

# Autômatos finitos não-determinísticos

IBM1088 Linguagens Formais e Teoria da Computação

Evandro Eduardo Seron Ruiz  
evandro@usp.br

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

The saddest aspect of life right now is that science gathers knowledge faster than society gathers wisdom.

Isaac Asimov<sup>a</sup>

---

<sup>a</sup>Escritor americano e professor de bioquímica (1920 – 1992).

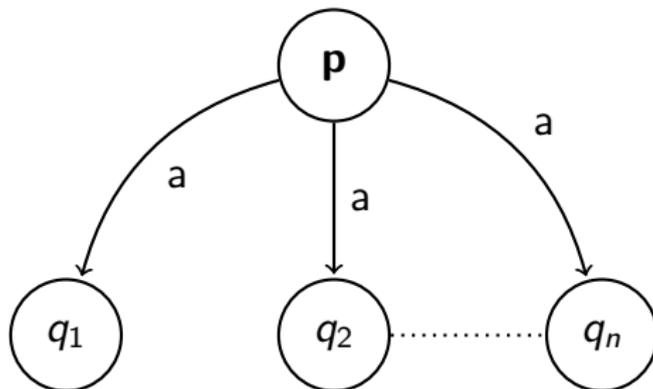
- Apresentar os autômatos finitos não-determinísticos
- Destacar os aspectos formais de AFN que diferenciam do AFD
- Sugerir a relação entre AFN e AFD

- 1 Autômatos finitos não-determinísticos
  - Introdução
  - Formalização
  - Transição vazia e movimento vazio
- 2 Exemplos
  - Exemplo 1
  - Exemplo 2
  - Exemplo 3
- 3 Exercícios

# AFN

## AFN: Visão macro

O não-determinismo nos autômatos é expresso por uma função tal que, para  $p \in Q$ , o estado corrente, e um símbolo lido, esta função determina **aleatoriamente** um novo estado de um conjunto de estados alternativos.

Um possível recorte de um diagrama para um AFN<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Menezes, PB.

## Definição formal de um AFN

### Definição

Um autômato finito não-determinístico (**AFN**) é uma 5-upla  $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ , em que

- 1  $Q$  é um conjunto finito de **estados**;
- 2  $\Sigma$  é um conjunto finito chamado **alfabeto**;
- 3  $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$  é a **função programa** a qual é uma **função total**.  
Assim, para um estado  $p$  e um símbolo  $a$   
 $\delta(p, a) = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$  é a transição do autômato;
- 4  $q_0 \in Q$  é o **estado inicial**; e
- 5  $F \subseteq Q$  é o **conjunto de estados de aceitação**.

Observem a definição de função programa acima.

## Recordando função total

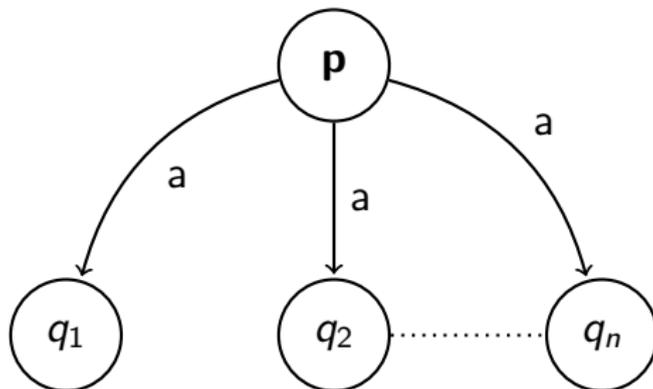
### Função total

Considerando dois conjuntos,  $X$  chamado de domínio e  $Y$  de contradomínio e, dado:

$$f : X \rightarrow Y,$$

dizemos que:

- $f$  é **total**: para todos  $x \in X$ ,  $\exists y \in Y$  tal que  $y = f(x)$ .

Um possível recorte de um diagrama para um AFN<sup>2</sup>

---

<sup>2</sup>Menezes, PB.

## Função programa estendida ou COMPUTAÇÃO

### Definição

Seja  $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  um AFN.

A **função programa estendida** ou **computação** de  $M$ , denotada por

$$\delta^* : 2^Q \times \Sigma^* \rightarrow 2^Q$$

é a função programa  $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$  estendida para palavras e conjunto de estados ( $P$ ) como:

$$\delta^*(P, \epsilon) = P$$

$$\delta^*(P, aw) = \delta^*(\cup_{(q \in P)} \delta(q, a), w)$$

ou seja, é a sucessiva aplicação da função programa para cada símbolo da palavra.

