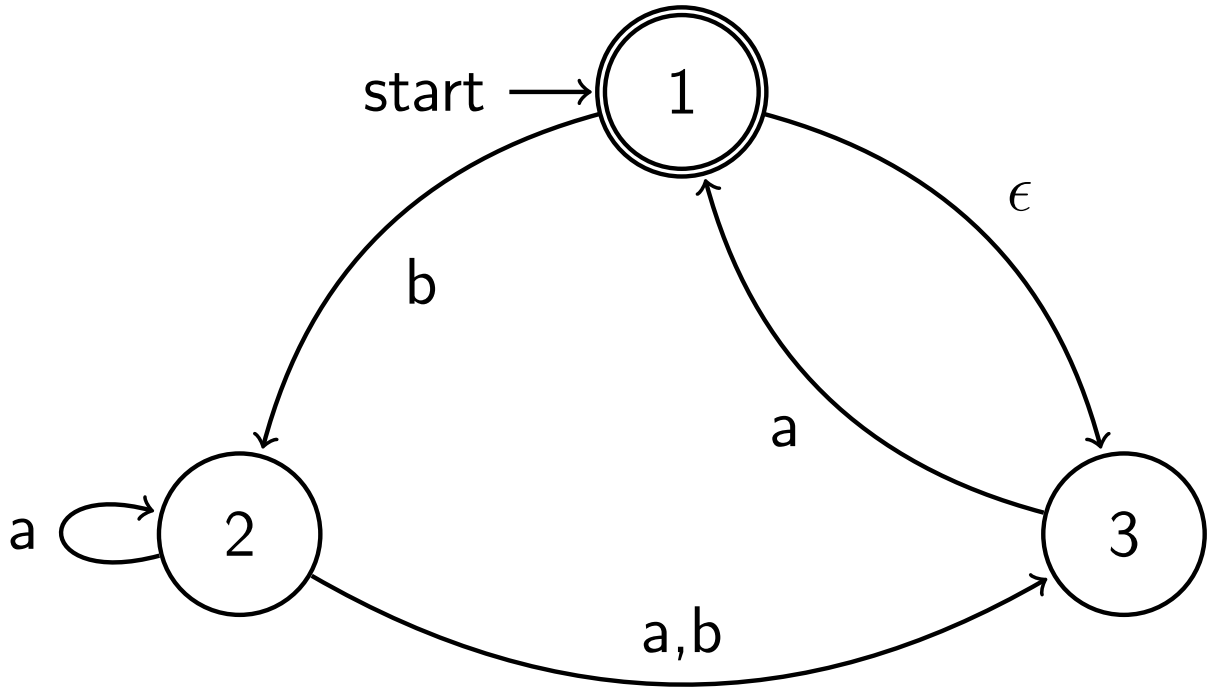
Construindo a função δ':

Quais são os estados atingíveis a partir de $\{3\}$ dadas as entradas a e b?



Construindo a função δ':

Quais são os estados atingíveis a partir de $\{3\}$ dadas as entradas a e b?

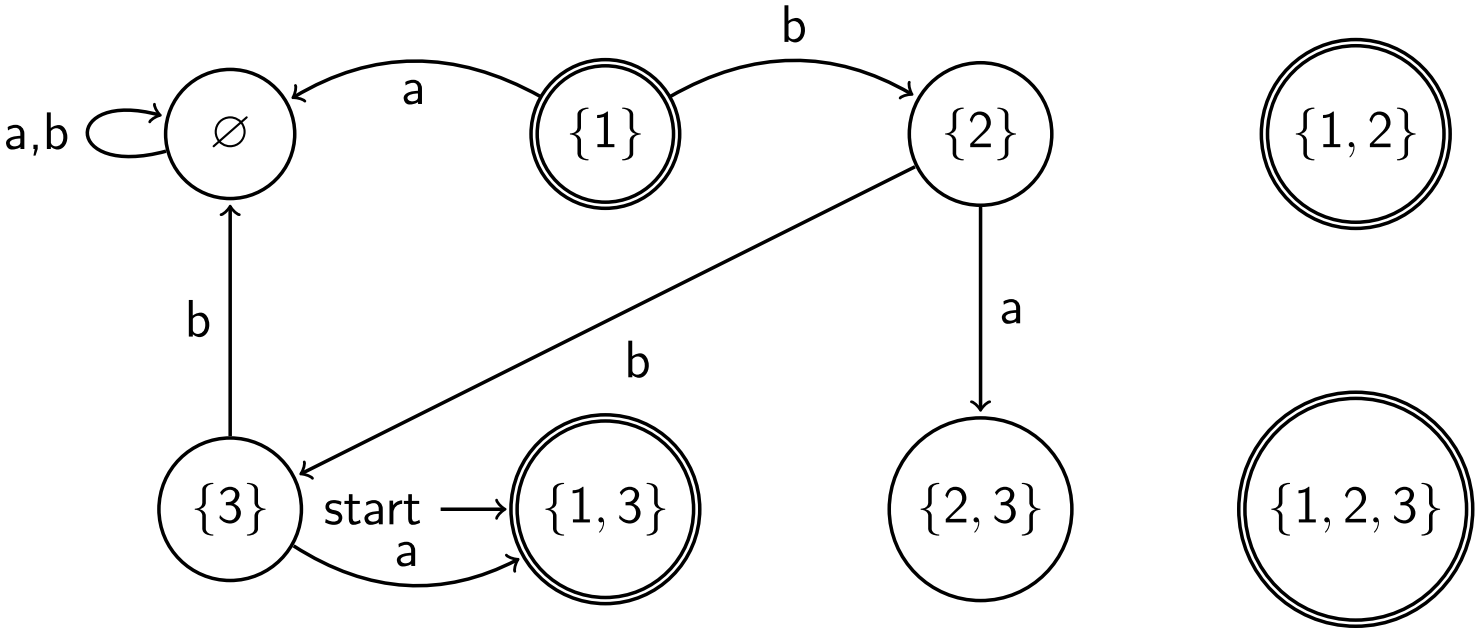


Resposta: $a \to \{1, 3\}, b \to \varnothing$

Lembre-se que $a = a\epsilon$.

Construindo a função δ':

Quais são os estados atingíveis a partir de $\{3\}$ dadas as entradas a e b?

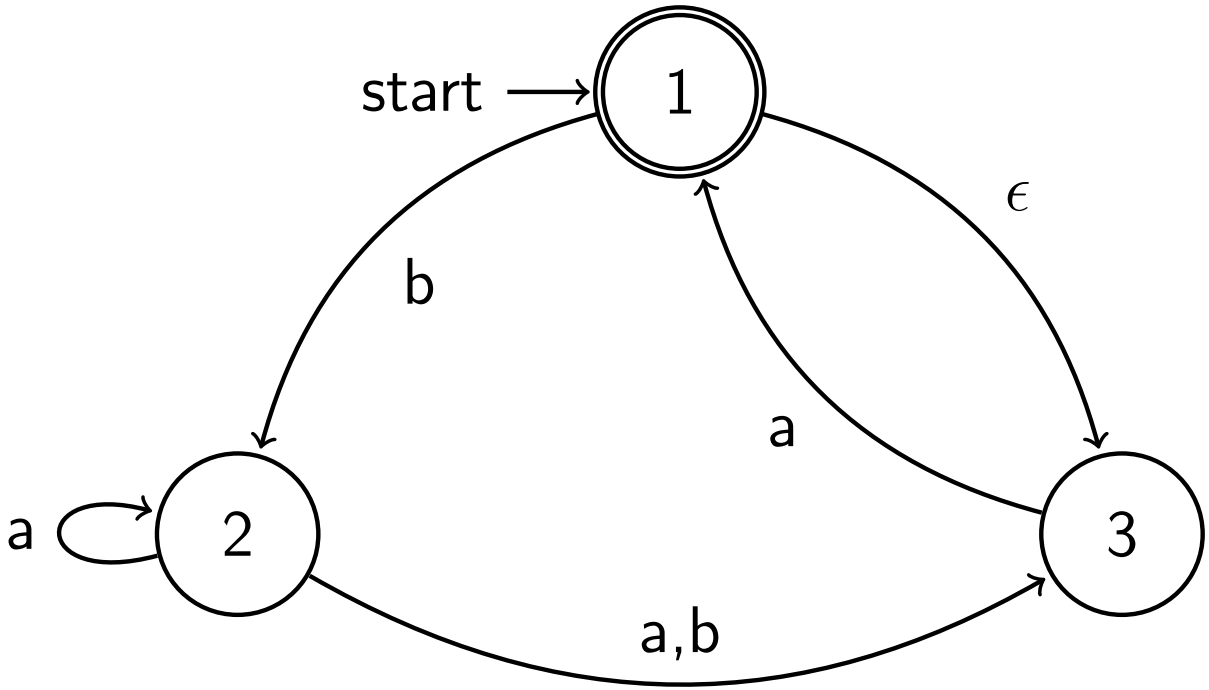


Resposta: $a \to \{1,3\}, b \to \varnothing$

Lembre-se que $a = a\epsilon$.