## Função programa: mais detalhes

continuação...

Ou ainda, dados os estados  $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$  e um símbolo  $a$ , vale que

$$\delta^*(\{q_1, q_2, \dots, q_n\}, a) = \delta(q_1, a) \cup \delta(q_2, a) \cup \dots \cup \delta(q_n, a)$$

ou seja, é a união de todas as possibilidades de aplicação da função de transição sobre o símbolo lido.

## Transição vazia

$$\delta(p, a) = \emptyset$$

Se  $\delta(p, a) = \emptyset$  afirma-se que a transição é **indefinida** para  $(p, a)$  e, portanto, o autômato **para** rejeitando a entrada.

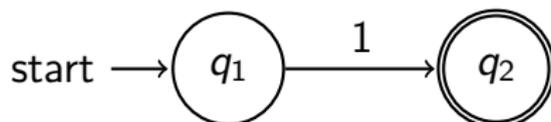
## Transição vazia

$$\delta(p, a) = \emptyset$$

Se  $\delta(p, a) = \emptyset$  afirma-se que a transição é **indefinida** para  $(p, a)$  e, portanto, o autômato **para** rejeitando a entrada.

### Exemplo de transição vazia

$$\Sigma = \{0, 1\}, w = 001.$$



A função programa  $\delta(q_1, 0) = \emptyset$ , ou seja, não está definida.

## Movimento vazio

$$\delta(p, \epsilon) = p'$$

Se  $\delta(p, \epsilon) = p'$  afirma-se que o movimento do estado  $p$  para o estado  $p'$  é vazio, ou seja, acontece mesmo sem haver um símbolo lido.

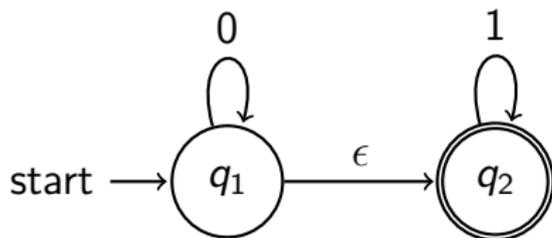
## Movimento vazio

$$\delta(p, \epsilon) = p'$$

Se  $\delta(p, \epsilon) = p'$  afirma-se que o movimento do estado  $p$  para o estado  $p'$  é vazio, ou seja, acontece mesmo sem haver um símbolo lido.

### Exemplo de movimento vazio

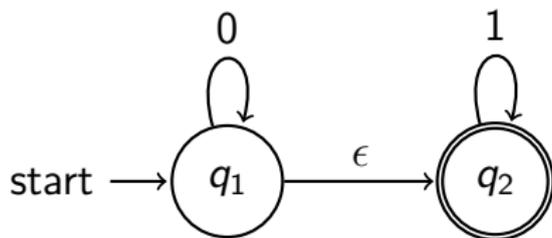
$\Sigma = \{0, 1\}$ ,  $w = 001$ .

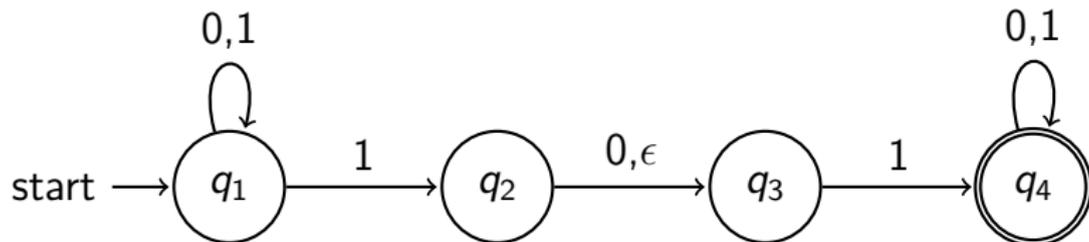


Qualquer símbolo 0 antecede o símbolo 1.

## Movimento vazio: como entender

- Toda vez que o autômato estiver numa transição  $\epsilon$  significa que ele está em *ambos* os estados
- Se a cadeia é  $\epsilon$  o estado atual do autômato é duplo  $\{q_0, q_1\}$
- Se o símbolo lido for '0' o estado atual do autômato é novamente  $\{q_0, q_1\}$



Exemplo de um autômato finito não-determinístico (AFN).<sup>3</sup>

---

<sup>3</sup>Sipser, M.

## Formalizando o autômato

Formalizando o autômato  $N_1 = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  temos:

①  $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4\};$

②  $\Sigma = \{0, 1\};$

③  $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$  é descrita como:

	0	1	$\epsilon$
$q_1$	$q_1$	$\{q_1, q_2\}$	$\emptyset$
$q_2$	$q_3$	$\emptyset$	$q_3$
$q_3$	$\emptyset$	$q_4$	$\emptyset$
$q_4$	$q_4$	$q_4$	$\emptyset$

④  $q_1$  é o **estado inicial**; e

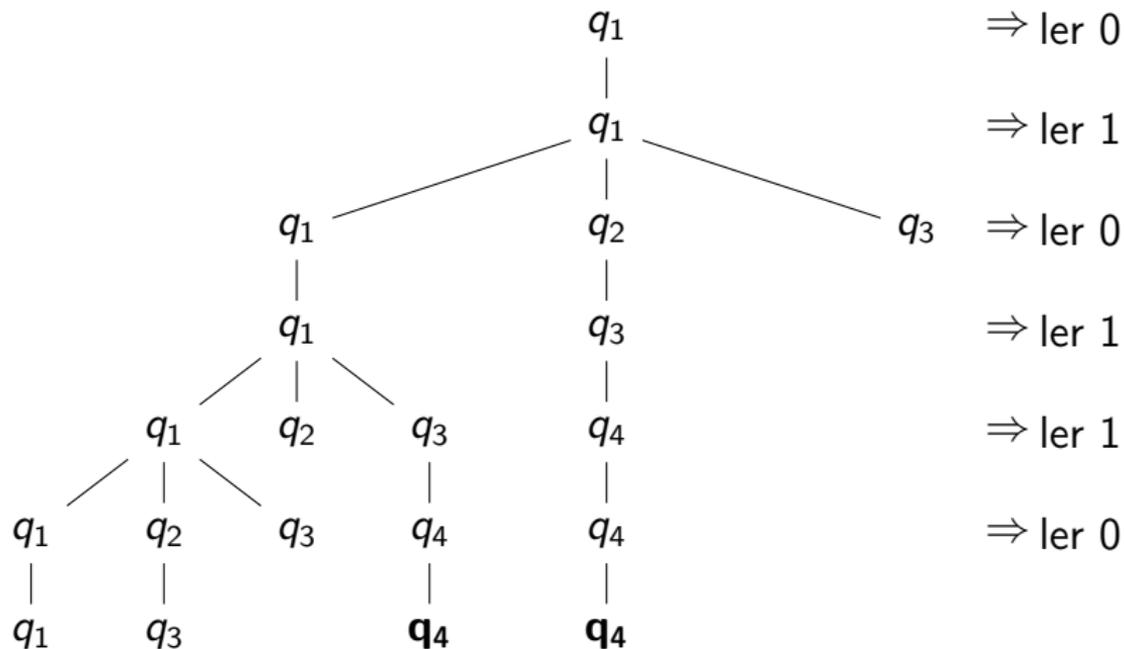
⑤  $F = \{q_4\}.$

## Como entender o AFN em execução: modo alternativo

- A cada estado alternativo do AFN, ocorre a divisão da máquina em **múltiplas cópias**
- Cada cópia segue o processamento de acordo com seu estado, o símbolo lido e a função programa
- O símbolo  $\epsilon$ , como símbolo lido, permite o avanço para o próximo estado do autômato

Vejam agora uma representação da execução do AFN  $N_1$  para a palavra **010110**

# Árvore de execução do AFN $N_1$ para **010110**



## Aceita ou rejeita

### Definição

Seja  $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  um AFN.