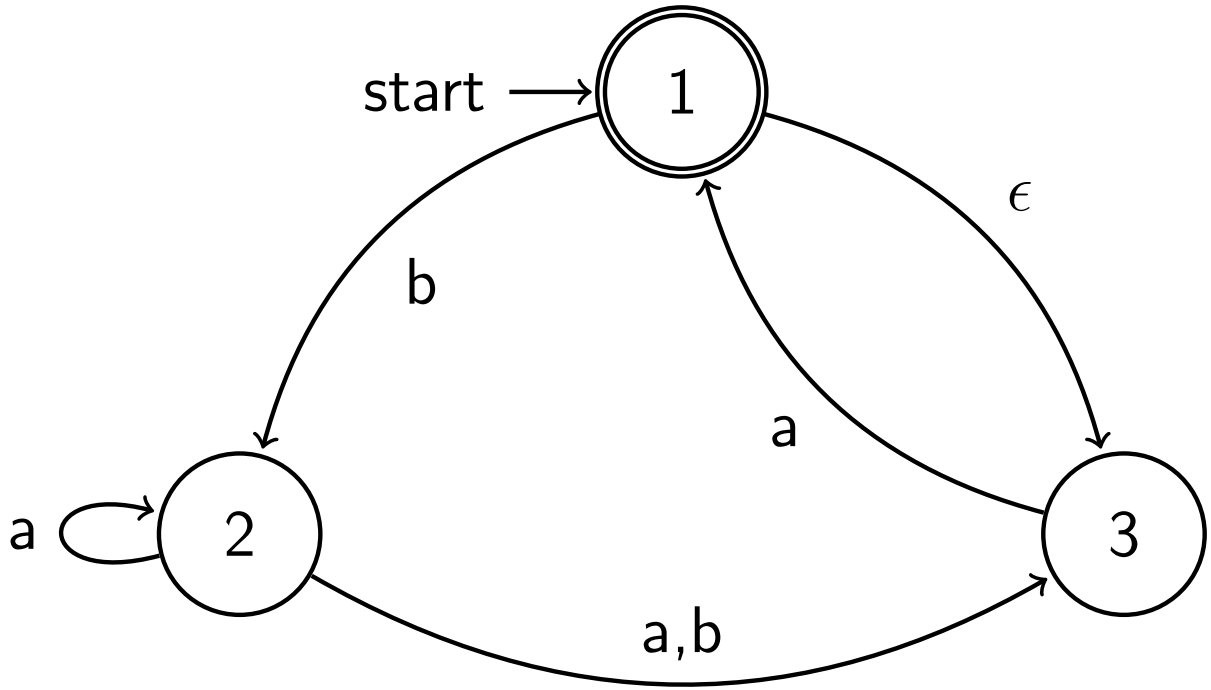
Construindo a função δ':

Quais são os estados atingíveis a partir de $\{1, 3\}$ dadas as entradas a e b?



Construindo a função δ':

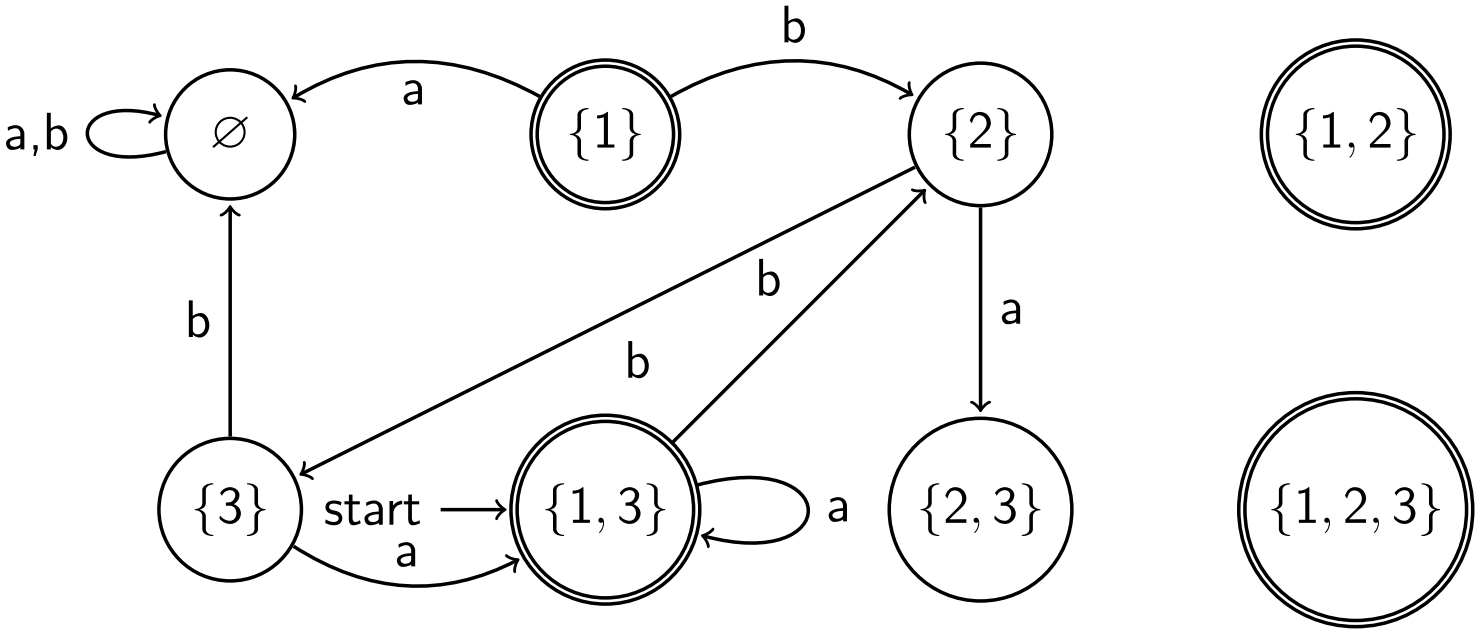
Quais são os estados atingíveis a partir de $\{1, 3\}$ dadas as entradas a e b?



Resposta: $a \to \{1, 3\}, b \to \{2\}$
Lembre-se que $a = a\epsilon$.