A **linguagem aceita** ou **linguagem reconhecida** por  $N$ , denotada por

$$L(N) \text{ ou } \text{Aceita}(N)$$

é o conjunto de todas as palavras  $w \in \Sigma^*$  t.q. existe **peelo menos um caminho alternativo** que aceita a palavra  $w$  a partir de  $\{q_0\}$ , ou seja,

$$L(N) = \{w \mid \delta^*(\{q_0\}, w) \cap F \neq \emptyset\}$$

## Explicando...

Ou seja, dada uma palavra  $w$ , um AFN para por um dos dois motivos:

- 1 Aceita  $w$   
Após processar o último símbolo lido existe pelo menos um estado final pertencente ao conjunto dos estados alternativos (nas execuções alternativas) que foi atingido
- 2 Rejeita  $w$ 
  - 1 Após processar o último símbolo lido os estados alternativos não são finais
  - 2 Em algum momento do processamento de  $w$  o conjunto de estados alternativos atingido é vazio. O AFN para por indefinição.

Exemplo 2<sup>4</sup>

Projetar um AFN  $N_2$  sobre  $\Sigma = \{a, b\}$  que considere

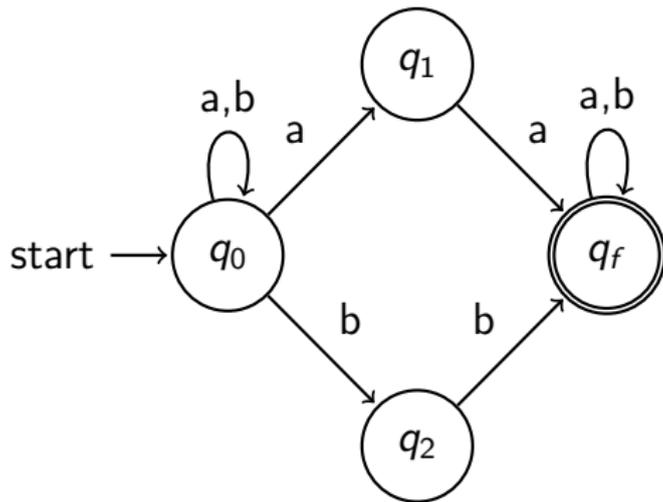
$$L_2 = \{w \mid w \text{ possui } aa \text{ ou } bb \text{ como subpalavra}\}$$

tal que  $N_2 = (\{q_0, q_1, q_2, q_f\}, \Sigma, \delta_f, q_0, \{q_f\})$ .

---

<sup>4</sup>Menezes, PB

## Exemplo 2: uma solução



Detalhes de  $N_2$ 

Notem que em  $N_2$  temos como função de transição:

$\delta_2$	a	b
$q_0$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
$q_1$	$q_f$	$\emptyset$
$q_2$	$\emptyset$	$q_f$
$q_f$	$q_f$	$q_f$

Exemplo 3<sup>5</sup>

Projetar um AFN  $N_3$  sobre  $\Sigma = \{a, b\}$  que considere

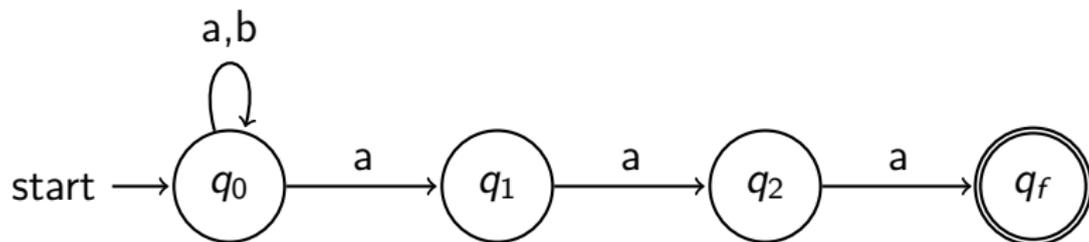
$$L_2 = \{w \mid w \text{ possui } aaa \text{ como sufixo}\}$$

tal que  $N_2 = (\{q_0, q_1, q_2, q_f\}, \Sigma, \delta_f, q_0, \{q_f\})$ .

---

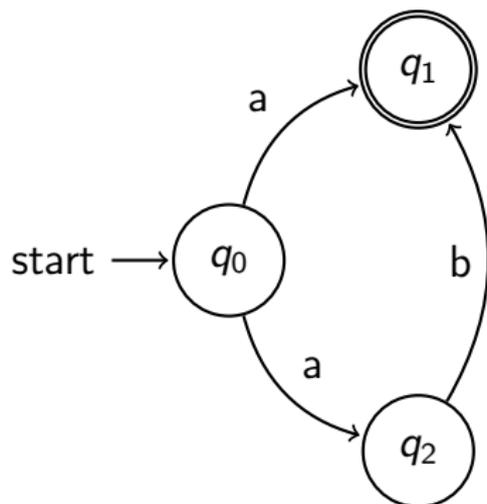
<sup>5</sup>Menezes, PB

## Exemplo 3: uma solução



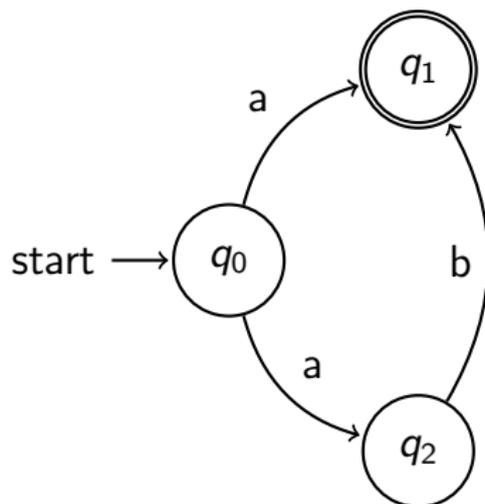
## Exercício em sala (1): 5 minutos

Determine a linguagem do AFN  $N_4$  abaixo:



## Exercício em sala (1): 5 minutos

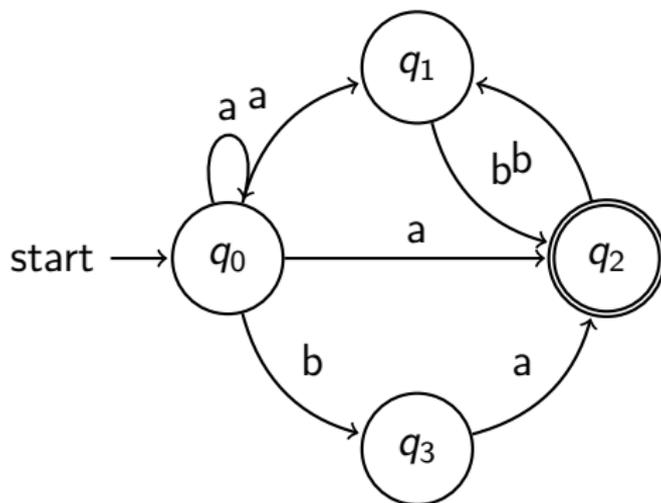
Determine a linguagem do AFN  $N_4$  abaixo:



Resposta:  $L(N_4) = \{a \cup ab\}$

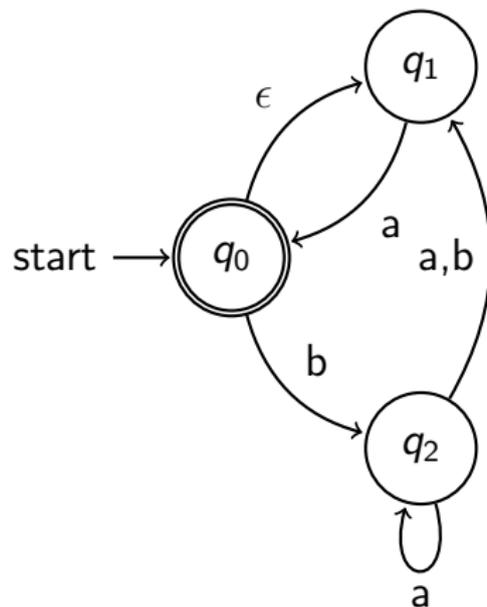
## Exercício em sala (2): 5 minutos

Determine a linguagem do AFN abaixo:



## Exercício em sala (3): 5 minutos

Determine a linguagem do AFN abaixo:



## Observação

Parece mas...

A inclusão do não-determinismo é, aparentemente, um acréscimo à capacidade de resolução aos AFD mas na realidade o não-determinismo não aumenta seu poder computacional.

## Observação

### Parece mas...

A inclusão do não-determinismo é, aparentemente, um acréscimo à capacidade de resolução aos AFD mas na realidade o não-determinismo não aumenta seu poder computacional.

### AFD equivalente

Assim, para cada AFN é possível construir um AFD equivalente que realiza as mesmas computações.

O contrário também é verdadeiro.

Caros,

Continuaremos neste assunto no próximo encontro!