Construindo a função δ':

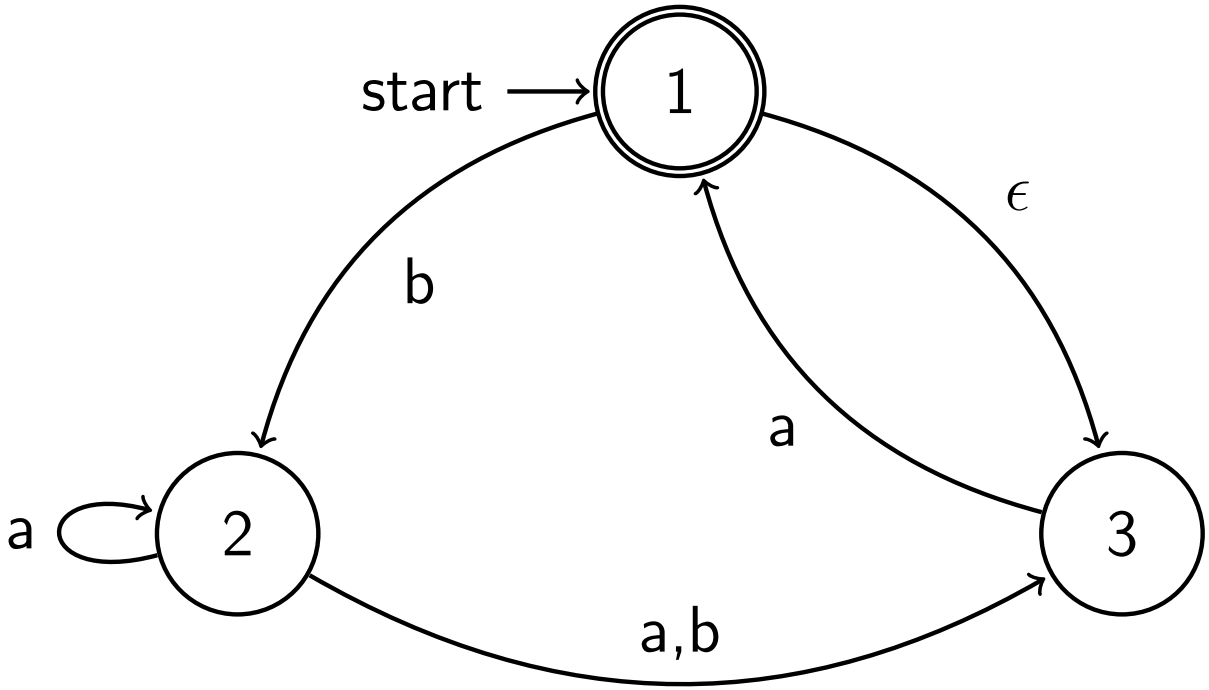
Quais são os estados atingíveis a partir de $\{1, 3\}$ dadas as entradas a e b?



Resposta: $a \to \{1, 3\}, b \to \{2\}$

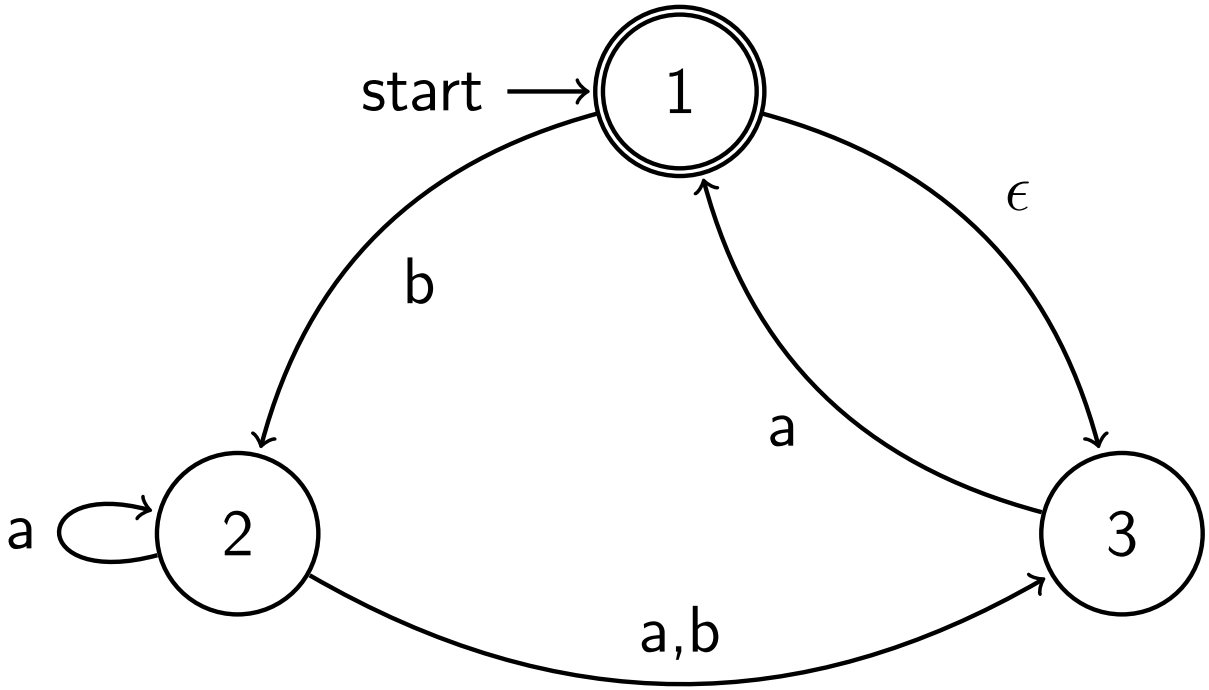
Construindo a função δ':

Quais são os estados atingíveis a partir de $\{1, 2\}$ dadas as entradas a e b?



Construindo a função δ':

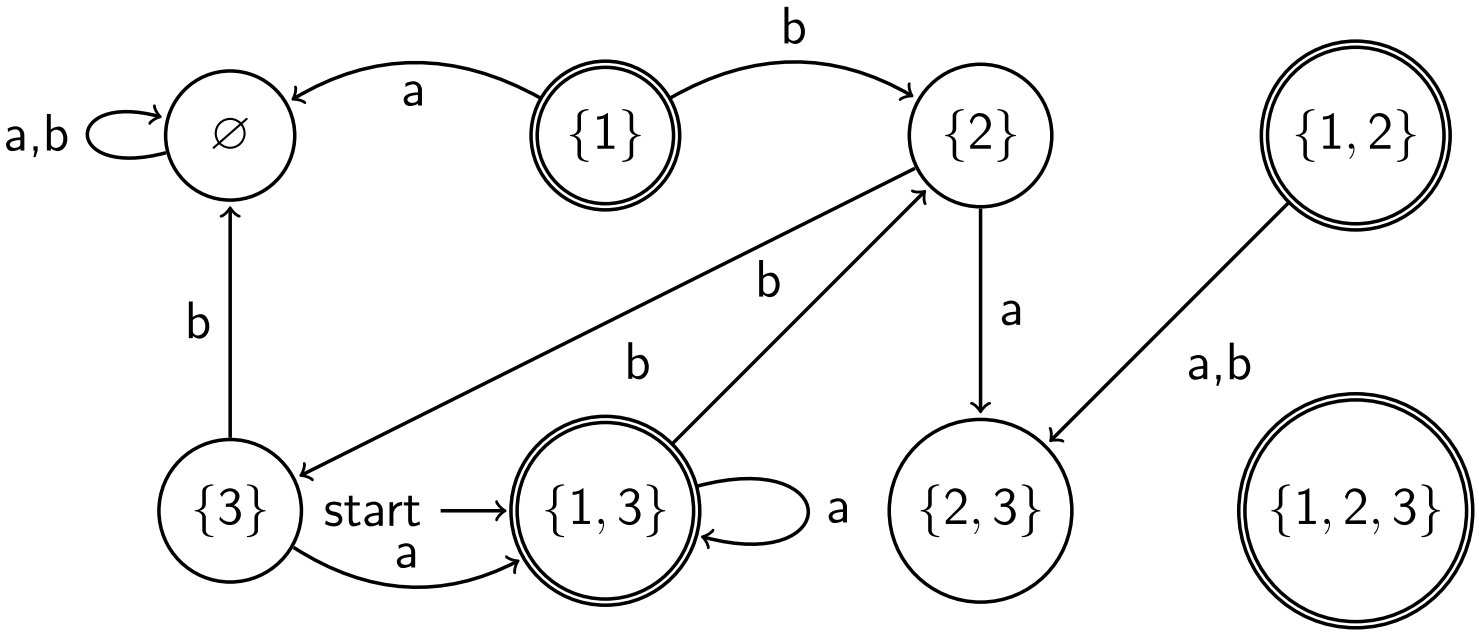
Quais são os estados atingíveis a partir de $\{1, 2\}$ dadas as entradas a e b?



Resposta: $(1, a) \to \varnothing, (2, a) \to \{2, 3\}$, assim $(\{1, 2\}, a) \to \{2, 3\}$.
$(1, b) \to \{2\}, (2, b) \to \{3\}$, assim $(\{1, 2\}, b) \to \{2, 3\}$.

Construindo a função δ':

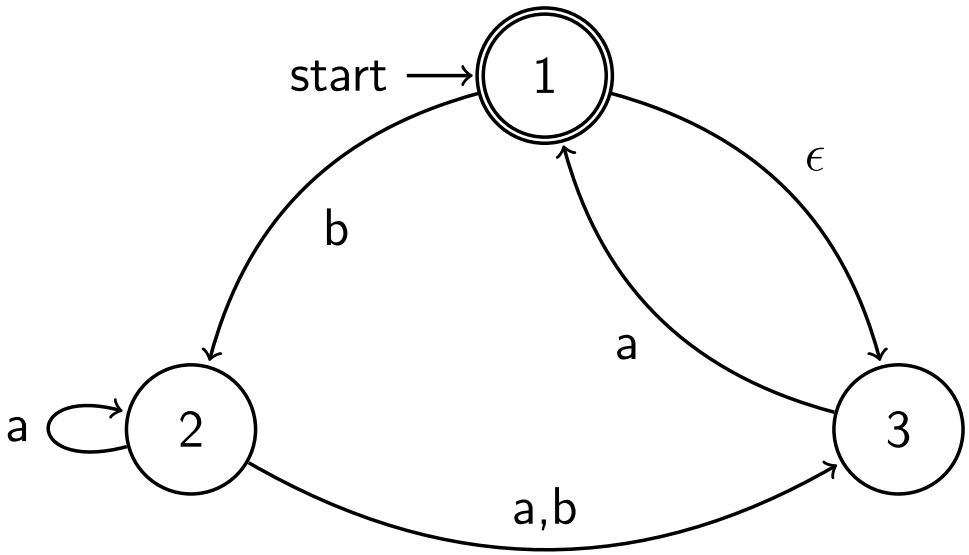
Quais são os estados atingíveis a partir de $\{1, 2\}$ dadas as entradas a e b?



Resposta: $(1, a) \to \varnothing, (2, a) \to \{2, 3\}$, assim $(\{1, 2\}, a) \to \{2, 3\}$.
$(1, b) \to \{2\}, (2, b) \to \{3\}$, assim $(\{1, 2\}, b) \to \{2, 3\}$.

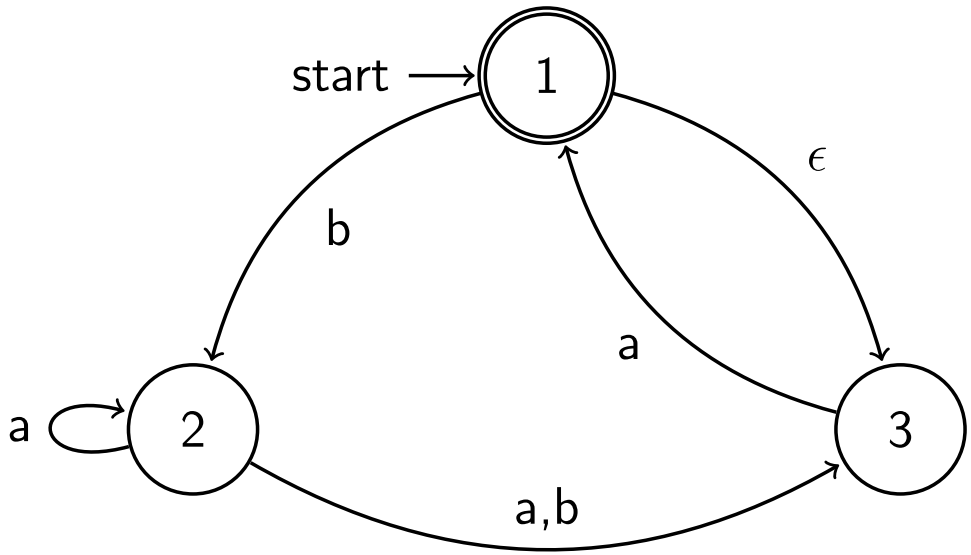
Construindo a função δ':

Quais são os estados atingíveis a partir de $\{2, 3\}$ dadas as entradas a e b?



Construindo a função δ':

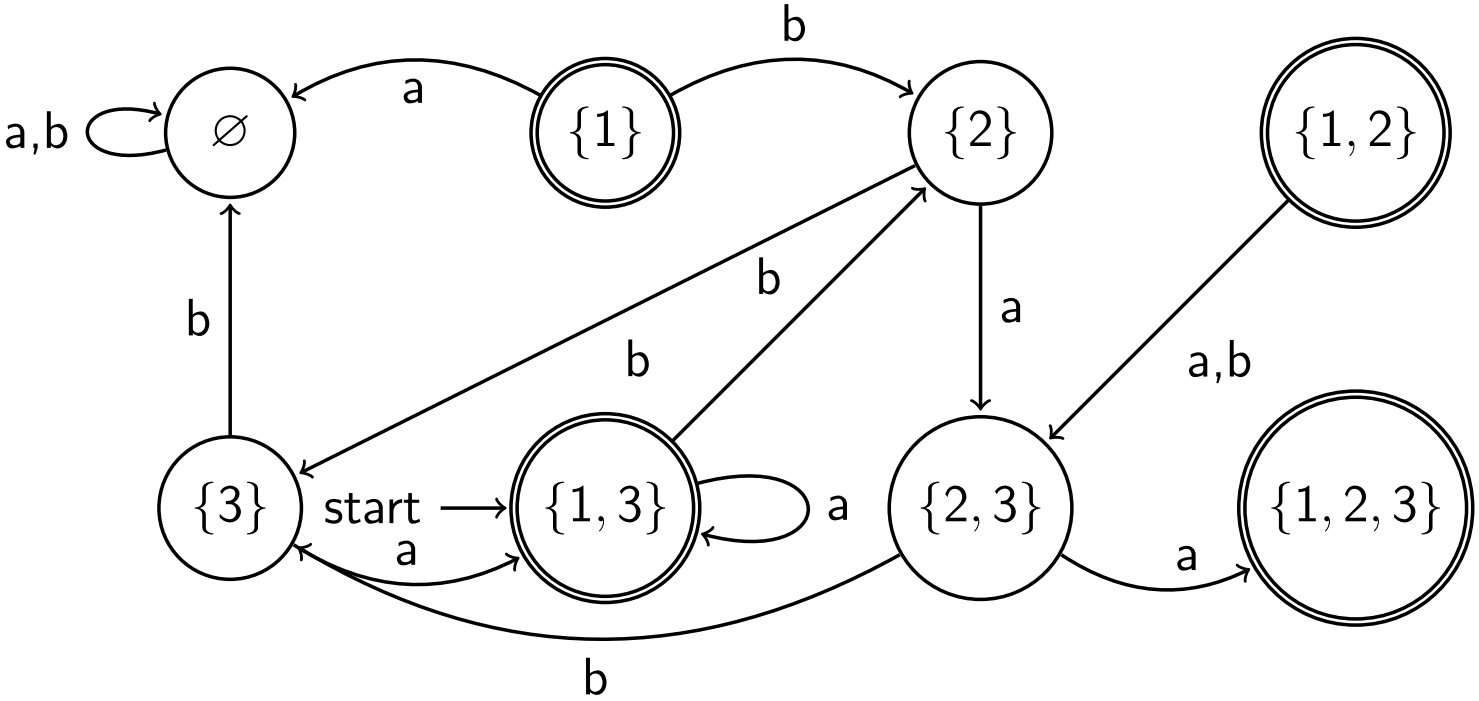
Quais são os estados atingíveis a partir de $\{2, 3\}$ dadas as entradas a e b?



Resposta: $(2, a) \to \{2, 3\}, (3, a) \to \{1\}$, assim $(\{2, 3\}, a) \to \{1, 2, 3\}$. $(2, b) \to \{3\}, (3, b) \to \varnothing$, assim $(\{2, 3\}, b) \to \{3\}$.

Construindo a função δ':

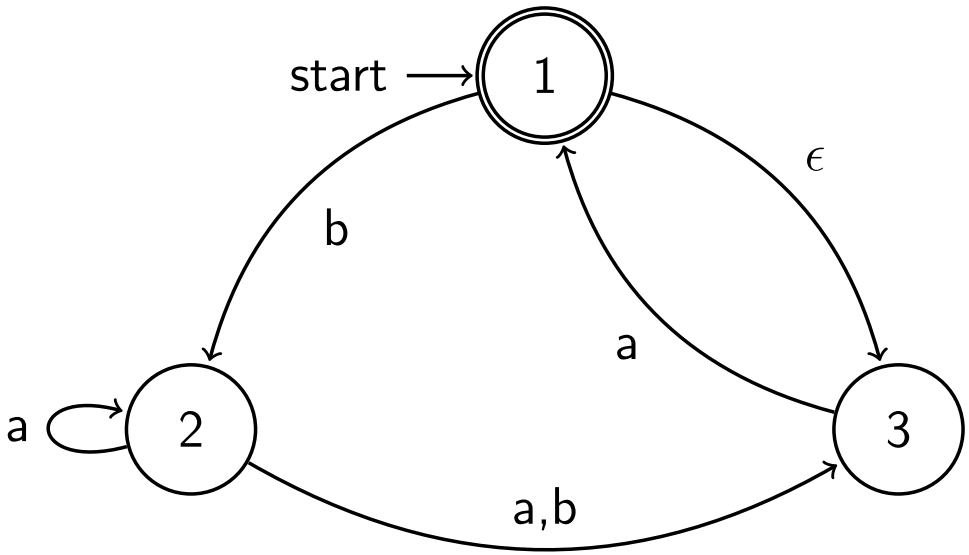
Quais são os estados atingíveis a partir de $\{2, 3\}$ dadas as entradas a e b?



Resposta: $(2, a) \to \{2, 3\}, (3, a) \to \{1\}$, assim $(\{2, 3\}, a) \to \{1, 2, 3\}$. $(2, b) \to \{3\}, (3, b) \to \varnothing$, assim $(\{2, 3\}, b) \to \{3\}$.

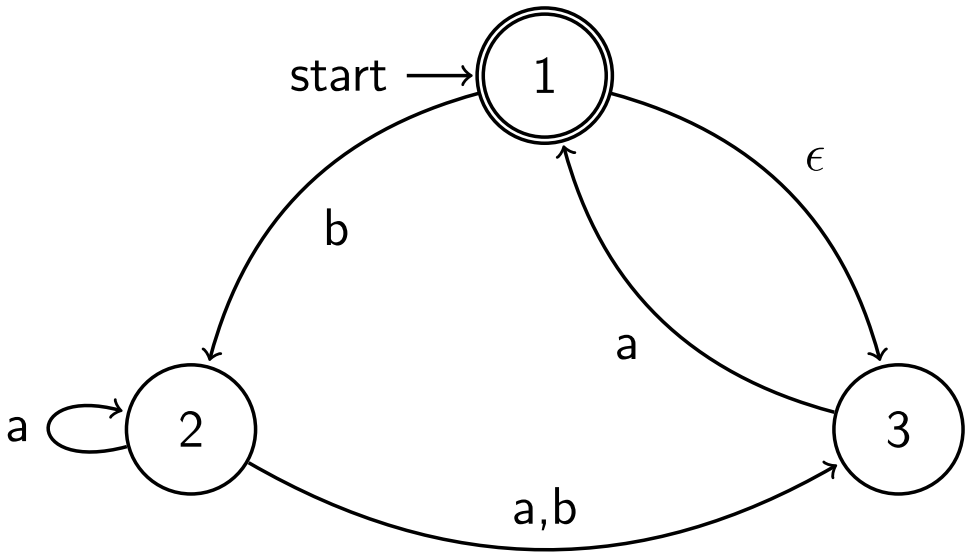
Construindo a função δ':

Quais são os estados atingíveis a partir de $\{1, 2, 3\}$ dadas as entradas *a* e *b*?



Construindo a função δ':

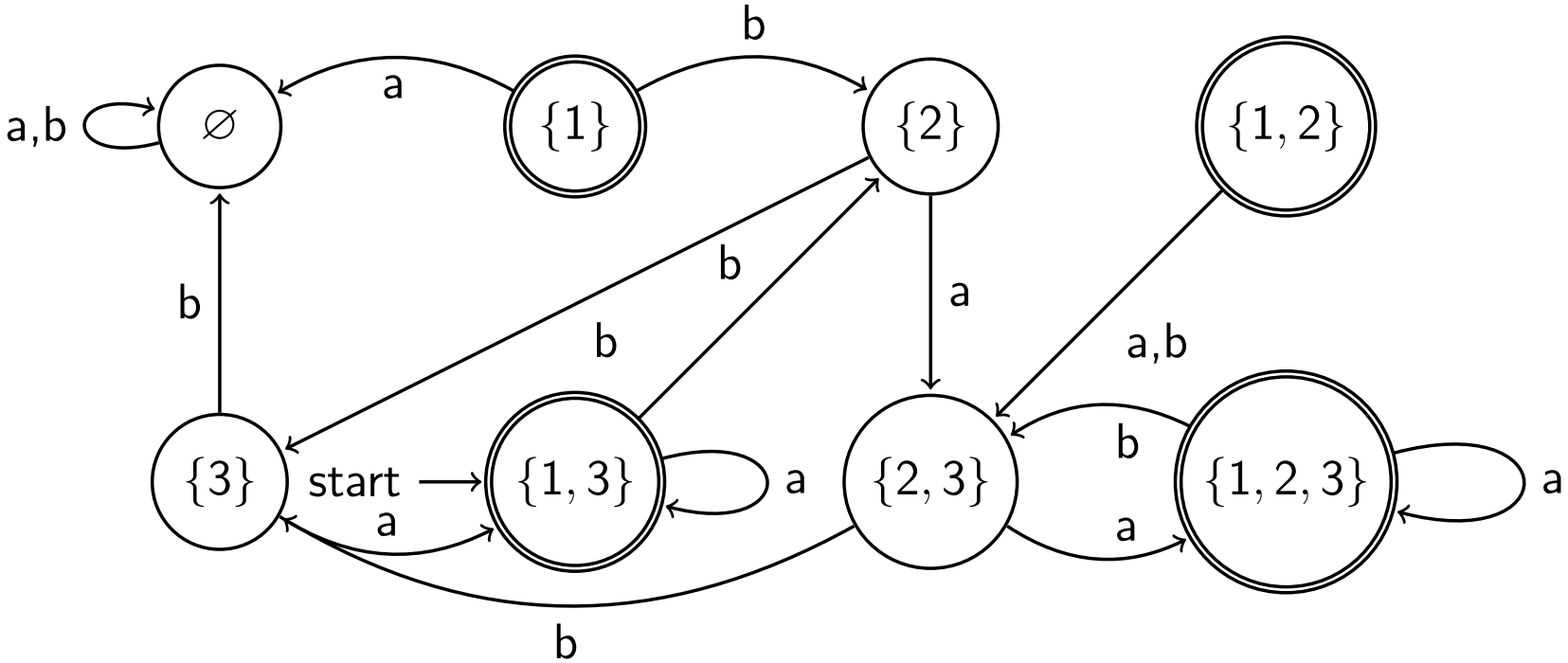
Quais são os estados atingíveis a partir de $\{1, 2, 3\}$ dadas as entradas a e b?



Resposta: $(1, a) \to \{1\}, (2, a) \to \{2, 3\}, (3, a) \to \{1, 3\}$, assim $(\{1, 2, 3\}, a) \to \{1, 2, 3\}$. $(1, b) \to \{2\}, (2, b) \to \{3\}, (3, b) \to \varnothing$, assim $(\{1, 2, 3\}, b) \to \{2, 3\}$.

Finalizando a função δ':

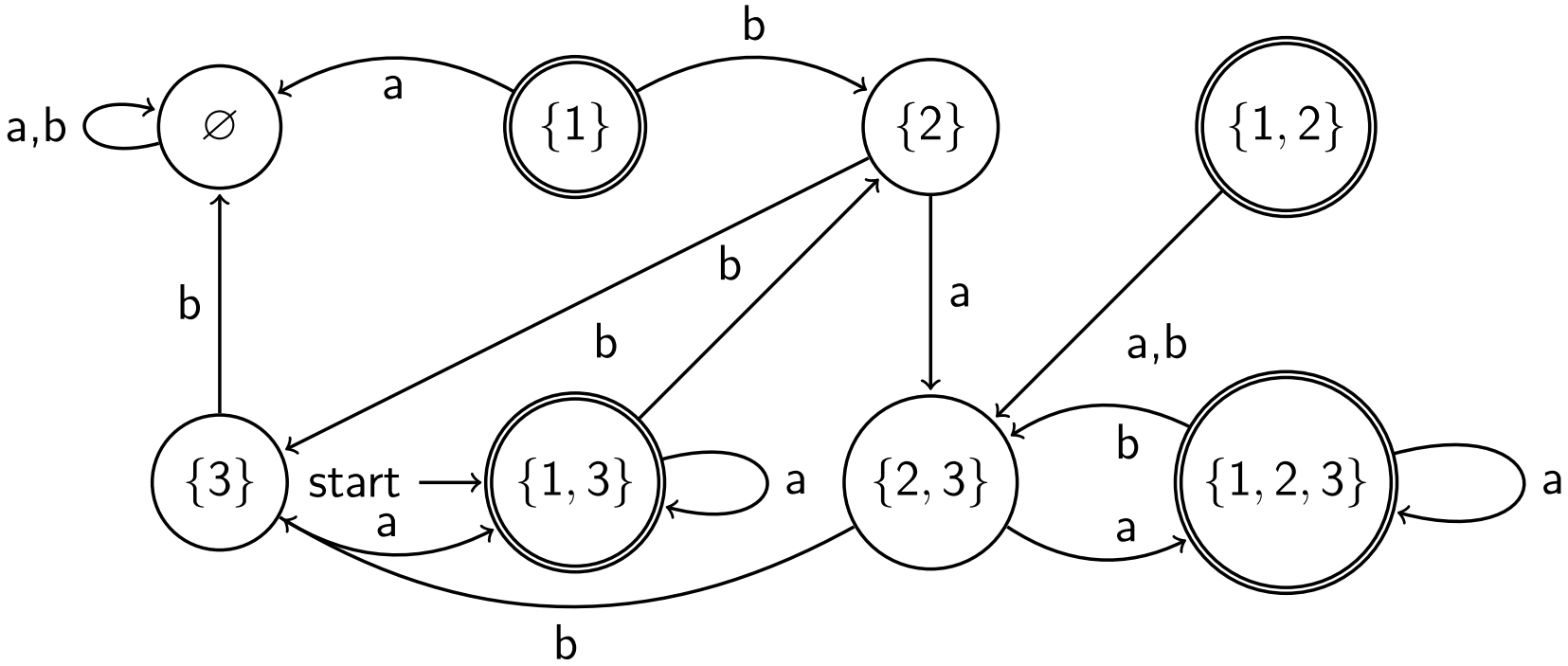
Quais são os estados atingíveis a partir de $\{1, 2, 3\}$ dadas as entradas a e b?



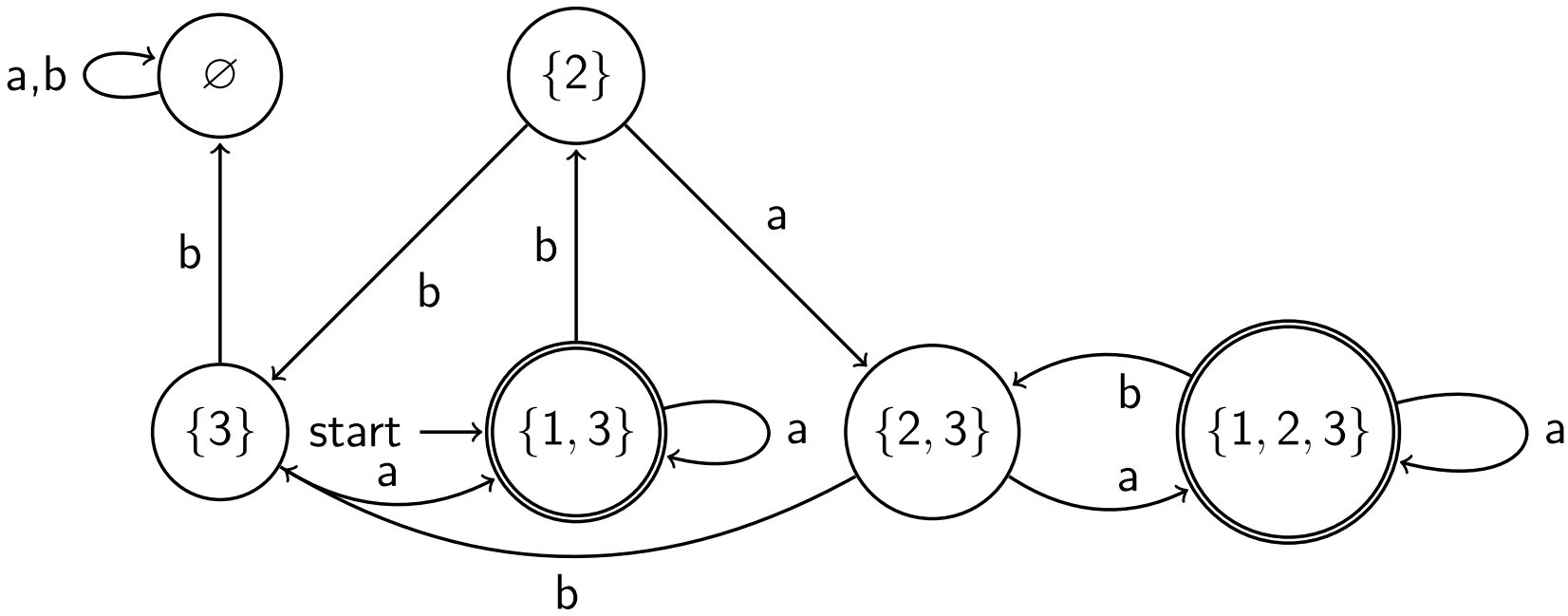
Resposta: $(\{1, 2, 3\}, a) \to \{1, 2, 3\}$. $(\{1, 2, 3\}, b) \to \{2, 3\}$.

Refinando o AFD

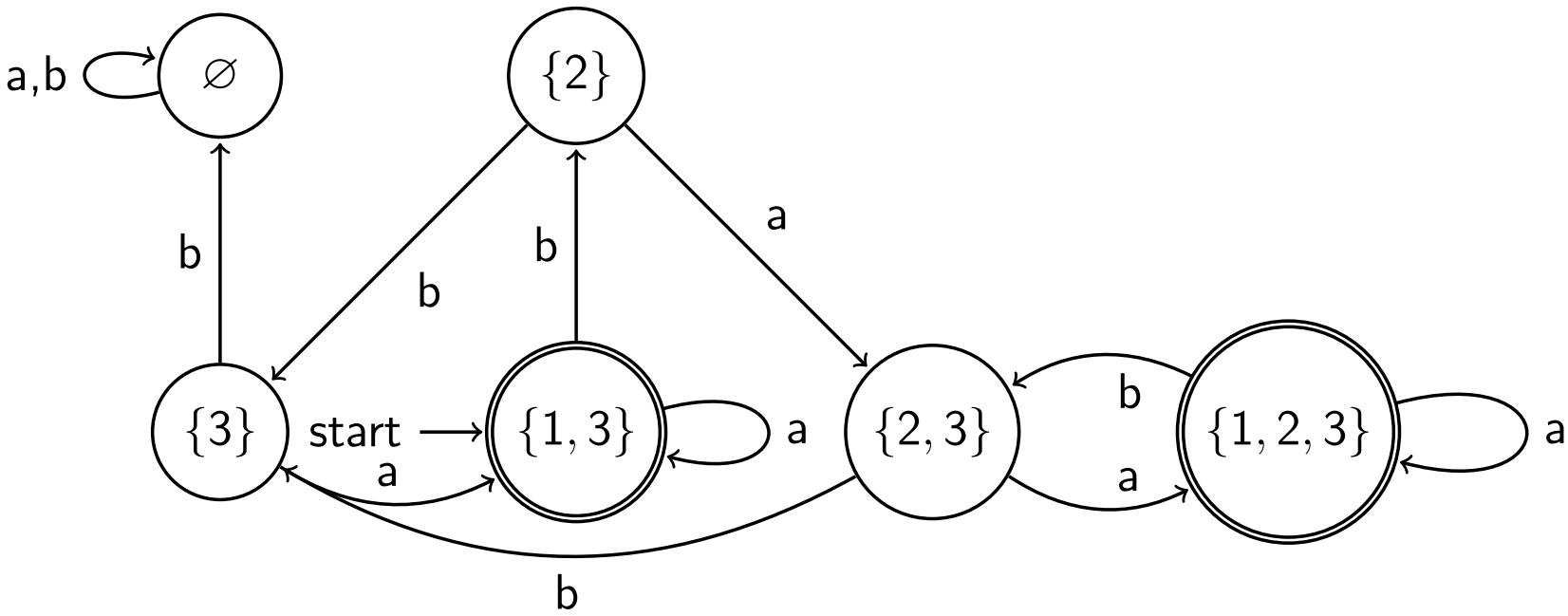
Como $\{1\}$ e $\{1,2\}$ são inatingíveis, podemos removê-los. Vejamos:



AFD refinado

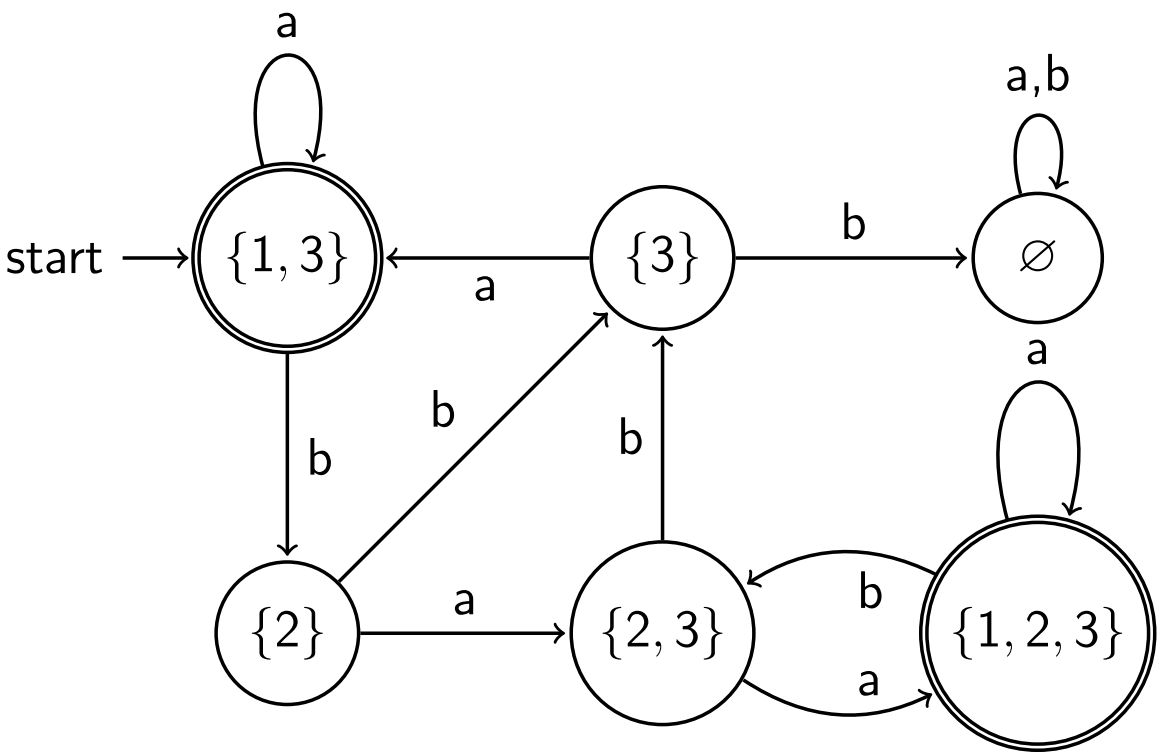


AFD refinado

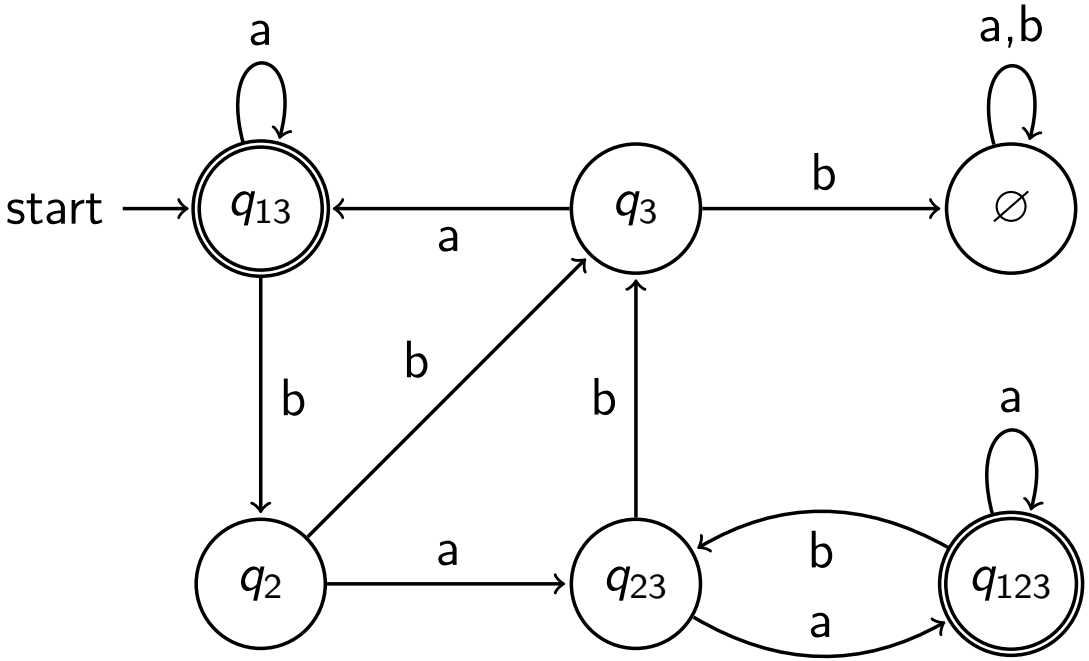


Vejamos agora o AFD redesenhado...

AFD redesenhado



AFD com nomes alterados para os estados



Final

Equivalência mostrada

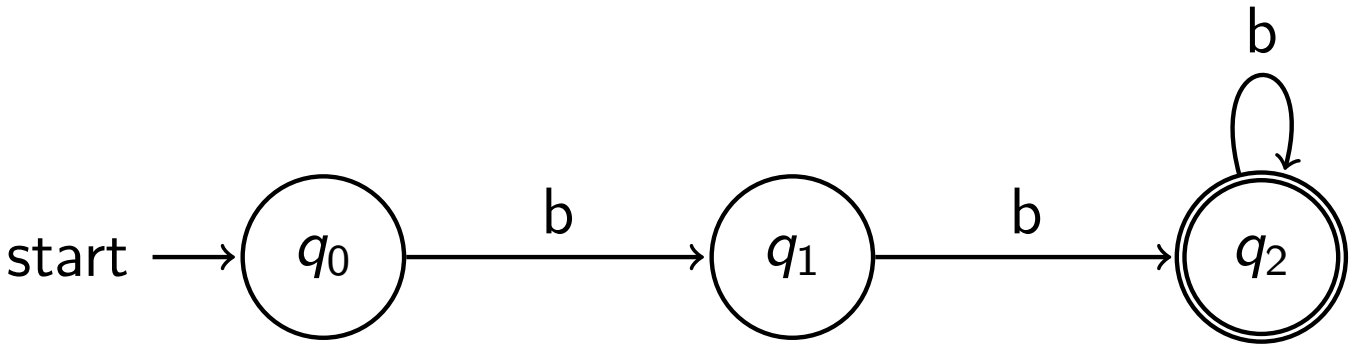
Mostramos como uma AFN específico pode ser transformado num AFD.

Exercícios

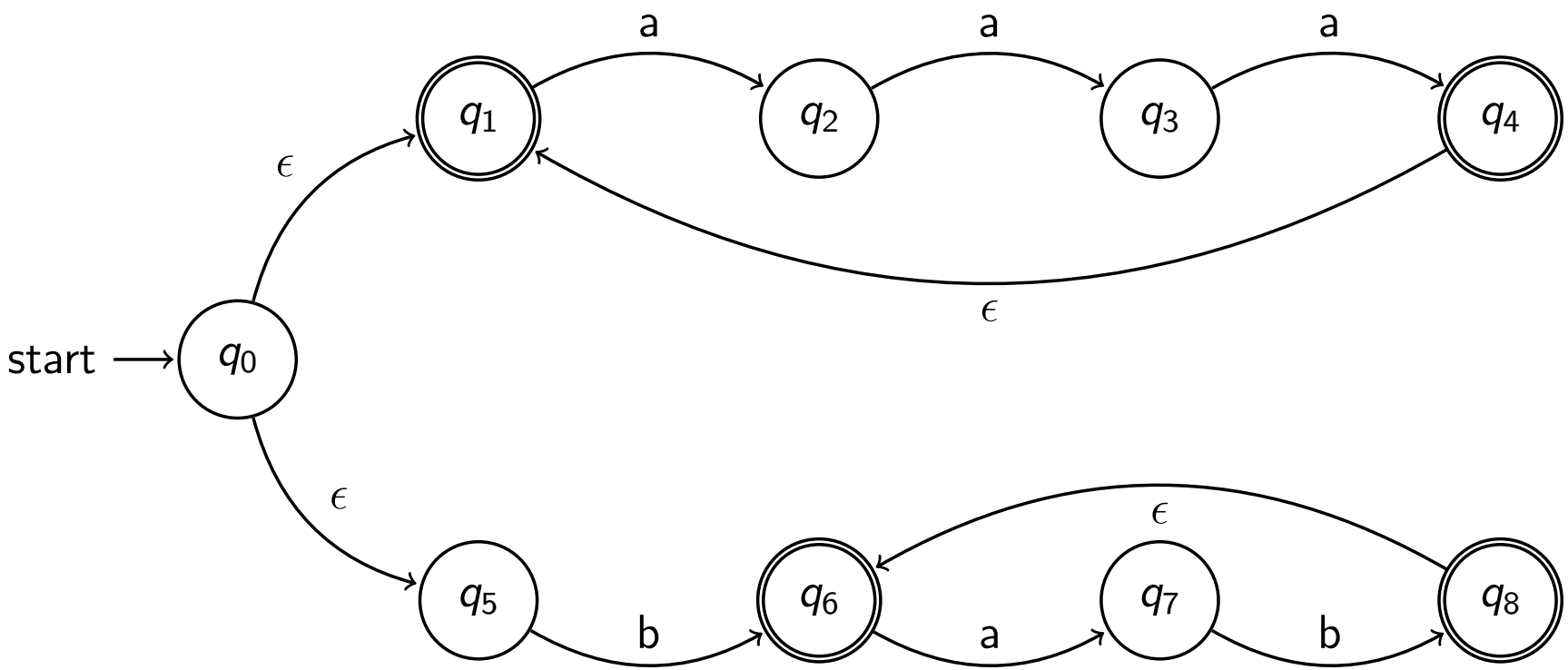
Escreva autômatos finito não-determinístico (AFN) que reconheçam as seguintes linguagens:

1. $L_1 = \{b^n \mid n = 2, 3, 4 \ldots\}$
2. $L_2 = (aaa)^* \cup b(ab)^*$
3. A linguagem em todas as cadeias são formadas em $\Sigma = \{a, b, c\}$ e que iniciam e terminam suas palavras com o mesmo símbolo além de terem comprimento mínimo igual a 2.

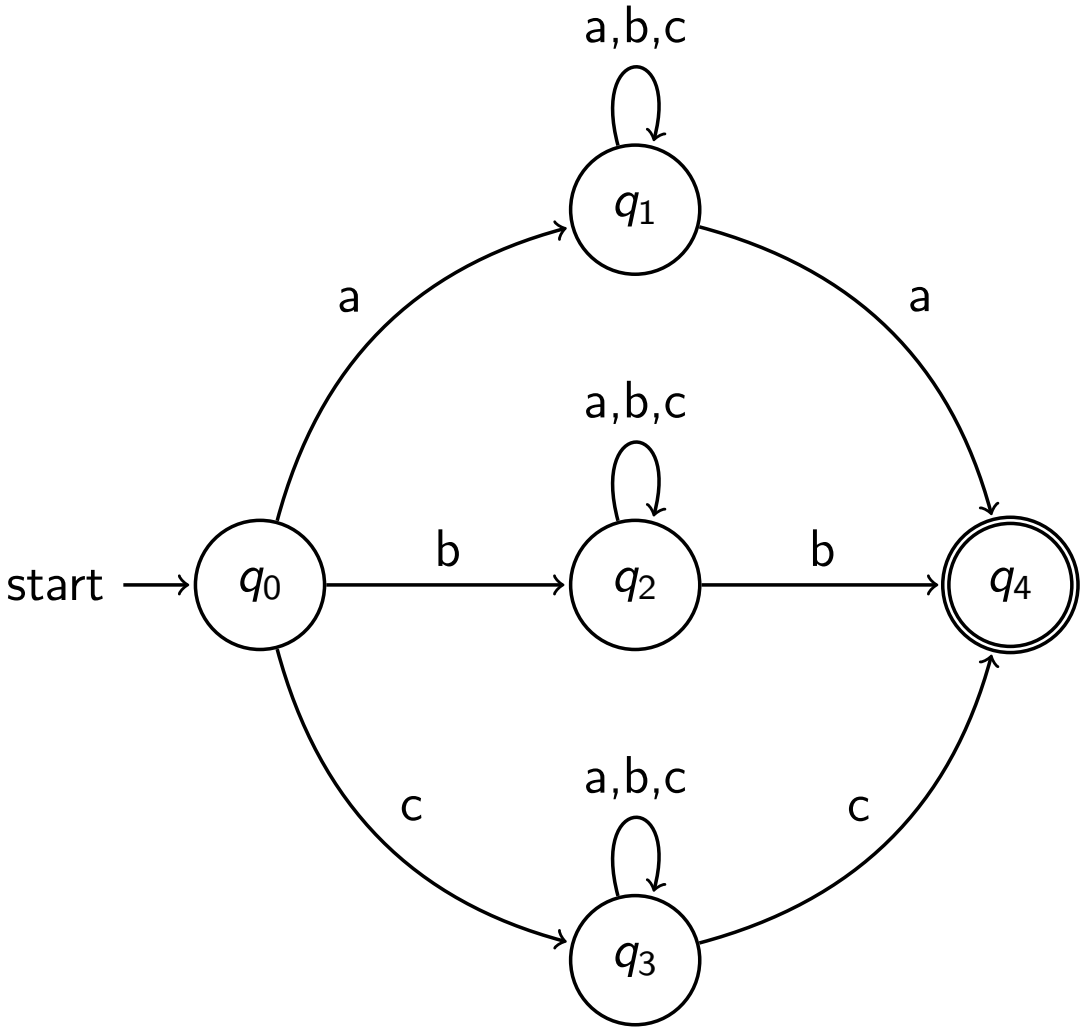
Solução 1



Solução 2


start
q_0
q_1
q_2
q_3
q_4
q_5
q_6
q_7
q_8
a
a
a
ϵ
ϵ
ϵ
ϵ
b
a
b

Solução 3



Caros,

Ainda voltaremos a este assunto num próximo encontro!